Euler y la mecánica celeste

Antonio Garcia
Depto. de Matematicas
UAM-Iztapalapa
Apdo. Postal 55-534
09340, Mexico D. F.
México
agar@xanum.uam.mx

Resumen

Se comentan tres trabajos de Euler: [1, 2], que dan las primeras soluciones del problema de tres cuerpos, [3] que contiene un método para aproximar la posición de un planeta.

1. Introducción

Euler escribió más de sesenta artículos y libros de mecánica celeste sin contar los que tratan sobre mecánica general, ecuaciones diferenciales y cálculo de variaciones; en sus trabajos aparecen por primera vez las configuraciones centrales, las soluciones homográficas y homotéticas, las coordenadas rotatorias, las ecuaciones de Euler-Lagrange, el problema restringido de tres cuerpos, el problema colineal de tres cuerpos, el movimiento de una partícula atraída por dos centros fijos y el movimiento de cuerpos rígidos y de fluidos en rotación.

A diferencia de sus predecesores, Euler tenía confianza en los métodos analíticos y no utilizaba la geometría sintética para justificar hechos fundamentales de sus demostraciones. Esto le permitió avanzar en problemas muy difíciles y lo lleva a conceptos como son los vectores y sus componentes, los sistemas de referencia y la relación entre ellos, el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales y el método de variación de constantes para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. A veces Euler cometía errores, por ejemplo dividir entre cero, aunque su gran intuición lo conducía generalmente al resultado correcto. La detección y crítica de estos errores contribuyó a los estándares actuales de rigor matemático.

Vamos a comentar algunas aportaciones tomadas de los textos en latín de Euler con la notación vectorial moderna preservando sus técnicas e ideas, abreviando algunos pasos sobre todo al final de la sección 3.

El trabajo de Euler en mecánica celeste es continuación del estudio de Johannes Kepler y de Isaac Newton sobre el movimiento planetario. El trabajo del primero se resume en lo que actualmente conocemos como las tres leyes de Kepler:

- Los planetas se mueven en una elipse, el Sol está en uno de los focos.
- El vector posición de cualquier planeta con respecto al Sol barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.
- Los cuadrados de los periodos de las órbitas de los planetas son proporcionales a los cubos de los ejes mayores de las elipses.

Newton analizó el movimiento de una partícula, que llamaremos el planeta, atraída por otra de gran masa, que llamaremos el Sol y que está localizada en el origen y logra probar que si el movimento del planeta cumple con las leyes de Kepler entonces también satisface la ecuación de Kepler:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \tag{1.1}$$

donde $\mathbf{r}(t)$ es la posición del planeta en el tiempo t y $\mu > 0$ es una constante proporcional a la masa del cuerpo atractor. Observemos por ejemplo que la curva

$$\mathbf{r}(t) = [\rho\cos(\theta\, t), \rho\,\mathrm{sen}\,(\theta\, t)], \tag{1.2}$$

donde $\theta^2\rho^3 = \mu$, es una solución y verifica las leyes de Kepler. Juan Bernoulli, maestro de Euler, da el recíproco del trabajo de Newton dando la solución general de la ecuación (1.1) y probando que cumple las leyes de Kepler. En la sección 2 estudiaremos un trabajo de Euler sobre esta ecuación.

Newton propuso que n partículas de masas m_1, m_2, $\ldots$, m_n y posiciones $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$, $\ldots$, $\mathbf{r}_n(t)$ en el tiempo t satisfacen la ecuación de movimiento

$$\frac{d^2\mathbf{r}_k}{dt^2} = \sum_{j\neq k} \frac{m_j\,(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^3}, \qquad \text{para } k = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Esta ecuación es conocida actualmente como el problema de los n cuerpos. Si $n = 2$ toma la forma

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{m_2\,(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \qquad \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{m_1\,(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}.$$

Si tomamos $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ y $\mathbf{Q} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2$, entonces el sistema anterior se transforma en

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -\,(m_1 + m_2)\,\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}, \qquad \frac{d^2\mathbf{Q}}{dt^2} = \mathbf{0}.$$

Las soluciones de estas dos ecuaciones son independientes, la primera es una ecuación de Kepler de la cual Euler conocía la solución general y la segunda es trivial con solución $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{e}\,t + \mathbf{f}$, con $\mathbf{e}$ y $\mathbf{f}$ vectores constantes.

El paso siguiente es resolver la ecuación (1.3) para el caso $n = 3$ y con estas soluciones explicar el movimiento del Sol, la Tierra y la Luna. Este es el llamado problema de tres cuerpos (PTC), y resistió el ataque de los antecesores de Euler, quienes no pudieron avanzar en su análisis. Euler decidió estudiar casos particulares y modelos simplificados. El PTC aún se sigue explorando con este enfoque. En las secciones 3 y 4 describiremos trabajos de Euler en esta línea.

2. Nova methodus motum planetarum determinandi [3]

Las órbitas de los planetas son descritas por las leyes de Kepler, y eran conocidas en los tiempos de Euler. En particular, Euler conocía las excentricidades (medida en que la elipse difiere de ser círculo), los afelios y los perihelios (puntos de la órbita más lejano y más cercano al Sol respectivamente) de los planetas conocidos hace trescientos años. Sin embargo, dar la posición exacta de los planetas para un tiempo dado mediante las leyes de Kepler es complicado, más aún si tomamos en cuenta la excentricidad de la órbita terrestre.

Euler propone un nuevo método para dar esta posición aprovechando que la excentricidad ϵ de las órbitas de estos planetas es pequeña. Él usa a ϵ como parámetro de las órbitas, y empieza su análisis en $\epsilon = 0$, que corresponde a la órbita circular y estudia el caso $\epsilon > 0$ mediante el desarrollo de la serie de potencias de las órbitas en términos de la excentricidad. Para facilitar el desarrollo en serie, previamente simplifica las expresiones de las órbitas planetarias mediante varios cambios de coordenadas.

La ecuación de movimiento de un planeta con el Sol en el origen en un sistema de coordenadas inerciales $x - y$ es la ecuación de Kepler:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \tag{2.1}$$

Después de algunos cambios de escala podemos suponer que $\mu = 1$ y que el radio promedio del planeta es igual a uno. La curva

$$x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} t, \tag{2.2}$$

es una parametrización del círculo de radio uno. En la sección 1 observamos que esta curva es la solución de la ecuación de Kepler que corresponde a la órbita circular de radio y velocidad angular uniforme iguales a uno, periodo 2π y excentricidad cero. Euler identifica a esta órbita con el movimiento promedio del planeta, propone que las órbitas de los planetas con excentricidad pequeña deben estar cerca de la órbita circular, y trabaja para dar una mejor aproximación de la posición de un planeta con excentricidad pequeña. Siguiéndolo haremos las siguientes hipótesis:

- El periodo del planeta es 2π, la excentricidad de su órbita es ϵ. En el tiempo $t = 0$ el planeta se encuentra en su perihelio.

Como consecuencia de estas hipótesis y de las propiedades de la elipse se sigue que la longitud del semieje mayor de la órbita del planeta es uno, el planeta en el tiempo $t = 0$ está en el punto $(1 - \epsilon, 0)$, en el tiempo $t = \pi$ está en $(-1 - \epsilon, 0)$ y el sistema es reversible, esto es para todo tiempo t: $x(t) = x(-t)$, $y(-t) = -y(t)$.

Sea $X - Y$ el sistema de coordenadas que tiene el mismo origen que el sistema inercial $x - y$, estos dos sistemas en el tiempo t forman entre si el ángulo $\theta \equiv t \mod 2\pi$, ver figura 1. Entonces el sistema $X - Y$ está rotando con una velocidad uniforme $\frac{d\theta}{dt} = 1$. Observemos que en el tiempo $t = 0$ los dos sistemas coinciden.

Si las coordenadas de un punto en el sistema $x - y$ son (x, y) y en el sistema $X - Y$ son (X, Y) entonces ambos sistemas están relacionados

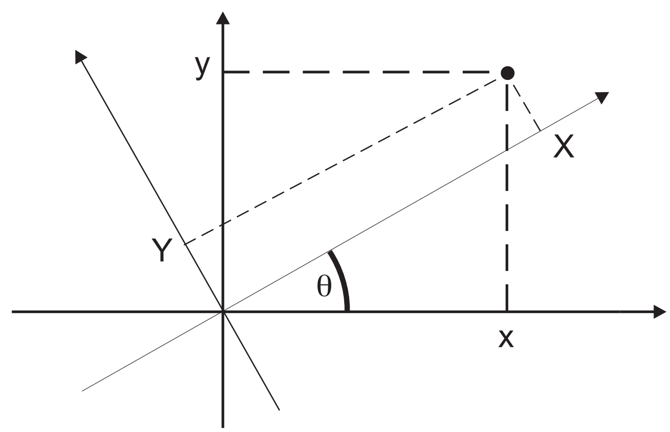

Figura 1: Coordenadas inerciales y rotativas.

por los sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= X\cos\theta - Y\operatorname{sen}\theta, \qquad & y &= X\operatorname{sen}\theta + Y\cos\theta, \\ X &= x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta, \qquad & Y &= -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Observemos que $X^2+Y^2=x^2+y^2$. Para expresar la ecuación (2.1) en las coordenadas $X-Y$ derivamos dos veces las ecuaciones anteriores y obtenemos

$$\begin{aligned} x' =& X'\cos\theta - Y'\operatorname{sen}\theta - X\sin\theta - Y\cos\theta, \\ x'' =& X''\cos\theta - Y''\operatorname{sen}\theta - 2X'\operatorname{sen}\theta - 2Y'\cos\theta - X\cos\theta + Y\operatorname{sen}\theta, \\ y' =& X'\operatorname{sen}\theta + Y'\cos\theta + X\cos\theta - Y\sin\theta, \\ y'' =& X''\operatorname{sen}\theta + Y''\cos\theta + 2X'\cos\theta - 2Y'\sin\theta - X\operatorname{sen}\theta - Y\cos\theta. \end{aligned}$$

De donde el sistema (2.1) se transforma en

$$\begin{aligned} & X''\cos\theta - Y''\operatorname{sen}\theta - 2X'\operatorname{sen}\theta - 2Y'\cos\theta \\ & \qquad - X\cos\theta + Y\operatorname{sen}\theta = -\frac{X\cos\theta - Y\operatorname{sen}\theta}{(X^2+Y^2)^{3/2}}, \\ & X''\operatorname{sen}\theta + Y''\cos\theta + 2X'\cos\theta - 2Y'\sin\theta \\ & \qquad - X\operatorname{sen}\theta - Y\cos\theta = -\frac{X\operatorname{sen}\theta + Y\cos\theta}{(X^2+Y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Eliminando las funciones $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ con las técnicas habituales se obtiene

$$\begin{aligned} X'' - 2Y' - X &= -\frac{X}{(X^2+Y^2)^{3/2}}, \\ Y'' + 2X' - Y &= -\frac{Y}{(X^2+Y^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Notemos que este sistema no depende del ángulo de rotación θ, en estas coordenadas nuevamente el Sol está en el origen, en el tiempo $t = 0$ el planeta está en el punto $(1-\epsilon, 0)$, en el tiempo $t = \pi$ está en $(-1-\epsilon, 0)$, y para todo tiempo t se tiene que $X(t) = X(-t)$ y $Y(-t) = -Y(t)$. Los nuevos términos que aparecen en (2.4) están relacionados con la velocidad ángular del sistema $X - Y$.

Sustituyendo en la ecuación (2.3) se sigue que la solución circular en las coordenadas $X - Y$ es la solución constante

$$X(t) = 1, \qquad Y(t) = 0. \tag{2.5}$$

Como siguiente paso usemos el sistema de coordenadas con origen en la solución (2.5) mediante la transformación

$$X = q + 1, \qquad Y = p, \tag{2.6}$$

entonces la ecuación (2.4) se transforma en:

$$\begin{aligned} q'' - 2p' =& 1 + q - \frac{1+q}{(p^2+(1+q)^2)^{3/2}}, \\ p'' + 2q' =& p - \frac{p}{(p^2+(1+q)^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Las propiedades de la órbita planetaria y de la posición del Sol en las coordenadas $p - q$ se resumen en el siguiente

Lema 2.1. *En el sistema de coordenadas $q - p$ se tienen las siguientes propiedades:*

1. *La solución circular en estas coordenadas es $q(t) = 0$, $p(t) = 0$.*
2. *El Sol se encuentra en el punto $(-1, 0)$.*
3. *El planeta en el tiempo $t = 0$ satisface $q(0) = -\epsilon$, $p(0) = 0$.*
4. *El sistema es reversible: $q(t) = q(-t)$, $p(-t) = -p(t)$.*

Haciendo el desarrollo en serie de potencias en q y p del sistema (2.7) hasta el orden tres [1] y reagrupando términos obtenemos:

$$\begin{aligned} q'' - 2p' &= 3q - 3\,q^2 + \frac{3\,p^2}{2} - 6\,p^2\,q + 4\,q^3 + \cdots\,, \\ p'' + 2q' &= 3\,p\,q + \frac{3\,p^3}{2} - 6\,p\,q^2 + \cdots\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Si ϵ es la excentricidad de la elipse de la órbita del planeta $[q(t), p(t)]$ cercana a la solución constante dada, entonces su desarrollo en serie en términos de la excentricidad es:

$$q = \epsilon q_1 + \epsilon^2 q_2 + \epsilon^3 q_3 + \cdots\,, \qquad p = \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \epsilon^3 p_3 + \cdots\,. \tag{2.9}$$

Donde q, p y los coeficientes de sus series dependen del tiempo. Substituyendo estas expansiones en la ecuación (2.8), agrupando y separando los términos con la misma potencia de ϵ obtenemos la siguiente sucesión de sistemas de ecuaciones diferenciales en las variables q_1, q_2, q_3, $\dots$, p_1, p_2, p_3, $\dots$:

Términos de potencia ϵ:

$$\begin{aligned} q_1'' - 2p_1' &= 3q_1, \qquad & q_1(0) &= -1, \\ p_1'' + 2q_1' &= 0, & p_1(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Términos de potencia ϵ^2:

$$\begin{aligned} q_2'' - 2p_2' &= 3q_2 + \frac{3{p_1}^2}{2} - 3{q_1}^2, \qquad & q_2(0) &= 0, \\ p_2'' + 2q_2' &= 3p_1q_1, & p_2(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Términos de potencia ϵ^3:

$$q_3'' - 2p_3' = 3q_3 + 3p_1p_2 - 6{p_1}^2q_1 + 4{q_1}^3 - 6q_1q_2, \quad q_3(0) = 0, \tag{2.12}$$

$$p_3'' + 2q_3' = \frac{3{p_1}^3}{2} + 3p_2q_1 - 6p_1{q_1}^2 + 3p_1q_2, \qquad p_3(0) = 0, \tag{2.13}$$

y así sucesivamente. En esta familia de sistemas de ecuaciones diferenciales, el sistema de los términos de la potencia ϵ es independiente del resto; y el sistema que tiene los términos de la potencia ϵ^n depende sólo de los términos de las potencias ϵ, ϵ^2, $\dots \epsilon^{n-1}$, lo que fácilmente se demuestra por inducción. Esta familia es reversible, esto es

$$q_k(-t) = q_k(t), \qquad p_k(-t) = -p_k(t), \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots \tag{2.14}$$

[1] Euler hace los cálculos que expondremos en esta sección hasta la sexta potencia sin la ayuda de computadoras y estando completamente ciego.

Todos estos sistemas de ecuaciones diferenciales tienen la forma

$$Z'' - 2z' = 3Z + M \tag{2.15a}$$

$$z'' + 2Z' = N \tag{2.15b}$$

donde M y N son funciones del tiempo t. Euler presenta ahora un estudio amplio, mucho más de lo que se necesita, de este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. El siguiente lema no se usa posteriormente, pero lo incluimos por su interés intrínseco.

Lema 2.2. *La solución general del sistema (2.15) es*

$$\begin{aligned} Z(t) =& 2c_1 + c_2 \sin(t) + c_3 \cos(t) \\ &+ \int_0^t M(\alpha) \operatorname{sen}(t-\alpha)\, d\alpha + 2\int_0^t N(\alpha) \left(\frac{1-\cos(t-\alpha)}{\cos t}\right) d\alpha \\ z(t) =& c_4 + c_1 t - 2\int_0^t Z(\alpha)\, d\alpha + \int_0^t (t-\alpha)\, N(\alpha)\, d\alpha \end{aligned}$$

donde c_k, $k = 1,\ldots 4$ son constantes arbitrarias.

La solución general del sistema homogéneo asociado

$$Z'' - 2z' = 3Z, \qquad z'' + 2Z' = 0;$$

es

$$Z(t) = 2c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t, \qquad z(t) = c_4 - 3c_1 t + 2c_2 \cos t - 2c_3 \operatorname{sen} t.$$

donde c_k, $k = 1,\ldots 4$ son constantes arbitrarias.

Demostración: Integrando la ecuación (2.15b) obtenemos $z' + 2Z = c_1 + \int_0^t N(\alpha)d\alpha$, despejando z' obtenemos

$$z' = c_1 - 2Z + \int_0^t N(\alpha)\, d\alpha. \tag{2.17}$$

Substituyendo este valor en (2.10) y reagrupando obtenemos

$$Z'' + Z = 2c_1 + M + 2\int_0^t N(\alpha)\, d\alpha. \tag{2.18}$$

que es una ecuación lineal no homogénea. Euler sabía que una solución de la ecuación diferencial $Z'' + Z = 0$ es $u_0 \cos t$ y decidió experimentar con soluciones de la ecuación (2.18) de la forma $u(t)\cos t$, usando el método que ahora conocemos como variación de parámetros. Sustituyendo en la ecuación (2.18) e integrando obtenemos el valor de $u(t)$ y sustituyendo nuevamente se obtiene $Z(t)$. El valor de $z(t)$ se obtiene ahora a partir de (2.17) integrando una vez. El sistema homogéneo es (2.15) cuando $M(t) = N(t) = 0$. ∎

De la linealidad del sistema de ecuaciones diferenciales (2.15) se sigue que su solución general se forma con la suma de la solución general de su sistema homogéneo asociado y de una solución particular del sistema (2.15). Para obtener la solución particular se usará que la suma de soluciones de los siguientes dos sistemas

$$\begin{aligned} Z'' - 2z' &= 3Z + M_1, \\ z'' + 2Z' &= N_1, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} Z'' - 2z' &= 3Z + M_2, \\ z'' + 2Z' &= N_2, \end{aligned}$$

es solución del sistema

$$\begin{aligned} Z'' - 2z' &= 3Z + M_1 + M_2, \\ z'' + 2Z' &= N_1 + N_2. \end{aligned}$$

El siguiente lema da soluciones particulares de algunos de estos sistemas.

Lema 2.3. 1. *La ecuación diferencial*

$$\begin{aligned} Z'' - 2z' &= 3Z + c, \\ z'' + 2Z' &= 0. \end{aligned}$$

tiene la siguiente solución particular

$$z(t) = -\frac{c}{2}t, \qquad Z(t) = 0.$$

2. *Dada la ecuación diferencial*

$$\begin{aligned} Z'' - 2z' &= 3Z + C\cos(nt), \\ z'' + 2Z' &= c\,\mathrm{sen}\,(nt). \end{aligned}$$

si $n \neq 0,\ 1$, *tiene la siguiente solución particular*

$$\begin{aligned} z(t) =& \frac{c\left(3+n^2\right) - 2Cn}{n^2\left(1-n^2\right)}\,\mathrm{sen}\,(nt), \\ Z(t) =& \frac{2c - Cn}{n\left(n^2-1\right)}\cos(nt). \end{aligned}$$

Si $n = 1$ *tiene la siguiente solución particular*

$$\begin{aligned} z(t) &= (C - 2c)\,t\cos t + \left(4c - \frac{3C}{2}\right)\mathrm{sen}\,t, \\ Z(t) &= \left(\frac{C}{2} - c\right)t\,\mathrm{sen}\,t + \left(\frac{C}{4} - \frac{3c}{2}\right)\cos t \end{aligned}$$

3. *La ecuación diferencial*

$$
\begin{aligned}
Z'' - 2z' &= 3Z + C_1 \cos(n_1 t) + C_2 \cos(n_2 t) + \cdots ,\\
z'' + 2Z' &= c_1 \operatorname{sen}(n_1 t) + c_2 \operatorname{sen}(n_2 t) + \cdots .
\end{aligned}
$$

tiene la siguiente solución particular

$$
\begin{aligned}
z(t) =& \frac{c_1 (3 + n_1^2) - 2C_1 n_1}{n_1^2 (1 - n_1^2)} \operatorname{sen}(n_1 t)\\
&+ \frac{c_2 (3 + n_2^2) - 2C_2 n_2}{n_2^2 (1 - n_2^2)} \operatorname{sen}(n_2 t) + \cdots ,\\
Z(t) =& \frac{2c_1 - C_1 n_1}{n_1 (n_1^2 - 1)} \cos(n_1 t + \alpha_1) + \frac{2c_2 - C_2 n_2}{n_2 (n_2^2 - 1)} \cos(n_2 t + \alpha_2) + \cdots .
\end{aligned}
$$

Demostración: La primera parte del lema se obtiene evaluando directamente. Para la parte (2) con $n \neq 0$, 1 Euler propone soluciones de la forma $Z(t) = F \cos(nt)$ y $z(t) = f \operatorname{sen}(nt)$ en donde f y F son constantes cuyos valores se obtienen sustituyendo en la ecuación diferencial.

En el caso $n = 1$ se proponen soluciones de la forma $Z(t) = At \operatorname{sen} t + B \cos t$, $z(t) = D\, t \cos t + E \operatorname{sen} t$. La última parte es consecuencia directa de las anteriores. □

Con el análisis previo regresemos al problema de aproximar la posición del planeta. Euler estudia las soluciones de las ecuaciones asociadas a los términos de las potencias de ϵ. El principal problema que enfrentamos en cada paso es elegir adecuadamente las constantes que aparecen.

Sistema de ecuaciones de la potencia ϵ: El sistema de ecuaciones diferenciales (2.10) tiene la forma del sistema (2.15) con $M = N = 0$, entonces por el lema 2.2 su solución general es

$$
\begin{aligned}
q_1(t) &= 2c_1 + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos t,\\
p_1(t) &= c_4 - 3c_1 t + 2c_2 \cos t - 2c_3 \operatorname{sen} t.
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Si $c_1 \neq 0$ entonces $p_1(t)$ y por lo tanto $p(t)$ no son acotados. Como estamos interesados en soluciones $[q(t), p(t)]$ acotadas debemos tener $c_1 = 0$. Observemos que

$$
-1 = q_1(0) = c_3, \qquad 0 = p_1(0) = c_4 + 2c_2.
$$

Sustituyendo en (2.25) obtenemos

$$
\begin{aligned}
q_1(0) &= c_2 \operatorname{sen} t - \cos t\\
p_1(0) &= -2c_2 + 2c_2 \cos t + 2 \operatorname{sen} t.
\end{aligned}
$$

Para obtener el valor de c_2 usamos la reversibilidad del sistema. Dado que $p_1(-t) = -p_1(t)$ entonces

$$-2c_2 + 2c_2 \cos t - 2 \operatorname{sen} t = 2c_2 - 2c_2 \cos t - 2 \operatorname{sen} t,$$

de donde se sigue que $c_2 = 0$, obteniendose

$$q_1(t) = -\cos t, \qquad p_1(t) = 2 \operatorname{sen} t. \tag{2.26}$$

La órbita del planeta hasta el primer orden de la excentricidad es

$$\begin{aligned} q(t) &= \epsilon q_1(t) = -\epsilon \cos t, \\ p(t) &= \epsilon p_1(t) = 2\epsilon \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

O bien en coordenadas inerciales se tiene que:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 - \epsilon \cos t) \cos t - 2\epsilon \operatorname{sen}^2 t, \\ y(t) &= (1 - \epsilon \cos t) \operatorname{sen} t + 2\epsilon \operatorname{sen} t \cos t. \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones de potencia ϵ^2: Usando las expresiones de $p_1(t)$ y $q_1(t)$ dadas en (2.26) el sistema (2.11) se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{d^2q_2}{dt^2} - 2\frac{dp_2}{dt} &= 3q_2 + \frac{3}{2} - \frac{9}{2}\cos(2\,t), \qquad & q_2(0) = 0, \\ \frac{d^2p_2}{dt^2} + 2\frac{dq_2}{dt} &= -3\operatorname{sen}(2t), \qquad & p_2(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Los lemas 2.2 y 2.3 implican que

- La solución general del sistema homogéneo $q_2'' - 2p_2' = 3q_2$, $p_2'' + 2q_2' = 0$ es $p_2(t) = (c_4 + 2c_2) - 3c_1 t + 2c_2 \cos t - 2c_3 \operatorname{sen} t$, $q_2(t) = 2c_1 + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos t$.
- Una solución particular de $q_2'' - 2p_2' = 3q_2 + \frac{3}{2}$, $p_2'' + 2q_2' = 0$ es $p_2(t) = -3t$, $q_2(t) = \frac{3}{2}$.
- Una solución particular de $q_2'' - 2p_2' = 3q_2 - \frac{9}{2}\cos(2\,t)$, $p_2'' + 2q_2' = -3\operatorname{sen}(2t)$ es $p_2(t) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)$ y $q_2(t) = \frac{1}{2}\cos(2t)$.

Entonces la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales (2.27) está dada por

$$\begin{aligned} p_2(t) &= (c_4 + 2c_2) - 3(c_1 + 1)\,t + 2c_2 \cos t - 2c_3 \operatorname{sen} t + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t), \\ q_2(t) &= \frac{3}{2} + 2c_1 + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos t + \frac{1}{2}\cos(2t). \end{aligned}$$

Nuevamente, debido a que las soluciones buscadas son acotadas, se necesita que $c_1 = -1$. Usando las condiciones iniciales y la ecuación (2.14) como en el caso anterior obtenemos que los coeficientes c_2, c_3 y c_4 deben ser cero. En consecuencia se obtiene:

$$p_2(t) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t), \qquad q_2(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t). \tag{2.28}$$

La aproximación de la solución hasta los términos cuadrados es

$$q(t) = -\epsilon\cos t + \frac{\epsilon^2}{2}(\cos(2t) - 1), \qquad p(t) = 2\epsilon\operatorname{sen} t + \frac{\epsilon^2}{4}\operatorname{sen}(2t).$$

Sistema de ecuaciones de potencia ϵ^3: Sustituyendo en la ecuación (2.12) los valores obtenidos previamente para $q_1(t)$, $p_1(t)$, $q_2(t)$, $p_2(t)$ y simplificando se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} q_3'' - 2p_3' &= 3q_3 + \frac{9}{4}\cos t - \frac{25}{4}\cos(3t), \\ p_3'' + 2q_3' &= \frac{9}{8}\operatorname{sen} t - \frac{39}{8}\operatorname{sen}(3t). \end{aligned}$$

Con el método desarrollado anteriormente se tiene que su solución general es

$$\begin{aligned} q_3(t) =& 2c_1 + c_2\operatorname{sen} t + \left(c_3 - \frac{9}{8}\right)\cos t + \frac{3}{8}\cos(3t), \\ p_3(t) =& c_4 - 3c_1 t + 2c_2\cos t + \left(\frac{9}{8} - 2c_3\right)\operatorname{sen} t + \frac{7}{24}\operatorname{sen}(3t). \end{aligned}$$

De las condiciones iniciales, la ecuación (2.14) y la acotación de las soluciones buscadas se sigue que $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{3}{4}$, $c_4 = 0$. De donde

$$\begin{aligned} q_3(t) &= -\frac{3}{8}\cos t + \frac{3}{8}\cos(3t), \\ p_3(t) &= -\frac{3}{8}\operatorname{sen} t + \frac{7}{24}\operatorname{sen}(3t). \end{aligned}$$

La aproximación de la solución hasta los términos cúbicos es

$$\begin{aligned} q(t) &= -\epsilon\cos t + \frac{\epsilon^2}{2}(\cos(2t) - 1) + \frac{3\epsilon^3}{8}(\cos(3t) - \cos t), \\ p(t) &= 2\epsilon\operatorname{sen} t + \frac{\epsilon^2}{4}\operatorname{sen}(2t) + \frac{\epsilon^3}{24}(7\operatorname{sen}(3t) - 9\operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

En términos de las coordenadas originales

$$x(t) = \cos t + \frac{\epsilon}{2}(\cos(2t) - 3) + \frac{3\epsilon^2}{8}(\cos(3t) - \cos t) + \frac{\epsilon^3}{3}(\cos(4t) - \cos(2t)),$$

$$y(t) = \operatorname{sen} t + \frac{\epsilon}{2}\operatorname{sen}(2t) + \frac{\epsilon^2}{8}(3\operatorname{sen}(3t) - 5\operatorname{sen} t) + \frac{\epsilon^3}{12}(4\operatorname{sen}(4t) - 5\operatorname{sen}(2t)).$$

La excentricidad de Marte es 0,093. En la figura 2 se muestran la

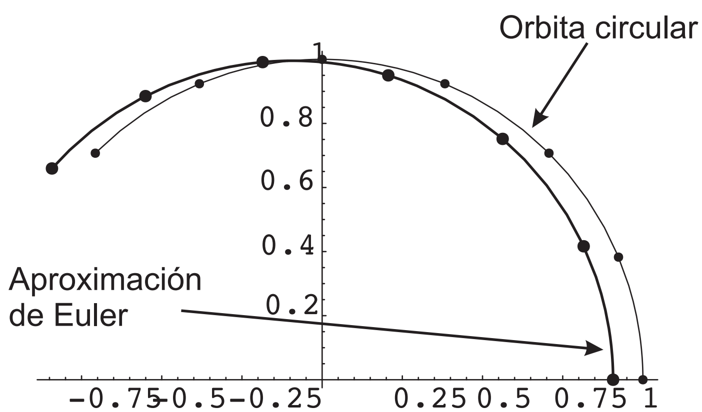

Figura 2: Aproximación circular y de Euler de la órbita de Marte en coordenadas inerciales.

aproximación circular y de Euler de la órbita de este planeta.

El método descrito en esta sección para ubicar a un planeta necesita el periodo, el afelio y que la excentricidad de la órbita del planeta sea casi cero. Después de Euler se han propuesto varias mejoras y otros métodos para resolver este problema. Mencionaremos tan solo a Lagrange, alumno de Euler, quien estudió el caso en que la excentricidad es grande y la aplicó a la localización de cometas, y a Gauss quien, estudió el caso en que se tenían pocos datos y lo usó para localizar a Ceres, planeta enano entre Marte y Jupiter, con sólo tres observaciones.

3. De Motu rectilineo Trium corporum se mutuo attrahentium [2].

Entre Newton y Euler se avanzó poco en el PTC. En esta sección y la próxima construiremos las dos primeras soluciones conocidas del PTC, y que fueron obtenidas por Euler.

Daremos la solución del PTC donde las tres partículas se mueven en una recta y además conservan la proporción en las distancias entre ellas, por lo que la forma de su configuración no cambia. Las partículas tienen masas $m_1 = a$, $m_2 = b$ y $m_3 = c$ y posiciones

$$\mathbf{r}_1 = x, \qquad \mathbf{r}_2 = y, \qquad \mathbf{r}_3 = z.$$

Donde $x < y < z$, ver la figura 3, entonces la ecuación (1.3) toma la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{b}{(y-x)^2} + \frac{c}{(z-x)^2}, \tag{3.1a}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{a}{(y-x)^2} + \frac{c}{(z-y)^2}, \tag{3.1b}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{a}{(z-x)^2} - \frac{b}{(z-y)^2}. \tag{3.1c}$$

A continuación buscaremos las cantidades que son constantes a lo

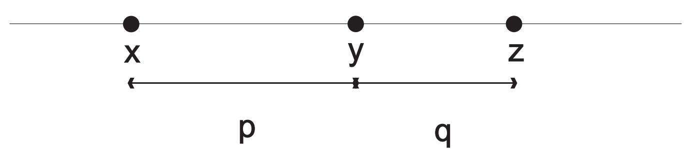

Figura 3: Problema colineal de tres cuerpos.

largo de las trayectorias. A estas cantidades se les llama integrales de la ecuación diferencial, integrales de movimiento o integrales primeras. Sumando el resultado de multiplicar la ecuación (3.1a) por a, (3.1b) por b y (3.1c) por c obtenemos

$$\frac{d^2}{dt^2}(ax + by + cz) = a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

de donde se sigue que

$$ax + by + cz = et + f, \tag{3.2}$$

para algunas constantes e y f. La función $et + f$ es el centro de masas, y e es el momentum del sistema. La ecuación (3.2) se llama la integral de momento.

Sea

$$h = a\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + b\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + c\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{2ab}{x-y} + \frac{2ac}{x-z} + \frac{2bc}{y-z}, \quad (3.3)$$

la cantidad h se llama la energía del sistema. Derivando se sigue que $\frac{dh}{dt} = 0$. De esta forma obtenemos que e, f y h son tres integrales. Euler pensaba que resolver un sistema de ecuaciones diferenciales era transformarlo en un sistema equivalente de ecuaciones algebraicas de las posiciones y sus velocidades, eliminado las derivadas de las velocidades. Notemos que Euler incluía entre las funciones algebraicas incluye a funciones como e^x, $\tan x$, etc. Las ecuaciones (3.2) y (3.3) formarían parte de este sistema, pero faltan más ecuaciones para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (3.1). Ahora sabemos que el problema colineal de tres cuerpos es caótico, lo que implica entre otras cosas que no existe el número necesario de integrales para resolver el sistema en el sentido de Euler, ver [4]. También sabemos que ciertas soluciones particulares como las que encontraremos en esta sección y las integrales contienen la información fundamental sobre la estructura de las soluciones, ver [5].

Definamos las funciones

$$p = y - x, \qquad q = z - y, \quad (3.4)$$

las cuales son positivas, ver figura 3. El siguiente paso es transformar el sistema (3.1) y la ecuación de momento y la energía a estas nuevas variables. Observemos primero que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{b}{p^2} + \frac{c}{(q+p)^2},\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{a}{p^2} + \frac{c}{q^2},\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{a}{(q+p)^2} - \frac{b}{q^2}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo (3.4) en la definición de p, q y en la integral de momento, y despejando y en esta última obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2p}{dt^2} &= \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{a}{p^2} + \frac{c}{q^2} - \left(\frac{b}{p^2} + \frac{c}{(q+p)^2}\right) \qquad (3.5a)\\
&= -\frac{a+b}{p^2} + \frac{c}{q^2} - \frac{c}{(q+p)^2},\\
\frac{d^2q}{dt^2} &= \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{a}{(q+p)^2} - \frac{b}{q^2} - \left(-\frac{a}{p^2} + \frac{c}{q^2}\right) \qquad (3.5b)\\
&= -\frac{a}{(q+p)^2} + \frac{a}{p^2} - \frac{b+c}{q^2}.
\end{aligned}$$

Además

$$y = \frac{ap - cq + et + f}{a + b + c}. \tag{3.6}$$

La ecuación de la energía toma ahora la forma:

$$\frac{bc\,(q')^2 + ab\,(p')^2 + ac\,(p' + q')^2}{a + b + c} = h^* + \frac{2ab}{p} + \frac{2ac}{p + q} + \frac{2bc}{q}, \tag{3.7}$$

donde $h^* = h - \frac{e^2}{a+b+c}$. Una vez obtenida y se puede usar (3.4) para encontrar x y z. Por lo que ahora se buscan p y q en el sistema (3.5) con la restricción (3.7). Notemos que ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones diferenciales, ya que se eliminó una ecuación diferencial por medio de la integral de momento. El sistema de ecuaciones involucra a las variables p, q, t. Euler buscó primero las soluciones que preservan la forma, con esto en mente definió el siguiente cambio de variables:

$$q = up,$$

la variable u está asociada a la forma que tienen las posiciones de las partículas y p a su tamaño.

A continuación haremos una simplificación sobre el trabajo original de Euler. Como estamos interesados en las soluciones que preservan la forma supongamos que u es constante y por lo tanto $u' = 0$. El sistema (3.5) se escribe como:

$$\begin{aligned} p'' &= -\frac{f(u)}{p^2}, & f(u) &= a + b - \frac{c}{u^2} + \frac{c}{(u+1)^2}; \\ q'' &= up'' = -\frac{g(u)}{p^2}, & g(u) &= -a + \frac{a}{(u+1)^2} + \frac{b + c}{u^2}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como $q = up$, es suficiente encontrar una solución a la primera ecuación. Dividimos la ecuación en dos problemas, un problema algebraico y un problema de Kepler en una recta.

Veamos primero el problema algebraico. De $q'' = up''$ y de (3.8) se sigue

$$u\left(-a - b + \frac{c}{u^2} - \frac{c}{(u+1)^2}\right) = a - \frac{a}{(u+1)^2} - \frac{b + c}{u^2}, \tag{3.9}$$

multiplicando por $u^2(u+1)^2$ y reagrupando obtenemos:

$$(b+c)+(2b+2c)u+(b+3c)u^2-(3a+b)u^3-(3a+2b)u^4-(a+b)u^5 = 0. \tag{3.10}$$

Hay un solo cambio de signo en este polinomio por lo que la regla de los signos de Descartes implica que hay solamente una raíz positiva, la cual denotamos por u_0. Con esto se termina el problema algebraico.

Estudiemos ahora el problema de Kepler en una dimensión, tomando $u = u_0$ en la ecuación (3.8) se obtiene la ecuación

$$p'' = -\frac{f(u_0)}{p^2}, \tag{3.11}$$

es posible demostrar que $f(u_0) > 0$, por lo que esta ecuación es una ecuación de Kepler en una dimensión.

La ecuación de la energía toma la forma

$$\alpha(u)\, p' - \beta(u)\frac{1}{p} = h^*.$$

Donde $\alpha(u) = \frac{ab+bc\,u^2+ac(1+u)^2}{a+b+c} > 0$ y $\beta(u) = 2ab + \frac{2ac}{1+u} + \frac{2bc}{u} > 0$. Esta ecuación es una ecuación diferencial de variables separables, cuya solución después de resolverla se escribe como se obtiene

$$\alpha(u_0)\left(\frac{p}{h^*} - \frac{\log(g^*\, p + \beta(u_0))\, \beta(u_0)}{g^{*2}}\right) = t + c. \tag{3.12}$$

Si $p(t)$ es solución de (3.12), entonces también lo es de la ecuación diferencial (3.11), esta función y $q(t) = u_0 p(t)$ forman una solución de (3.8), sustituyendo estos valores en (3.6) y (3.4) se obtiene finalmente una solución del sistema (3.1).

La posición de las partículas en un tiempo dado t en una solución se llama la configuración de la solución en el tiempo t. Las soluciones tales que todas sus configuraciones son semejantes entre si se llaman homográficas y a su configuración, configuración central (CC). La solución que acabamos de construir es la primera solución homográfica conocida. Notemos que Euler obtiene en (3.10) un polinomio de una variable de orden cinco, por lo que se conforma con probar la existencia de u_0. Este método no sirve en el problema de cuatro cuerpos ya que el polinomio resultante tiene dos variables.

4. Considerationes de motu corporum coelestium [1]

Euler observa que con un proceso similar al de la sección anterior se pueden obtener soluciones en el plano tales que las tres partículas están siempre alineadas pero girando en torno a su centro de masas, ver figura 4. Muchos detalles serán omitidos.

Sea $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ una solución de la ecuación (1.3) para $n = 3$. Se puede suponer que el origen está en el centro de masas: $a\,\mathbf{r}_1 + b\,\mathbf{r}_2 + c\,\mathbf{r}_3 = \mathbf{0}$ y se definen las funciones

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \qquad u\,\mathbf{p} = \mathbf{q} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2, \tag{4.1}$$

donde u es una constante que se determinará nuevamente.

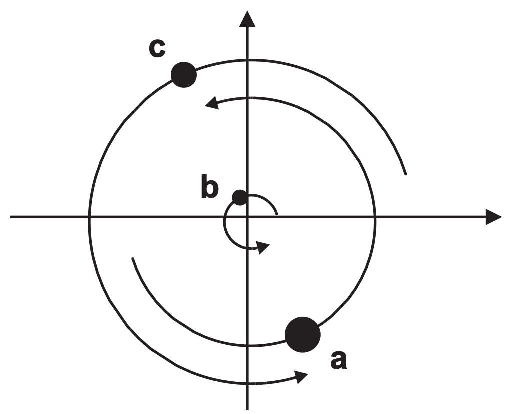

Figura 4: Equilibrio relativo colineal $a = 1$, $b = 0{,}4$, $c = 0{,}7$.

Entonces se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\mathbf{p}'' = -f(u)\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^3}, \qquad \mathbf{q}'' = u\,\mathbf{p}'' = -g(u)\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^3}. \tag{4.2}$$

Donde las funciones $f(u)$ y $g(u)$ fueron definidas en (3.8). Nuevamente el problema es dividido en dos partes, el problema algebraico, que coincide con el caso anterior obteniéndose el mismo valor de $u = u_0$ y un problema de Kepler en el plano, cuya solución general fue obtenida por Juan Bernoulli y era conocida por Euler. Por ejemplo, una solución es

$$\mathbf{p} = (\rho\cos[\theta t], \rho\,\mathrm{sen}\,[\theta t]), \text{ donde } \theta^2\rho^3 = f(u_0),$$
$$\mathbf{q} = u_0\,\mathbf{p}.$$

En términos de las posiciones de las partículas obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= -\frac{b+c+c\,u_0}{a+b+c}\left(\rho\cos\left[\theta t\right], \rho\,\mathrm{sen}\left[\theta t\right]\right),\\
\mathbf{r}_2 &= \frac{a-cu_0}{a+b+c}\left(\rho\cos\left[\theta t\right], \rho\,\mathrm{sen}\left[\theta t\right]\right),\\
\mathbf{r}_3 &= \frac{a+a\,u_0+b\,u_0}{a+b+c}\left(\rho\cos\left[\theta t\right], \rho\,\mathrm{sen}\left[\theta t\right]\right).
\end{aligned}$$

Estas soluciones en las coordenadas rotativas de la sección 2 se convierten en puntos fijos, por lo que actualmente se llaman equilibrios relativos, notemos que estas soluciones también son homográficas.

El estudio de las CC es un tema de gran interés actualmente. Las referencias [5, 6, 7, 8] son introducciones a la mecánica celeste en donde se pueden apreciar la importancia de las CC y encontrar otras aportaciones de Euler a esta rama de las matemáticas.

Referencias

[1] L. Euler, *Considerationes de motu corporum coelestium* Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 10, (1766), 544–558.

[2] L. Euler, *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium*, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 11, (1767), 144–151.

[3] L. Euler, *Nova methodus motum planetarum determinandi*, Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae (1778), 277-302.

[4] J. Llibre, C. Simo, *Some homoclinic phenomena in the three-body problem*, J. Differential Equations 37 (1980), no. 3, 444–465.

[5] K. R. Meyer, G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem.* Springer-Verlag, 1992.

[6] R. Moeckel, *Celestial Mechanics (especially central configurations)*, International Atomic Energy Agency, 1994.

[7] D. G. Saari, *On the role and properties of n body central configurations*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 21 (1980), no 1, 9-20.

[8] D. G. Saari, *Collisions, Rings, and Other Newtonian N-Body Problems.* CBMS 104, American Mathematical Society, 2005.