OPERACIONES DISTRIBUTIVAS EN LOS NUMEROS REALES

por Francisco Thaine P.*

Sea $*$ una operación definida en el conjunto de los números reales positivos, como sigue:

$$x * y = x^{\ln y}$$

Se cumple que:

$$x * y = x^{\ln y} = e^{\ln x \ln y} = y^{\ln x} = y * x$$

$$x * (y * z) = x^{\ln(y*z)} = x^{\ln(y^{\ln z})} =$$

$$x^{\ln y \ln z} = (x * y)^{\ln z} = (x * y) * z$$

$$x * (y.z) = x^{\ln(y.z)} = x^{\ln y + \ln z} =$$

$$= (x^{\ln y}).(x^{\ln z}) = (x * y).(x * z)$$

Por tanto, la operación $*$ es conmutativa, asociativa y distributiva respecto al producto ordinario de números reales positivos.

Si x es real positivo, entonces $x * e = x^{\ln e} = x$, de donde resulta que $\underline{e}$ es elemento neutro de $*$.

Si además $x \neq 1$; el elemento $e^{1/\ln x}$ existe y como $e^{1/\ln x} * x = (e^{1/\ln x})^{\ln x} = e$; el elemento $e^{1/\ln x}$ es el simétrico de x según $*$.

(*) Depto. de Matemáticas,
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Universidad Mayor de San Andres, La Paz, Bolivia.

El número 1 no tiene simétrico puesto que $1 * x = 1^{\ln x} = 1$.

Los números reales positivos, con el producto ordinario forman un grupo abeliano, de modo que el conjunto de números reales positivos, con el producto y la operación $*$ constituyen un cuerpo conmutativo. Este cuerpo es isomorfo al cuerpo de los números reales (con la suma y el producto); para demostrarlo definamos una función f de los reales positivos en los reales de la siguiente manera:

$$f(x) = \ln x$$

f es biyectiva. Además se cumple que:

$$f(x * y) = f(x^{\ln y}) = \ln (x^{\ln y}) = \ln x \ln y = f(x)f(y)$$

$$f(x.y) = \ln (x.y) = \ln x + \ln y = f(x) + f(y).$$

Esto completa la demostración.

Sea Δ una operación definida en el conjunto de los números reales de la siguiente manera:

$$x \, \Delta \, y = \ln(e^x + e^y)$$

Se cumple que:

$$x \, \Delta \, y = \ln(e^x + e^y) = \ln(e^y + e^x) = y \, \Delta \, x$$

$$(x \, \Delta \, y) \, \Delta \, z = \ln(e^{x \Delta y} + e^z) = \ln(e^{\ln(e^x+e^y)} + e^z) =$$

$$= \ln(e^x+e^y+e^z) = \ln(e^x+e^{\ln(e^y+e^z)}) = \ln(e^x+e^{y \Delta z}) =$$

$$= x \, \Delta \, (y \, \Delta \, z)$$

$$x + (y \, \Delta \, z) = x+\ln(e^y+e^z) = \ln e^x + \ln(e^y+e^z) =$$

$= \ln e^x(e^y+e^z) \quad = \ln(e^{x+y}+e^{x+z}) = (x+y) \,\Delta\, (x+z)$

Como vemos, la operación Δ es conmutativa, asociativa y la suma es distributiva respecto a Δ .

De todo lo dicho se deduce que, en cierto sentido, existen operaciones "anteriores" a la suma y operaciones "posteriores" al producto.

Definamos ahora por inducción la operación $\boxed{n}$:

$\boxed{-1} = \Delta$; $\boxed{0} = +$; $\boxed{1} = .$; $\boxed{2} = *$

y, si está definida la operación $\boxed{k}$ serán:

$\boxed{k+1} = e^{\ln x \boxed{k} \ln y}$

$\boxed{k-1} = \ln(e^x \boxed{k} e^y)$

Para todo entero k, $\boxed{k}$ es distributiva respecto a $\boxed{k-1}$

Las operaciones $\boxed{k}$ con k negativo están definidas para todos los reales. Son asociativas y conmutativas pero no tienen elemento neutro ni simétrico.

Las operaciones $\boxed{k}$ con k positivo están definidas en subconjuntos del conjunto de los números reales.

$\boxed{2} = *$ está definida para reales mayores que 0

$\boxed{3}$ para reales mayores que $e^0 = 1$; $\boxed{4}$ para reales mayores que $e^1 = e$; $\boxed{5}$ para reales mayores que e^e, etc.

($\boxed{k}$ está definida para todos los números reales mayores que el elemento neutro de $\boxed{k-2}$).

Si k es positivo, entonces el subconjunto en que está definida $\boxed{k}$; junto con esta operación y $\boxed{k - 1}$; constituye - un cuerpo isomorfo al cuerpo de los números reales (con la suma y el producto).

Hemos utilizado el logaritmo neperiano para definir las - operaciones, pero podíamos emplear logaritmos en una base cualquiera positiva y diferente de 1, obteniendo resultados completamente análogos.

La operación que a todo par de números reales positivos hace corresponder el número 1, es distributiva respecto al producto.

Toda otra operación continua definida en el conjunto de los reales positivos, que sea distributiva respecto al producto hace corresponder a cada par (a,b) el elemento $a^{\log_s b}$

para algún $s \neq 1$ real positivo.

(s constante para cada operación).