Miscelánea Matemática **61** (2015) 31-42 SMM

El problema de las esposas y las llaves

Josefina Alvarez
Departamento de Matemática
New Mexico State University
Las Cruces, New Mexico 88003, USA
jalvarez@nmsu.edu

Lorenz Hughes
Departamento de Matemática
New Mexico State University
Las Cruces, New Mexico 88003, USA
lhughes@nmsu.edu

1. Introducción

La Tormenta De Hielo [3], filmada en 1997, presenta la vida de dos familias durante el fin de semana de Acción de Gracias del año 1973. En algún momento, la película muestra a varios matrimonios llegando a una fiesta. A medida que entran, ponen la llave del coche en una cesta. El propósito es que al final de la velada cada una de las esposas recogerá, sin mirar, una de las llaves. Lo que comienza como un juego nacido del aburrimiento y el desengaño, se convierte en un drama que al final trae redención para algunos y perdición para otros.

No queriendo revelar más de la trama y porque, después de todo, ésta es una revista dedicada a la matemática, aquí dejamos la película.

En realidad, lo que nos interesa, es analizar el juego de las esposas y las llaves y más específicamente, lo que podríamos considerar como un escenario extremo, es decir, que ninguna de las esposas tome su propia llave. A tal fin nos preguntamos: ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra? Éste es nuestro problema de las esposas y las llaves.

Si se tratara de un número muy pequeño de parejas, digamos tres, cuatro o cinco, no habrá más que contar los posibles apareamientos [15] $(esposa, llave)$ cumpliendo la condición de que la llave no pertenece a la esposa. Éstos son los casos favorables. Los casos posibles son todos los apareamientos, sin ninguna condición. La probabilidad será, por supuesto, el cociente de los casos favorables sobre los casos posibles.

Hasta aquí, todo es muy simple. La cosa se empieza a complicar cuando el número de parejas crece ¡y ni qué decir si estamos pensando en n parejas para un n cualquiera! Ahí es cuando tenemos que aprovechar el magnífico poder de abstracción de la matemática. He aquí nuestro planteo:

Si reflexionamos un poco, veremos que en lugar de pensar en n esposas y n llaves, podemos considerar a las funciones biyectivas f del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ en sí mismo. O dicho de otra manera, a las permutaciones [16] de los números $1, 2, \ldots, n$. Sabemos que hay $n!$ permutaciones [16]. Por cierto, la probabilidad de una permutación particular es $\frac{1}{n!}$, lo cual automáticamente hace que todas las permutaciones sean equiprobables.

El que ninguna esposa acierte a tomar su propia llave significa que nos interesan las funciones biyectivas sin puntos fijos. Es decir, aquéllas que cumplen $f(j) \neq j$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

En el lenguaje de las permutaciones, nos referimos a estas biyecciones sin puntos fijos como desarreglos [13]. El número de desarreglos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, o de cualquier conjunto con n elementos, suele indicarse con la notación $!n$, que se llama subfactorial [13].

Los números de la forma $!n$ son llamados números de Montmort, en honor al matemático francés Pierre Rémond de Montmort (1678–1719), quien en 1708 fue el primero en proponer el problema de contar los desarreglos de un conjunto con n elementos ([6], págs. 131–138). El problema fue resuelto hacia 1713, independientemente, por de Montmort y por el matemático suizo Nicolaus (I) Bernoulli (1687–1759).

Por supuesto, la noción de desarreglo puede ilustrarse de muchas maneras. Por ejemplo, en su novela *Pythagoras' Revenge* [11], Arturo Sangalli imagina a doce jugadores de béisbol dejando sus gorras en una bolsa. Sangalli entonces se pregunta ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los jugadores saque su propia gorra de la bolsa? ¿Qué pasa con la probabilidad cuando el número de jugadores y gorras crece indefinidamente? Es en este libro donde supimos del problema, aunque en nuestra solución no seguiremos la pista dada por el autor en el apéndice. En efecto, Sangalli sugiere la manera más común de contar los desarreglos de n objetos, que es usando el principio de inclusión y exclusión, también llamado principio de la criba ([14]; [5]; [19], págs. 32, 37). Éste es el método usado en los textos de combinatoria (ver por ejemplo [2]).

En este artículo abordaremos el problema de calcular $!n$ usando la noción de recurrencia [18]. Es decir, nuestro método nos llevará a plantear una fórmula recursiva [18], que aparece en muchas referencias (ver, por ejemplo, [5]; [13]; [7], capítulo 2; [19], pág. 37), aunque sin demostración, o sólo con un bosquejo muy breve. Nuestro propósito es demostrarla con todo detalle y luego resolverla. Este enfoque nos parece interesante porque, como veremos, en él usaremos métodos algebraicos para obtener la fórmula y métodos analíticos para resolverla. Veamos cómo es esto.

2. La fórmula recursiva para el número de casos favorables

Antes de empezar con las cuentas, necesitaremos unas pocas definiciones y comentarios muy sencillos, que nos ayudarán a encontrar nuestra fórmula.

Dados k números distintos, la función f del conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ en sí mismo,

$$f(a_1) = a_2,\ f(a_2) = a_3, \ldots,\ f(a_{k-1}) = a_k,\ f(a_k) = a_1,$$

será indicada por medio de lo que llamaremos el ciclo $(a_1 a_2 \ldots a_k)$ ([16], [17]). La longitud de este ciclo es k.

Toda permutación de los números $1, 2, \ldots, n$ puede representarse en términos de ciclos disjuntos, es decir ciclos que no comparten ningún número. Por ejemplo, (1347) (56) (2) representa a la permutación de los números $1, 2, \ldots, 7$,

$$1 \to 3,\ 3 \to 4,\ 4 \to 7,\ 7 \to 1,\ 5 \to 6,\ 6 \to 5,\ 2 \to 2.$$

Observemos que (2) (65) (7134) es también una representación de esta permutación, lo cual muestra que las representaciones en ciclos disjuntos no son únicas.

Si una permutación no tiene puntos fijos, entonces su representación no puede contener ciclos de longitud 1. Siempre que hablemos de representaciones, querremos decir representaciones usando ciclos disjuntos.

Concluímos así con las definiciones que necesitamos y comenzamos a trabajar en el desarrollo de la fórmula recursiva.

Dado $n \geq 3$, sea S_n la familia de las permutaciones de los números $1, 2, \ldots, n$ sin puntos fijos. En otras palabras, S_n es la familia de todos los desarreglos de $1, 2, \ldots, n$, que también podemos pensar como las biyecciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en sí mismo, sin puntos fijos. Nuestra meta es contar los elementos de S_n, es decir hallar el cardinal $|S_n|$ de S_n.

Para cada $j = 2, \ldots, n$ fijo, sea

$$S_{n,j} = \{f \in S_n : f(1) = j\}.$$

Los conjuntos $S_{n,2},\ldots,S_{n,n}$ forman una partición de S_n. Es decir,

$$\begin{aligned} S_n &= \bigcup_{j=2}^{n} S_{n,j}, \\ S_{n,j}\cap S_{n,k} &= \emptyset \text{ para } j,k=2,\ldots,n,\ j\neq k. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|S_n| = \sum_{j=2}^{n} |S_{n,j}| . \tag{1}$$

Lemma 2.1. *Los conjuntos $S_{n,j}$ tienen todos el mismo número de elementos. O sea,*

$$|S_{n,j}| = |S_{n,k}| \text{ para todo } j,k=2,\ldots,n.$$

Demostración. Para probar esta afirmación comencemos por observar que si intercambiamos las posiciones de dos números en una dada representación de cualquier permutación, lo que resulta es una representación de otra permutación. El intercambiar los mismos números otra vez, nos lleva a la representación que teníamos de la permutación inicial. Por ejemplo, (15) (324) representa a la permutación en S_5,

$$1\to 5,\ 5\to 1,\ 3\to 2,\ 2\to 4,\ 4\to 3,$$

mientras que (13) (524) representa a la permutación en S_5,

$$1\to 3,\ 3\to 1,\ 5\to 2,\ 2\to 4,\ 4\to 5.$$

De allí volvemos a (15) (324) intercambiando los números 5 y 3.

Es decir, que la aplicación

$$\alpha_{jk} : S_{n,j} \to S_{n,k}$$

que intercambia los números j y k, cumple

$$\alpha_{jk}\circ\alpha_{kj} = Identidad,$$

sobre $S_{n,j}$. Por lo tanto, $|S_{n,j}| = |S_{n,k}|$ para todo $j,k=2,\ldots,n$. □

Estamos ahora listos para encontrar nuestra fórmula recursiva. En primer lugar, como consecuencia del lema 2.1 y de (1),

$$|S_n| = (n-1)\,|S_{n,2}| . \tag{2}$$

Consideremos el conjunto $S_{n,2}$ y para $k=1,3,4,\ldots,n$ fijo, definamos

$$S_{n,2,k} = \{ f\in S_{n,2} : f(2)=k \} .$$

Los conjuntos $S_{n,2,k}$ forman una partición de $S_{n,2}$. Comencemos por considerar $S_{n,2,1}$. Dada $f\in S_{n,2,1}$,

$$\begin{aligned} f(1) &= 2, \\ f(2) &= 1. \end{aligned}$$

Es decir que una representación de f en términos de ciclos disjuntos incluirá al ciclo (12), de longitud 2. Por lo tanto, la restricción de f al conjunto $\{3, 4, \ldots, n\}$ es un desarreglo de $n - 2$ números. Recíprocamente, todo desarreglo de esos $n - 2$ números puede extenderse a una permutación en $S_{n,2,1}$, imponiendo las condiciones $1 \to 2$, $2 \to 1$. Es decir,

$$|S_{n,2,1}| = |S_{n-2}|. \tag{3}$$

Consideremos ahora al conjunto $S_{n,2,k}$ para $k = 3, 4, \ldots, n$ fijo. Razonando como en el Lema 1, podemos ver que, para $k = 4, \ldots, n$, el intercambiar 3 y k da una biyección entre $S_{n,2,k}$ y $S_{n,2,3}$. Por lo tanto,

$$|S_{n,2,k}| = |S_{n,2,3}|$$

para $k = 4, \ldots, n$. En consecuencia, usando (3),

$$\begin{aligned} |S_{n,2}| &= |S_{n,2,1}| + (n-2)\,|S_{n,2,3}| \\ &= |S_{n-2}| + (n-2)\,|S_{n,2,3}|. \end{aligned} \tag{4}$$

Ahora necesitamos encontrar el cardinal del conjunto $S_{n,2,3}$. Para comenzar, si $f \in S_{n,2,3}$,

$$\begin{aligned} f(1) &= 2, \\ f(2) &= 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la restricción de f al conjunto $\{3, 4, \ldots, n\}$ es una biyección, sin puntos fijos, entre los conjuntos $\{3, 4, \ldots, n\}$ y $\{1, 4, \ldots, n\}$.

El siguiente paso es mirar al conjunto $S_{n-1,2}$. Si g pertenece a este conjunto, sabemos que $g(1) = 2$ y por lo tanto, la restricción de g a $\{2, 3, \ldots, n-1\}$ es una biyección, sin puntos fijos, entre este conjunto y $\{1, 3, \ldots, n-1\}$.

Todo esto nos lleva a la conjetura

$$|S_{n,2,3}| = |S_{n-1,2}|,$$

que probaremos de la siguiente manera:

Dada $f \in S_{n,2,3}$, definimos

$$\widehat{f} : \{1, 2, 4, \ldots, n\} \to \{1, 2, 4, \ldots, n\}$$

como

$$\widehat{f}(i) = \begin{cases} f(3) & \text{si } i = 2 \\ f(i) & \text{si } i \neq 2. \end{cases}$$

Es decir, la aplicación $\widehat{\ }$ elimina al número 3 en cualquier representación de f que estemos usando. Notemos que $\widehat{f}(1) = 2$. Además, $\widehat{f}$ es una permutación, sin puntos fijos, de $\{1, 2, 4, \ldots, n\}$.

Si $f, g \in S_{n,2,3}$ y $f \neq g$, tiene que haber algún $i \in \{3, 4, \ldots, n\}$ para el cual $f(i) \neq g(i)$. De acuerdo con la definición de $\widehat{\ }$ esto implica que $\widehat{f} \neq \widehat{g}$.

Lo que hemos probado hasta ahora es que $\widehat{\ }$ es una biyección entre $S_{n,2,3}$ y su imagen,

$$A = \left\{ \widehat{f} : f \in S_{n,2,3} \right\},$$

y que las funciones en A son desarreglos de $\{1, 2, 4, \ldots, n\}$ que mandan 1 a 2. Afirmamos que A consiste de todos esos desarreglos.

En efecto, dado un desarreglo h de $\{1, 2, 4, \ldots, n\}$ verificando $h(1) = 2$, definimos

$$f : \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$$

como

$$f(i) = \begin{cases} 3 \text{ si } i = 2 \\ h(2) \text{ si } i = 3 \\ h(i) \text{ si } i \neq 2, 3. \end{cases}$$

Así definida, f pertenece a $S_{n,2,3}$ y $\widehat{f} = h$.

Entonces,

$$|A| = |S_{n,2,3}|.$$

Pero como A consiste de todos los desarreglos de $\{1, 2, 4, \ldots, n\}$ que mandan 1 a 2, es claro que

$$|A| = |S_{n-1,2}|.$$

Es decir,

$$|S_{n,2,3}| = |S_{n-1,2}|. \tag{5}$$

Reemplazando (4) en (2),

$$|S_n| = (n-1)|S_{n,2}| = (n-1)(|S_{n-2}| + (n-2)|S_{n,2,3}|).$$

Usando (5),

$$|S_n| = (n-1)(|S_{n-2}| + (n-2)|S_{n-1,2}|). \tag{6}$$

Por otra parte, si usamos (2) con $n-1$ en lugar de n, tendremos la igualdad

$$|S_{n-1,2}| = \frac{|S_{n-1}|}{n-2},$$

que reemplazada en (6), nos da finalmente la formula recursiva que queremos ([7], capítulo 2; [13]):

$$|S_n| = (n-1)(|S_{n-1}| + |S_{n-2}|), \tag{7}$$

para cualquier $n \geq 3$.

Observemos que cuando $n = 1$, el conjunto S_n es vacío, mientras que cuando $n = 2$, el conjunto S_n se reduce a la permutación (12). Es decir,

$$|S_1| = 0, \tag{8}$$
$$|S_2| = 1. \tag{9}$$

Un sistema algebraico computacional, nos dará fácilmente muchos términos de la sucesión $\{|S_n|\}_{n\geq 1}$ ([10], sucesión A000166),

$$0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 14684570, \ldots$$

Aunque es posible resolver (7) por métodos generales ([7], capítulo 2), aquí usaremos un camino distinto, para lo cual comenzaremos obteniendo la fórmula recursiva para la probabilidad, que como veremos, será muy fácil de resolver.

3. La fórmula recursiva para la probabilidad

De la fórmula (7), es inmediato obtener la versión que corresponde a la probabilidad p_n de tener un desarreglo de n números. Sólo tenemos que recordar que

$$p_n = \frac{|S_n|}{n!},$$

de donde

$$p_n = \frac{n-1}{n!}\left[(n-1)!p_{n-1} + (n-2)!p_{n-2}\right].$$

O sea,

$$p_n = \frac{n-1}{n}p_{n-1} + \frac{p_{n-2}}{n}, \tag{10}$$

para cualquier $n \geq 3$.

Usando (8) y (9) obtenemos

$$p_1 = 0, \tag{11}$$

$$p_2 = \frac{1}{2}. \tag{12}$$

4. Resolvamos la fórmula recursiva para $\{p_n\}_{n\geq 1}$

Dada la fórmula recursiva (10) para $n \geq 3$, en lugar de usar los valores (11) y (12) para los dos primeros términos, vamos a suponer que comenzamos con dos números p_1 y p_2, reales o complejos, cualesquiera. Esta suposición no hará los cálculos más difíciles y nos permitirá obtener una fórmula un poquito más general.

El primer paso para resolver la fórmula será el escribir una fórmula recursiva para la diferencia

$$\Delta_n = p_n - p_{n-1}.$$

A partir de (10),

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}}{n} + \frac{p_{n-2}}{n},$$

de donde

$$\Delta_n = -\frac{\Delta_{n-1}}{n},$$

para $n \geq 3$. Así,

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= -\frac{\Delta_2}{3}, \\
\Delta_4 &= -\frac{\Delta_3}{4} = \frac{\Delta_2}{3 \times 4}, \\
\Delta_5 &= -\frac{\Delta_4}{5} = -\frac{\Delta_2}{3 \times 4 \times 5}, \\
&\vdots \\
\Delta_k &= 2\,(-1)^k\,\frac{\Delta_2}{k!},
\end{aligned}$$

para $k \geq 3$. Por lo tanto, dado $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n} \Delta_k &= 2\Delta_2 \sum_{k=3}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \\
&= 2p_2 \sum_{k=3}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - 2p_1 \sum_{k=3}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\sum_{k=3}^{n} \Delta_k = \sum_{k=3}^{n} (p_k - p_{k-1}) = p_n - p_2.$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
p_n &= 2p_2 \left(\sum_{k=3}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{1}{2} \right) - 2p_1 \sum_{k=3}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \\
&= 2p_2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - 2p_1 \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{1}{2} \right), \qquad (13)
\end{aligned}$$

para $n \geq 3$.

La probabilidad p_n de tener un desarreglo de n números, es entonces igual al número racional no negativo

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!},$$

para $n \geq 1$. En la tabla que sigue indicamos aproximaciones numéricas de esta probabilidad, con nueve decimales, para varios valores de n.

n	p_n	n	p_n
1	0	7	0. 367 857 142
2	0. 5	8	0. 367 881 944
3	0. 333 333 333	9	0. 367 879 188
4	0. 375	10	0. 367 879 464
5	0. 366 666 666	11	0. 367 879 439
6	0. 368 055 555	12	0. 367 879 441

Por supuesto, la sucesión $\{p_n\}_{\geq 1}$ tiene límite para $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}.$$

El valor numérico de e^{-1} con nueve decimales exactos es 0.367 879 441, que ya es igual a la aproximación de p_{12} dada. Es decir, no tenemos que acercarnos mucho a ∞ para obtener excelentes aproximaciones del límite.

Más aún, en el valor numérico de la probabilidad p_n, los primeros nueve decimales se mantienen igual a 0.367 879 441 para todo $n \geq 12$.

Observemos que debido al factor $(-1)^k$, las probabilidades p_n oscilan alrededor del límite, con $p_{2k-1} < p_{2k}$ para todo $k \geq 1$.

Puesto que $|S_n| = n! p_n$, de (13) obtenemos

$$|S_n| = n! \left[|S_2| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - 2\,|S_1| \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{1}{2} \right) \right].$$

Si tomamos $|S_1| = 0$ y $|S_2| = 1$, el número de casos favorables está dado por la fórmula

$$\begin{aligned} |S_n| &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (k+1)(k+2)\cdots n + (-1)^n, \end{aligned} \tag{14}$$

para $n \geq 1$, que da una relación interesante entre $!n$ y $n!$.

Con esto completamos la tarea que nos propusimos realizar, que fue el resolver el problema de las esposas y las llaves. Para terminar con el artículo, aún querríamos hacer unas pocas observaciones, que creemos interesantes y que reunimos en una última sección.

5. Comentarios finales

La representación de permutaciones usando ciclos disjuntos es muy eficaz. Para verlo, usemos el ejemplo dado en el lema 2.1. Allí observamos que si en la permutación $(15)(324)$ intercambiamos los números 5 y 3, obtendremos la permutación $(13)(524)$. Esta misma afirmación se torna complicada si queremos escribirla en la notación tradicional. En efecto, la primera permutación será la función, digamos f,

$$f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

definida como

$$f(1) = 5,\ f(2) = 4,\ f(3) = 2,\ f(4) = 3,\ f(5) = 1.$$

La segunda permutación será la función, digamos g,

$$g : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

que cumple

$$g(1) = 3,\ g(2) = 4,\ g(3) = 1,\ g(4) = 5,\ g(5) = 2.$$

Además de que se necesitan muchos más símbolos para describir las permutaciones, en la notación tradicional no es obvio el reconocer qué operación nos llevó de f a g.

Estas representaciones en ciclos disjuntos se usan, por ejemplo, para definir una estructura de grupo en los conjuntos de permutaciones [12].

Las permutaciones de n números se corresponden en forma biyectiva con las matrices $n \times n$ que tienen exactamente un uno en cada fila y en cada columna, en tanto que todos los otros elementos son cero. Por lo tanto, hay $n!$ matrices de esa forma. El conjunto S_n de las permutaciones sin puntos fijos, se corresponde biyectivamente con el conjunto M_n de las matrices que, además, tienen ceros a todo lo largo de la diagonal. Es decir, que usando (14) tendremos,

$$|M_n| = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (k+1)(k+2) \cdots n + (-1)^n .$$

Esta observación nos lleva a preguntarnos si no hubiéramos podido resolver nuestro problema directamente, contando matrices, sin tener que invocar a una fórmula recursiva. La dificultad de tal enfoque es que caemos en sucesos que no son independientes. En efecto, si consideramos una matriz en M_n, sabemos por seguro que tendrá ceros en todas las posiciones diagonales. Si miramos dónde podemos poner el uno en la primera columna, tenemos $n-1$ posibilidades. Digamos que lo ponemos inmediatamente debajo del cero. Esto significa que la segunda fila queda completamente determinada, mientras que en la primera fila hay $(n-1)$ maneras de poner el uno. Por supuesto, cada una de esas $(n-1)$ maneras determinará una de las $(n-1)$ columnas restantes y así siguiendo.

Finalmente, recordemos que $|S_n|$ es el subfactorial, $!n$. Es interesante observar que la fórmula recursiva (7), que define el subfactorial $!n$, también define al factorial, $n!$, si imponemos otras condiciones iniciales.

En efecto, si definimos la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ por medio de las condiciones

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 = 1, \\ a_n &= (n-1)\left(a_{n-1} + a_{n-2}\right), \text{ para } n \geq 2, \end{aligned}$$

entonces

$$a_n = n!.$$

Esta afirmación se puede probar fácilmente usando el principio de inducción. Si fijamos $n \geq 1$ y suponemos que $a_j = 1 \times 2 \times \cdots \times j$, para $0 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= n\left(a_n + a_{n-1}\right) = n\left[n! + (n-1)!\right] \\ &= n\,(n-1)!\,(n+1) = (n+1)!. \end{aligned}$$

Por otra parte, puede comprobarse fácilmente substituyendo (14), que $!n$ también satisface la fórmula recursiva ([19], pág. 37)

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_n &= n a_{n-1} + (-1)^n, \, n \geq 2. \end{aligned}$$

En las referencias ([1]; [2]; [4], sección 4.2; [8]), se puede ver mucho más material sobre permutaciones, desarreglos y temas relacionados a éstos.

Reconocimientos: Los datos biográficos que aparecen en este artículo, han sido tomados de [9].

Bibliografía

[1] J. Baez, «Let Us Get Deranged!», 14 de diciembre de 2003, http://math.ucr.edu/home/baez/qg-winter2004/derangement.pdf.

[2] M. Bona, *Combinatorics Of Permutations*, 2.ª ed., Taylor & Francis, 2012.

[3] Cinemagnificus, «`http://cinemagnificus.blogspot.com/search?q=la+tormenta+de+hielo`».

[4] L. Comtet, *Advanced Combinatorics: The Art Of Finite And Infinite Expansions*, Riedel, 1974.

[5] R. Day, «Derangements (Mat 305: Combinatorics Topics For K-8 Teachers)», http://math.illinoisstate.edu/day/courses/old/305/contentderangements.html.

[6] P. R. de Montmort, *Essai D'analyse Sur Les Jeux De Hasard*, Chelsea, 1980, Paris 1708. Segunda edición publicada entre 1713 y 1714, Tercera edición reimpresa en New York.

[7] J. L. Gross, «Course Material», http://www.cs.columbia.edu/~cs4205/course material.html.

[8] M. Hassani, «Derangements and Applications», *Journal Of Integer Sequences*, vol. 6, núm. 1, 2003, , https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/vol6.html.

[9] J. J. O'Connor y E. F. Robertson, «The MacTutor History Of Mathematics», http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html.
[10] OEIS Foundation Inc., «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences», http://oeis.org/wiki/Number_of_derangements.
[11] A. Sangalli, *Pythagoras' Revenge – A Mathematical Mystery*, Princeton University Press, 2009.
[12] E. A. Walker, *Introduction To Abstract Algebra*, Random House, 1987.
[13] Wikipedia, «http://en.wikipedia.org/wiki/derangement».
[14] ———, «http://en.wikipedia.org/wiki/inclusion_exclusion_principle».
[15] ———, «http://en.wikipedia.org/wiki/pairing».
[16] ———, «http://en.wikipedia.org/wiki/permutation».
[17] ———, «http://en.wikipedia.org/wiki/permutation#cycle_notation».
[18] ———, «http://en.wikipedia.org/wiki/recurrence_relation».
[19] R. M. Young, *Excursions In Calculus: An Interplay Of The Continuous And The Discret*, The Mathematical Association of America, 1992.