Miscelánea Matemática **59** (2014) 77-89 SMM

Integral gaussiana y función error para todos

J. Cruz Sampedro
Departamento de Ciencias Básicas,
UAM-A,
jacs@correo.azc.uam.mx

M. Tetlalmatzi Montiel
Área Académica de Matemáticas y Física
UAEH,
tmontiel@uaeh.edu.mx

Resumen

Un mito que dificulta la disipación de dudas importantes en el aprendizaje del cálculo es la opinión generalizada que para evaluar la *integral gaussiana* es necesario utilizar métodos de cálculo avanzado. Para refutar esta falacia, en este trabajo presentamos tres maneras sencillas de obtener el valor de esta integral con cálculo de una variable. La primera es intuitiva y provee al mismo tiempo la convergencia y el valor de la integral. La segunda es similar a la anterior pero supone la convergencia. La tercera es concisa aunque no es intuitiva ni tan elemental. Para mostrar un panorama completo del tema, también demostramos que dentro de cierta clase natural de funciones la *función error* no se puede calcular; luego combinamos este resultado con un teorema clásico de Liouville para demostrar que esta función no es elemental.

A mathematician is one to whom
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$
is as obvious as that twice
two makes four is to you.

Liouville was a mathematician[1]

Lord Kelvin (1824-1907)

1. Introducción

La vida esta llena de mitos y la matemática no es la excepción. Mitos como el ¡eureka! de Arquímedes, la trágica versión de la vida de E. Galois o la supuesta ubicuidad de la razón áurea en la naturaleza y el arte motivan y hacen fascinante el estudio de esta ciencia, pero hay otros que lo obstaculizan. Tal es el caso del mito que asegura que para evaluar la *integral gaussiana*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{1}$$

se requieren métodos de cálculo avanzado. Frecuentemente esta forma de «conocimiento común» confunde a los alumnos que se empeñan en saber cómo se evalúa esta integral y en entender por qué la *función error*

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx, \tag{2}$$

«no se puede calcular». Es grato saber que estas integrales cautivan el interés de los estudiantes por la notable relación que la primera establece entre e y π y porque es sorprendente que (1) se puede calcular exactamente pero (2) no; pero es lamentable que ese interés se pierde cuando todos les advierten que los métodos para aclarar esas dudas quedan fuera de su alcance. Para derrumbar este mito, en este artículo presentamos tres maneras sencillas de evaluar (1) con técnicas de cálculo de una variable:

- La primera es intuitiva y provee simultáneamente la convergencia y el valor de (1); está basada en los métodos para el cálculo de volúmenes que pueden verse en textos comunes de cálculo de una variable para estudiantes de ciencias o ingeniería tales como [13] y [16].
- La segunda es similar a la primera pero supone la convergencia de la integral [4, 9]. Esta forma de evaluar (1) la descubrimos al indagar si el primer método ya era conocido y nos parece muy extraño que haya permanecido ignorada durante más de medio siglo.

[1] Ver [14, p. 74] Traducción libre de los autores): «Un matemático es alguien para quien $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ es tan obvio como para usted que dos más dos son cuatro. Liouville era un matemático.»

- La tercera es muy concisa, aunque no es intuitiva y usa de manera crucial el concepto de convergencia uniforme, que no necesariamente es conocido por todos los estudiantes de cálculo. Una propuesta relacionada está esbozada en [1].

Por supuesto, hay libros de texto que presentan maneras de obtener (1) con cálculo de una variable pero estas son tan intrincadas que los mismos autores previenen a sus lectores que para entenderlas se requiere de una buena cantidad de trabajo (ver p. ej. [15, pp. 391–392]).

Un corolario interesante es que la fórmula para los momentos pares de la gaussiana,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = (2n-1)!!\sqrt{\pi}/2^n, \tag{3}$$

también se puede obtener de manera sencilla con cálculo de una variable. Recordemos que por definición $0!! = (-1)!! = 1$ y $n!! = n(n-2)!!$ para $n \geq 1$.

Para entender por qué la función error no se puede calcular demostramos que no existe una función racional R tal que

$$\text{erf}\,(t) = R(t)\; e^{-t^2} + C,$$

donde C es una constante. Este resultado es bien conocido pero nuestro método para obtenerlo es sencillo y novedoso y solamente usa técnicas de cálculo elemental al nivel de [16]. Finalmente combinamos este hecho con un teorema de Liouville [11] —que no es en modo alguno elemental— para demostrar que es imposible expresar erf (t) en términos de funciones elementales; es decir, de funciones que se pueden obtener mediante un número finito de operaciones de suma, resta, multiplicación, división y composición a partir de funciones racionales, trigonométricas y sus inversas, logaritmos y exponenciales. Es pertinente apuntar que la función error debe su nombre al hecho de que originalmente se le utilizó para estudiar la distribución de errores en procesos de medición.

Nuestra búsqueda de argumentos accesibles para entender la integral gaussiana y la función error está motivada por preguntas naturales de los estudiantes y alentada por la importancia de estas integrales en muchas ramas del conocimiento. No podemos dejar de mencionar que tanto la integral gaussiana como la función error están íntimamente relacionadas con la distribución normal y que esta distribución juega un papel central en la teoría de probabilidad, en la estadística, en la teoría de errores, en la teoría de conducción del calor, en la teoría del riesgo de finanzas y seguros, y en muchas otras ramas de la matemática, de la física y de las ciencias sociales.

2. Integral de Gauss para todos

En esta sección presentamos tres maneras de evaluar la integral de Gauss en las que solamente utilizamos métodos de cálculo diferencial e integral de una variable.

2.1 Primer método

A continuación evaluamos la integral gaussiana utilizando dos técnicas básicas del cálculo de volúmenes que se pueden ver por ejemplo en [13, 16]: *el método de cascarones cilíndricos y el método de secciones transversales.*

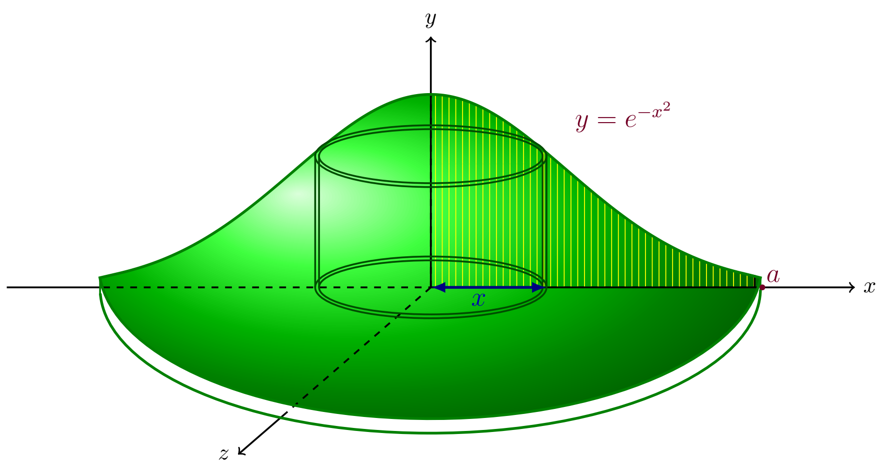

Figura 1. El sólido de revolución $G(a)$.

Para $a > 0$, consideremos el sólido de revolución $G(a)$ que se obtiene al rotar alrededor del eje y la región sombreada del plano xy, en la figura 1, definida por

$$\{(x, y) : 0 \leq y \leq e^{-x^2}, x \in [0, a]\}.$$

Si calculamos el volumen de este sólido de revolución con el método de cascarones cilíndricos (ver [16, p. 319]), encontramos que

$$\text{vol}\ (G(a)) = \int_0^a 2\pi x e^{-x^2} dx = \pi \left[-e^{-x^2}\right]_0^a = \pi \left(1 - e^{-a^2}\right). \qquad (4)$$

Enseguida fijamos $t > 0$ y notamos en la figura 2 que si $Q(t)$ es la parte de $G\left(\sqrt{2}\ t\right)$ que yace sobre el cuadrado $[0, t] \times [0, t]$ del plano xz, entonces

$$\frac{1}{4}\ \text{vol}\ \ (G(t)) \leq \text{vol}\ (Q(t)) \leq \frac{1}{4}\ \text{vol}\ \left(G(\sqrt{2}\ t)\right),$$

que en virtud de (4) es equivalente a

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-t^2}\right) \leq \text{vol } (Q(t)) \leq \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2t^2}\right). \tag{5}$$

Ahora definimos $F(t)=\int_0^t e^{-x^2}dx$ y demostramos que

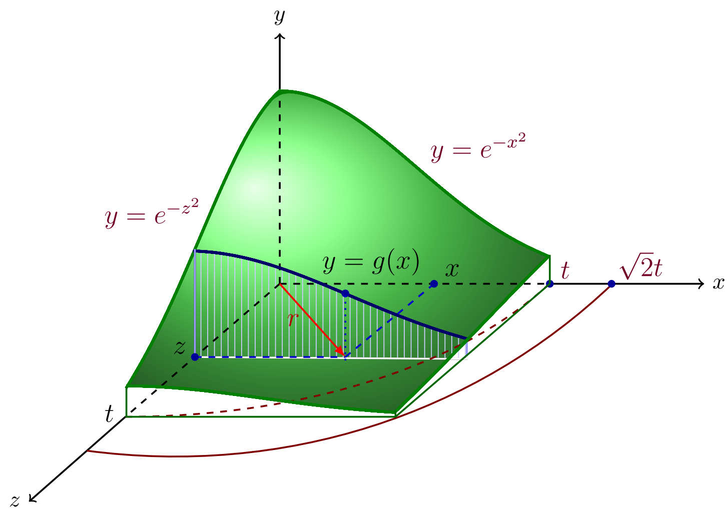

Figura 2. Secciones transversales de $Q(t)$ paralelas al plano xy.

$$\text{vol } (Q(t)) = (F(t))^2. \tag{6}$$

Por el método de secciones transversales (ver [16, p. 309]) se tiene que

$$\text{vol } (Q(t)) = \int_0^t A(z)dz.$$

En la figura 2, para cada z fija en $[0,t]$ del eje z, $A(z)$ es el área de la sección transversal de $Q(t)$ y es igual al área debajo de $y=g(x)$ sobre $[0,t]$. Es importante notar que $r^2=x^2+z^2$ y que por ser $Q(t)$ parte del sólido de revolución $G\left(\sqrt{2}\ t\right)$ se tiene

$$g(x)=e^{-r^2}=e^{-x^2-z^2}=e^{-x^2}e^{-z^2}. \tag{7}$$

Por lo tanto

$$A(z)=\int_0^t g(x)dx = e^{-z^2}\int_0^t e^{-x^2}dx = e^{-z^2}F(t).$$

Luego,

$$\text{vol } (Q(t)) = \int_0^t A(z)dz = \int_0^t e^{-z^2}F(t)dz = F(t)\int_0^t e^{-z^2}dz = (F(t))^2.$$

Esto demuestra (6) y al combinar esta identidad con (5) obtenemos

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-t^2}\right) \leq (F(t))^2 \leq \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2t^2}\right). \tag{8}$$

Finalmente, por el teorema de la compresión o del sándwich (ver por ejemplo [16, p. 53]), al hacer que t tienda a infinito se concluye que

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{t\to\infty} F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

y por lo tanto la integral gaussiana converge al valor dado en (1).

Es pertinente notar que

1. La idea esencial de nuestra deducción es establecer la desigualdad (8), que coincide con la que se obtiene con integrales múltiples.
2. Nuestra deducción de (8) es paralela a la del cálculo multivariable pero: (a) en vez de un cambio de variables a coordenadas polares calculamos el volumen de un sólido de revolución; y (b) en vez de usar el teorema de Fubini usamos el método de secciones transversales.

2.2 Segundo método

En el cálculo que presentamos a continuación suponemos que la integral gaussiana es convergente. La convergencia se puede establecer con el método de comparación [16]. Con este supuesto, la evaluación de esta integral se reduce a calcular de dos maneras distintas el volumen del sólido G que se obtiene al rotar alrededor del eje y la región del plano xy definida por

$$\{(x, y) : 0 \le y \le e^{-x^2}, x \in [0, \infty)\}.$$

Por el método de cascarones cilíndricos tenemos

$$\text{vol } (G) = \int_0^\infty 2\pi x e^{-x^2} dx = \pi \left[-e^{-x^2}\right]_0^\infty = \pi. \tag{9}$$

Por otra parte, si $g(x)$ es como en (7) con $x \in [0, \infty)$ y escribimos

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = I,$$

que por hipótesis es convergente, entonces

$$A(z) = \int_0^\infty g(x) dx = \int_0^\infty e^{-z^2} e^{-x^2} dx = I e^{-z^2}.$$

Por el método de secciones transversales

$$\text{vol } (G) = 4 \int_0^\infty A(z) dz = 4 \int_0^\infty I e^{-z^2} dz = 4I^2.$$

Al reemplazar este valor de vol (G) en (9) se deduce que

$$I = \sqrt{\pi}/2.$$

Este cálculo se puede ver en [9] y por razones inexplicables permaneció inadvertido durante más de medio siglo. En 2003 fue rescatado por [4], pero profesores y autores de libros de cálculo lo siguen pasando por alto y continúan repitiendo el tradicional mito [16] o de plano siguen ignorando la evaluación de esta importante integral.

2.3 Tercer método

Ahora presentamos un método bastante breve para evaluar la integral gaussiana que no es muy intuitivo ni realmente elemental. Todo surge de preguntar por la tasa de crecimiento de la función $(F(t))^2$, que juega un papel central en el primer método.

Por el teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2 &= 2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}dx \\ (x=ts) \qquad &= \int_0^1 2te^{-(1+s^2)t^2}ds \\ &= \frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{-e^{-(1+s^2)t^2}}{1+s^2}ds. \end{aligned}$$

Integrando obtenemos

$$\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2 = -\int_0^1 \frac{e^{-(1+s^2)t^2}}{1+s^2}ds + C$$

y si $t=0$ se obtiene $C = \int_0^1 \frac{ds}{1+s^2} = \pi/4$. Por lo tanto

$$\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{e^{-(1+s^2)t^2}}{1+s^2}ds. \tag{10}$$

Al hacer que t tienda a infinito la integral del lado derecho de (10) tiende a cero debido a que su integrando converge a cero uniformemente. De esta manera se sigue que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Es conveniente señalar que

1. En el cálculo anterior, no es necesario usar convergencia uniforme para hacer que la integral del lado derecho de (10) tienda a cero ya que, por la desigualdad $e^{-(1+s^2)t^2} \leq e^{-t^2}$, esta integral está acotada por $e^{-t^2}\pi/4$. Sin embargo, de manera menos evidente, el concepto de convergencia uniforme sí se requiere cuando se calcula la derivada de esa integral.
2. Una propuesta relacionada con esta manera de calcular la integral gaussiana se puede ver en [1].

2.4 Integrales afines a la gaussiana

A continuación consideramos la familia de integrales

$$\int_0^\infty x^k e^{-x^2} dx, \tag{11}$$

en donde k es un entero no negativo. Estas integrales son afines a la integral gaussiana y es natural preguntarse si también se pueden calcular de manera sencilla utilizando únicamente cálculo de una variable. Enseguida usamos integración por partes para establecer una fórmula de recurrencia que reduce el cálculo de estas integrales a los casos $k = 0, 1$. El caso $k = 1$ es muy sencillo y el caso $k = 0$ es la integral gaussiana que ya calculamos. De esta manera demostraremos que

$$\int_0^\infty x^k e^{-x^2} dx = \begin{cases} (2n-1)!!\sqrt{\pi}/2^{n+1}, & \text{si } k = 2n, \\ \\ n!/2, & \text{si } k = 2n+1. \end{cases} \tag{12}$$

Al hacer $k = 2n$ y usar la paridad de la función $x^{2n}e^{-x^2}$ se obtiene (3).

Para $k \geq 2$ escribamos

$$F_k(t) = \int_0^t x^k e^{-x^2} dx.$$

Integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned} F_k(t) &= \int_0^t x^k e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{t^{k-1}}{2} e^{-t^2} + \frac{k-1}{2} \int_0^t x^{k-2} e^{-x^2} dx \\ &= \frac{k-1}{2} F_{k-2}(t) - \frac{t^{k-1}}{2} e^{-t^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Un cálculo sencillo, usando el método de comparación [16], muestra que

$$\int_0^\infty x^k e^{-x^2} dx$$

es convergente. Al definir $D_k = \int_0^\infty x^k e^{-x^2} dx$ y pasar al límite cuando $t \to \infty$ en (13) se obtiene

$$D_k = \frac{k-1}{2} D_{k-2}.$$

Si $k = 2n$, utilizando reiteradamente esta última relación obtenemos

$$D_{2n} = \frac{2n-1}{2} D_{2n-2} = \cdots = \frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} D_0 = \frac{(2n-1)!!}{2^n} D_0,$$

que equivale a la primera parte de (12) puesto que $D_0 = \sqrt{\pi}/2$.

Si $k = 2n + 1$ procedemos análogamente y obtenemos

$$D_{2n+1} = \frac{2n}{2} D_{2n-1} = \cdots = \frac{2n}{2} \frac{2n-2}{2} \cdots \frac{2}{2} D_1 = n! D_1,$$

y por lo tanto conseguimos la segunda parte de (12) ya que

$$D_1 = \int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}.$$

3. La función error «no se puede calcular»

Otra pregunta que suele estimular la curiosidad de los estudiantes de cálculo es ¿por qué la integral

$$F_0(t) = \int_0^t e^{-x^2} dx$$

«no se puede calcular»? Esta pregunta nos remonta hasta la época de dos de los principales creadores del cálculo: Newton permitía el uso de series infinitas en la integración de funciones pero Leibnitz no [5]. Si procedemos a la Newton y aceptamos la representación

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

de e^{-x^2}, entonces integrando término a término obtenemos

$$\int_0^t e^{-x^2} dx = t - \frac{t^3}{1!\,3} + \frac{t^5}{2!5} - \frac{t^7}{3!7} + \cdots .$$

Pero probablemente influidos por Leibniz, por la desconfianza en el infinito, por nuestra experiencia con otras integrales, o simplemente por mera preferencia personal, muchas veces optamos por buscar representaciones de $F_0(t)$ o, más generalmente, de $F_{2n}(t)$ que por alguna razón nos parecen más naturales. Por ejemplo, se sigue de (13) y

$$F_1(t) = \int_0^t x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t^2}$$

que hay un polinomio $Q(t)$ y una constante C tal que

$$F_{2n+1}(t) = Q(t)\ e^{-t^2} + C.$$

Luego, es natural esperar que $F_{2n}(t)$ también se pueda expresar en la forma

$$F_{2n}(t) = P(t)\ e^{-t^2} + C,$$

en donde $P(t)$ es una función polinomial y C una constante; sin embargo, el siguiente teorema nos muestra que esta pretensión es imposible.

Teorema 3.1. *Si $n \geq 0$ es un entero, entonces no existe una función racional R tal que*

$$F_{2n}(t) = \int_0^t x^{2n} e^{-x^2} dx = R(t)\ e^{-t^2} + C. \tag{14}$$

Demostración. Supongamos que existe una función racional R de manera que (14) se satisface. Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que $F'_{2n}(t) = t^{2n} e^{-t^2}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{-t}^t x^{2n} e^{-x^2} dx &= F_{2n}(t) - F_{2n}(-t) \\ &= R(t)\ e^{-t^2} - R(-t)\ e^{-t^2}. \end{aligned} \tag{15}$$

Como F_{2n} es derivable R es continua y en consecuencia el denominador de R no se anula. Si el grado del numerador es r, un cálculo sencillo muestra que existe una constante K tal que para $|t| \geq 1$ se cumple

$$|R(t)e^{-t^2}| \leq K|t|^r e^{-t^2} \leq K|t|^r e^{-|t|}.$$

Utilizando esta última desigualdad y la regla de L'Hôpital se verifica que

$$\lim_{t\to\infty} R(t)e^{-t^2} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to-\infty} R(-t)e^{-t^2} = 0.$$

Combinando esto último con (15) se deduce que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = 0,$$

lo cual es imposible (ver por ejemplo (12)). Luego, no existe una función racional R tal que (14) se satisface. □

Este resultado demuestra que si $n \geq 0$ es un entero y $\mathcal{R}$ denota al conjunto de funciones racionales, entonces es imposible calcular la integral (14) si demandamos que, a excepción de una constante aditiva, el resultado pertenezca a la clase de funciones

$$e^{-t^2}\mathcal{R} =: \{R(t)e^{-t^2} : R(t) \text{ es una función racional }\}.$$

El teorema 3.1 es bien conocido pero, hasta donde sabemos, la estrategia de estudiar el comportamiento asintótico de las funciones relevantes para demostrarlo no está en la literatura y tiene las siguientes ventajas:

1. Utiliza únicamente las herramientas básicas del cálculo de una variable al nivel de [16] y no requiere familiaridad con la teoría de polinomios, como por ejemplo en [7, 8, 11].
2. Se puede utilizar para establecer resultados análogos al teorema precedente para otras integrales importantes.

4. Un teorema de Liouville

Entender en toda su generalidad la pregunta ¿por qué la integral (2) «no se puede calcular»? es un problema muy complejo. Tal vez por esta razón los textos de cálculo integral que la mencionan se limitan a decir que «*no existe una función elemental* F *tal que* $F'(x) = e^{-x^2}$ *para todo* x» y que «*existe un teorema (difícil) que dice que una tal función no existe*» (ver p. ej. [15, p. 359]). A pesar de lo anterior, a continuación enunciamos un caso especial de uno de los teoremas clásicos de Liouville [7, 8, 12] que está íntimamente relacionado con los resultados obtenidos en la sección anterior.

Teorema 4.1. *Supongamos que* f *y* g *son funciones racionales tales que* g *no es constante y que* $\int f(x)e^{g(x)}dx$ *es una función elemental, entonces existe una función racional* R *tal que*

$$\int f(x)e^{g(x)}dx = R(x)e^{g(x)}.$$

La demostración de este teorema está fuera del alcance de este trabajo pero el lector interesado puede consultarla en [11, 12].

Muchos matemáticos del siglo XIX intentaron descubrir métodos para calcular integrales en términos de series finitas, pero fue Liouville quien desarrolló una teoría de integración que resolvió el problema en muchos casos importantes y motivó extraordinarios desarrollos acerca de este problema en el siglo XX [10, 12]. Por su naturaleza algorítmica, en la época actual este tipo de problemas ha cobrado gran interés en las ciencias de la computación [2].

Para entender el enunciado del teorema 4.1 es necesario explicar un poco el significado del término *función elemental.* Diremos que una función de una variable es elemental, si se puede obtener mediante un número finito de operaciones que involucren sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, composiciones, potencias, raíces, funciones trigonométricas y sus inversas, exponenciales y logaritmos. Por ejemplo, las siguientes funciones son elementales:

$$y = x^2 \operatorname{sen} x, \quad y = \ln(\arccos x),$$

$$y = \tan\left(\frac{x^\pi - x^x}{x^2 - \sqrt[5]{x^3 - \ln(\tanh x)}}\right)^{\cos x}.$$

No es difícil convencerse que la derivada de una función elemental es también una función elemental; sin embargo, como lo muestra el siguiente teorema, la integral de una función elemental no necesariamente es elemental.

Teorema 4.2. *Si $n \geq 0$ es un entero entonces*

$$F_{2n}(t) = \int_0^t x^{2n} e^{-x^2} dx$$

no es una función elemental.

Demostración. Si $F_{2n}(t)$ fuera elemental, entonces por el teorema 4.1 debería existir una función racional $R(t)$ tal que $F_{2n}(t) = R(t)e^{-t^2} + C$. Pero por el teorema 3.1 sabemos que esto no es posible. □

Al hacer $n = 0$ se sigue de este resultado que la función

$$\text{erf}\,(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx$$

no se puede expresar en términos de funciones elementales, por eso sorprende que

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = 1.$$

El teorema 4.2 confirma que el afán por expresar la integral indefinida de una función elemental en términos de funciones elementales genera un problema no trivial ya que, en general, dada una función elemental no hay manera de saber si es posible encontrar una antiderivada elemental o no. Tal vez por esta razón, a menudo nos parece que es mucho más interesante calcular integrales que calcular derivadas.

Resultados como los discutidos en esta sección ayudan a resolver este problema en muchos casos pero están muy lejos de darnos una respuesta completa. En general, la colección de integrales que son elementales es insignificante respecto a la clase de integrales que no lo son. El lector interesado puede ver en [3] una discusión detallada del problema de integración en términos finitos para la clase de integrales consideradas por el teorema 4.1.

4.1 Para concluir

Evaluar la integral gaussiana $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ no es una tarea sencilla porque $\int_0^t e^{-x^2} dx$ no es elemental. Sin embargo, los métodos que presentamos en este trabajo muestran que no es necesario estar versado en cálculo avanzado para entender como evaluarla. Hay muchas otras maneras de evaluar la integral gaussiana y el lector interesado puede ver algunas muy elegantes en [6]. No obstante, nos parece que sería más interesante que el lector tratara de encontrar su propia manera sencilla de obtener esta integral, o alguna integral definida de su predilección. Buscar maneras sencillas de evaluar una integral definida es bastante divertido; incluso si la integral posee antiderivada elemental, como por ejemplo $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2015}} = \frac{\pi/2015}{\text{sen}(\pi/2015)}$.

Agradecimientos. Uno de los autores, J. Cruz Sampedro, agradece los valiosos comentarios del Profesor Salvador Arellano Balderas del Departamento de Ciencias Básicas de la UAM-A.

Bibliografía

[1] «http://www.akalin.cx/elementary−gaussian−proof».
[2] M. Bronstein, *Symbolic integration i: Transcendental functions*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
[3] J. Cruz-Sampedro y M. Tetlalmatzi-Montiel, «Hardy's reduction for a class of liouville integrals of elementary functions», Sometido a *The American Mathematical Monthly.*
[4] A. Delgado, «A calculation of $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$», *The College Mathematics Journal*, vol. 3, núm. 4, 2003, 321–323.
[5] J. Edwards, *The historical develpoment of calculus*, Spriner Verlag, New York, 1979.
[6] H. Iwasawa, «Gaussian integral puzzle», *The Mathematical Intelligencer*, vol. 31, núm. 3, 2009, 38–41.
[7] E. A. Marchisotto y G. Zakery, «An invitation to integration in finite terms», *The College Mathematics Journal*, vol. 25, núm. 4, Sep. 1994, 295–308.
[8] D. G. Mead, «Integration», *The American Mathematical Monthly*, vol. 68, 1961, 152–156.
[9] C. P. Nicholas y R. C. Yates, «The probability integral», *The American Mathematical Monthly*, June 1950, 412–413.
[10] R. H. Risch, «The problem of integration in finite terms», *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 76, 1967, 167–189.
[11] J. F. Ritt, *Integration in finite terms: Liouville theory of elementary methods*, Columbia University Press, New York, 1948.
[12] M. Rosenlicht, «Integration in finite terms», *The American Mathematical Monthly*, vol. 79, núm. 9, 1972, 963–972.
[13] G. Salas y E. Hille, *Caculus*, 4.ª ed., vol. 1, Reverté, 2005.
[14] M. Spivak, *Calculus on manifolds*, Addison-Wesley, Cambridge Massachusetts, 1965.
[15] ———, *Calculus*, 3.ª ed., Publish or Perish, 1994.
[16] G. Thomas, *Cálculo, una variable*, 12.ª ed., Pearson, 2010.