Miscelánea Matemática **68** (2019) 59-67 SMM

Dos caracterizaciones de la función límite en el espacio de sucesiones reales convergentes

Fernando Galaz-Fontes
Centro de Investigación en Matemáticas
galaz@cimat.mx

Introducción

Una *sucesión* en un conjunto no-vacío A es simplemente una función $s : \mathbb{N} \to A$. Se dice entonces que su *n-ésimo término* es $s(n) \in A$. Es usual identificar una sucesión con sus valores y así considerarla como un conjunto de la forma $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$. En este caso la función s es la definida por $s(n) := a_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. A lo largo de este trabajo nos referiremos a una sucesión en cualquiera de las dos formas anteriores. Si $A = \mathbb{R}$ diremos que la sucesión en cuestión es una *sucesión real*. El conjunto formado por todas las sucesiones reales se denotará por $S(\mathbb{R})$

Un logro trascendental en el desarrollo de las matemáticas fue el darse cuenta que muchos conjuntos que aparecen naturalmente en la actividad matemática se pueden dotar de operaciones algebraicas con propiedades formales parecidas a las que conocemos de las operaciones correspondientes de números reales. Así, procediendo puntualmente, en $S(\mathbb{R})$ introducimos las operaciones algebraicas de suma y producto por un número real a.

Definición 0.1. Si $s, t \in S(\mathbb{R})$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$(s+t)(n) := s(n) + t(n), \;\; (as)(n) := as(n), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Se cumple entonces la siguiente propiedad elemental.

Teorema 0.1. *Con las operaciones anteriores, el conjunto de sucesiones reales $S(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial.*

Recordemos ahora la definición de límite de una sucesión real.

Palabras clave: Sucesiones convergentes, funcional límite, positividad.

Definición 0.2. Una sucesión de números reales s es *convergente*, si existe un número real ℓ tal que para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que

$$|\ell - s(n)| \leq \epsilon, \ \forall\, n \geq N.$$

Como sabemos, cuando existe, tal ℓ es único y lo llamamos *límite* de la sucesión s. En adelante lo indicaremos simplemente por $\operatorname{lím} s$.

Denotemos por c el conjunto formado por todas las sucesiones reales que son convergentes y para cada sucesión $s \in c$ definamos $L(s)$ como su límite, esto es,

$$L(s) := \operatorname{lím} s, \ \forall\, s \in c.$$

En adelante para indicar que una función (definida usualmente en un espacio vectorial) solo toma valores reales la llamaremos *funcional*. Podemos decir entonces que nuestro interés es encontrar propiedades para L que lo distingan de todos los demás funcionales definidos en c.

1. Funcional lineal

Dos propiedades conocidas del concepto de límite ([2, cap. 3]) son:

i) Si s y $t \in c$, entonces $s + t \in c$ y $\operatorname{lím}(s + t) = \operatorname{lím} s + \operatorname{lím} t$.

ii) $a \in \mathbb{R}$ y $s \in c$, entonces $as \in c$ y $\operatorname{lím}(as) = a \operatorname{lím} s$.

Estas propiedades corresponden al siguiente resultado.

Teorema 1.1. *El conjunto de sucesiones reales convergentes c es un espacio vectorial y el funcional límite $L : c \to \mathbb{R}$ es lineal.*

Ejemplo 1.1. Es justificado considerar que las sucesiones reales más sencillas son las constantes, esto es, aquellas sucesiones s para las cuales existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$s(n) = b \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Entre las sucesiones constantes la sucesión e definida por

$$e(n) = 1, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

desempeñará un papel relevante en nuestro desarrollo. Claramente c incluye a todas las sucesiones constantes y $L(e) = 1$.

La linealidad del funcional L nos lleva a considerar su núcleo

$$\{s \in c : L(s) = 0\}.$$

Como podemos apreciar, el núcleo de L consiste de las sucesiones que convergen a 0. Denotaremos a este conjunto por c_0. Siendo el núcleo de un funcional lineal, c_0 es un subespacio vectorial de c.

A continuación expresaremos c mediante c_0. Recordemos antes que si V es un espacio vectorial y $A, B \subseteq V$, se define

$$A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$

Lema 1.1. *$c = c_0+ < e >$, siendo $< e >= \{ae : a \in \mathbb{R}\}$ el espacio vectorial generado por la sucesión e.*

Demostración. Claramente $c_0+ <e>\subseteq c$. Para establecer la otra contención tomemos $s \in c$ y definamos $a = \text{lím}\, s$. Usando la linealidad de L resulta que $s_0 = s - ae \in c_0$. Luego, $s = s_0 + ae \in c_0 + <e>$. $\square$

Consideremos ahora un funcional lineal arbitrario $\varphi : c \to \mathbb{R}$. La descomposición de c expresada en el lema anterior junto con la linealidad de L permiten concluir que $\varphi = L$ si, y solo si, $\varphi = L$ en c_0 y $\varphi = L$ en $<e>$. Lo cual equivale a que

$$\varphi = 0 \text{ en } c_0 \text{ y } \varphi(e) = 1. \tag{1}$$

2. Propiedad básica

El ejemplo a continuación nos servirá para motivar otra propiedad elemental del concepto de límite que emplearemos.

Ejemplo 2.1. Sean $s \in S(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}$. Si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $s(n) = b$, $\forall\, n \geq N$, diremos que la sucesión s es *eventualmente-b*. Observemos que en este caso $s \in c$ y $\text{lím}\, s = b$.

Definición 2.1. Un funcional $\varphi : c \to \mathbb{R}$ tiene la *propiedad básica*, si para cualquier sucesión real s que es eventualmente-b, donde $b \in \mathbb{R}$, se cumple que $\varphi(s) = b$.

Sea $\varphi : c \to \mathbb{R}$ cualquier funcional lineal que tenga la propiedad básica. Ya que la sucesión e es eventualmente-1, se cumple que

$$\varphi(e) = 1.$$

De acuerdo con (1), para concluir que $\varphi = L$ solo restaría probar que $\varphi = 0$ en c_0.

3. Positividad

Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por e_n la sucesión cuyo n-ésimo término es 1 y todos los demás son 0. Observemos que $e_n \in c_0$. A la colección $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ la llamaremos *sistema canónico* en c_0.

Denotemos por c_{00} el espacio vectorial generado por el sistema canónico $\{e_n\}$. Claramente $c_{00} \subseteq c_0$. La sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ muestra que c_{00} está contenido propiamente en c_0.

Sea $\varphi : c \to \mathbb{R}$ un funcional lineal con la propiedad básica. Ya que cada sucesión e_n es eventualmente-0, entonces

$$\varphi(e_n) = 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Por la linealidad de φ esto implica que $\varphi = 0$ en c_{00}.

De acuerdo a lo anterior, para concluir que $\varphi = 0$ en c_0 requerimos ahora «aproximar» el valor de φ en una sucesión en c_0 mediante valores de φ en sucesiones en c_{00}. Con este fin introduciremos otra propiedad de L, basada en que $S(\mathbb{R})$ cuenta con una relación de «orden», denotada por $\leq$, que permite distinguir cierta clase de funcionales lineales.

Definición 3.1.
a) Sean $s, t \in S(\mathbb{R})$. Entonces $s \leq t$ si $s(n) \leq t(n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Naturalmente, $t \geq s$ equivale a $s \leq t$.

b) Un funcional lineal $\varphi : c \to \mathbb{R}$ es *positivo*, si $\varphi(s) \geq 0, \ \forall\, s \in c$ tal que $s \geq 0$.

Sea $\varphi : c \to \mathbb{R}$ un funcional lineal positivo y consideremos $s, t \in c$ tales que $s \leq t$. Entonces $s(n) \leq t(n), \forall\, n \in \mathbb{N}$. Lo cual equivale a que $0 \leq t(n) - s(n), \forall\, n \in \mathbb{N}$, esto es, $0 \leq t - s$. La positividad de φ implica ahora que $0 \leq \varphi(t - s) = \varphi(t) - \varphi(s)$. Por lo tanto $\varphi(s) \leq \varphi(t)$. Esto señala que un funcional lineal positivo preserva el «orden».

Ejemplo 3.1. Sea $s \in c$ tal que $s \geq 0$, es decir, $s(n) \geq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Ya que al tomar límite se conserva el 'menor o igual', se sigue que $L(s) = \operatorname{lím} s \geq 0$.

Esto indica que el funcional límite $L : c \to \mathbb{R}$ es positivo. Incluyendo esta propiedad alcanzaremos nuestro objetivo. Para ello requerimos del próximo resultado.

Dada una sucesión real s, su *valor absoluto* $|s|$ está definido en la forma usual: $|s|(n) := |s(n)|, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Claramente $|s| \geq 0$ y

$$-|s| \leq s \leq |s|, \ \forall\, s \in S(\mathbb{R}). \tag{3}$$

Notemos además que $s \in c_0$ si y solo si $|s| \in c_0$.

Supongamos ahora que $\varphi : c \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal positivo. De (3) resulta entonces que $-\varphi(|s|) \leq \varphi(s) \leq \varphi(|s|)$. Por lo tanto

$$|\varphi(s)| \leq \varphi(|s|), \forall\, s \in c. \tag{4}$$

Lema 3.1. *Sean $N \in \mathbb{N}$ y φ un funcional lineal definido en c tal que $\varphi(e_n) = 0$, $\forall\, n > N$. Si φ es positivo, entonces*

$$\varphi(s) = 0, \forall\, s \in c_0 \textit{ tal que } s(n) = 0, n = 1, \ldots, N.$$

Demostración. Tomemos $s \in c_0$ tal que $s(n) = 0, n = 1, \ldots, N$. Dado $\epsilon > 0$, escojamos $M > N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|s(n)| \leq \epsilon, \forall\, n > M. \tag{5}$$

Consideremos $t = s - \sum_{n=1}^{M} s(n)e_n$. Entonces

$$t(n) = \begin{cases} 0, & 1 \le n \le M \\ s(n), & n > M \end{cases} \tag{6}$$

y $s = t + \sum_{n=1}^{N} s(n)e_n + \sum_{n=N+1}^{M} s(n)e_n$. Ya que $\varphi(e_n) = 0, \forall\, n > N$ y $s(n) = 0$ cuando $n = 1, \dots, N$, resulta

$$\varphi(s) = \varphi(t) + \sum_{n=N+1}^{M} s(n)\varphi(e_n) = \varphi(t). \tag{7}$$

Por otra parte, de acuerdo con (6) y (5) se cumple que $|t| \le \epsilon\, e$. En virtud de la positividad de φ, esto implica que $\varphi(|t|) \le \epsilon\varphi(e)$. De esto, al utilizar (7) y (4), llegamos a que

$$|\varphi(s)| = |\varphi(t)| \le \varphi(|t|) \le \epsilon\varphi(e).$$

Haciendo ahora $\epsilon \to 0$ resulta que $\varphi(s) = 0$. □

Podemos ya caracterizar al funcional límite L como sigue.

Teorema 3.1. *El funcional límite es el único funcional lineal definido en c que tiene la propiedad básica y que es positivo.*

Demostración. Sea $\varphi : c \to \mathbb{R}$ un funcional lineal con la propiedad básica y que es positivo. Como lo observamos al final de la sección 2, para concluir que $\varphi = L$ solo resta verificar que $\varphi = 0$ en c_0.

Sea $s \in c_0$ y tomemos $t = s - s(1)e_1$. Observando que $t(1) = 0$, que $\varphi(e_n) = 0, \forall\, n > 1$ y que φ es positivo, podemos aplicar el lema 3.1 para concluir que $\varphi(t) = 0$. Además $\varphi(e_1) = 0$. En consecuencia

$$\varphi(s) = s(1)\varphi(e_1) + \varphi(t) = 0.$$ □

Ejemplo 3.2. El teorema anterior plantea naturalmente la cuestión de si hay algún funcional lineal definido en c que tenga la propiedad básica y que no sea positivo. Para responder afirmativamente requeriremos hablar antes de base en un espacio vectorial V que no es de dimensión finita, en cuyo caso diremos que V es de *dimensión infinita* y usaremos la notación $\dim V = \infty$. Notemos que $\dim V = \infty$ equivale a que en V haya un conjunto infinito $A = \{v_\alpha : \alpha \in I\}$ que sea linealmente independiente. Es decir, cualquier subconjunto finito y no-vacío de A consta de vectores linealmentes independientes.

Una *base de Hamel* en un espacio vectorial V es un conjunto linealmente independiente $B = \{v_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq V$ tal que cualquier $v \in V$ es combinación lineal de (un número finito de) elementos en B.

Si V es un espacio vectorial y $\dim V = \infty$, la existencia de una base de Hamel se obtiene como consecuencia del lema de Zorn [1, p. 36]. Al igual que sucede con espacios vectoriales de dimensión finita, si $A = \{v_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq V$ es un conjunto linealmente independiente entonces se puede encontrar una base de Hamel B de V tal que $A \subseteq B$.

Podemos ya presentar el ejemplo prometido. Sea t la sucesión definida por $t(n) = \frac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, y consideremos el conjunto

$$A = \{t, e, e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq c.$$

No es difícil verificar que A es un conjunto linealmente independiente. Según lo indicado anteriormente, existe entonces una base de Hamel B de c tal que $A \subseteq B$. Como sucede con los espacios vectoriales de dimensión finita, para definir un funcional lineal $\varphi : c \to \mathbb{R}$, bastará hacerlo ahora en cada $s \in B$. Definimos entonces

$$\varphi(t) = -1, \quad \varphi(e) = 1, \quad \varphi(e_n) = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(s) = 0, \forall\, s \in B \setminus A.$$

Ya que $t \geq 0$, observemos que el funcional lineal φ no es positivo.

Veamos finalmente que φ tiene la propiedad básica. Sean $b \in \mathbb{R}$ y $s \in c$ una sucesión que es eventualmente-b. Existe entonces $N \in \mathbb{N}$ tal que $s(n) = b, \forall\, n > N$. Tomemos $r = s - be \in c_{00}$. Luego $\varphi(r) = 0$ y por lo tanto

$$\varphi(s) = \varphi(r) + b\varphi(e) = b.$$

4. Funcional multiplicativo

Empleando las ideas que hemos introducido, a continuación estableceremos otra propiedad con la que podemos distinguir al funcional límite. Para ello necesitamos considerar otra operación algebraica en $S(\mathbb{R})$: su producto o multiplicación.

Definición 4.1. El *producto* de $s, t \in S(\mathbb{R})$ es la función producto st definida por

$$(st)(n) := s(n)t(n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Considerando las tres operaciones algebraicas, resulta que $S(\mathbb{R})$ es un *álgebra conmutativa* y que tiene por *identidad* a la sucesión e.

En general, un *álgebra* A es un espacio vectorial con un producto que tiene las siguiente propiedades en relación a la suma y la multiplicación por escalares. Sean $x, y, z \in A,\ a, b \in \mathbb{R}$. Entonces

$$x(yz) = (xy)z, \tag{8}$$

$$x(y+z) = xy + xz, \quad (x+y)z = xz + yz,$$

$$x(ay) = (ax)y = a(xy), \quad (ab)x = a(bx),$$

Cuando el producto es conmutativo se dice que el álgebra A es *conmutativa* y si hay un elemento $x_0 \in A$ tal que

$$x_0\ y = y\ x_0 = y, \ \forall\, y \in A.$$

tal elemento es único y se le llama *identidad* (multiplicativa).

Al estudiar un álgebra, las siguientes funciones resultan de interés.

Definición 4.2. Sea A un álgebra. Un funcional $h : A \to \mathbb{R}$ es un *homomorfismo de álgebras*, si $h \neq 0$, h es lineal y además es *multiplicativo*:

$$h(xy) = h(x)h(y), \forall\, x, y \in A.$$

Una cuarta propiedad elemental del concepto de límite de sucesiones reales es la que sigue [2, cap. 3].

iii) Si s y $t \in c$, entonces $st \in c$ y $\lim(st) = \lim s\ \lim t$.

El resultado a continuación resume lo anteriormente descrito.

Teorema 4.1. *El espacio c es un álgebra con la sucesión e como identidad y el funcional límite $L : c \to \mathbb{R}$ es un homomorfismo de álgebras.*

Ejemplo 4.1. Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ definamos el funcional evaluación $\delta_n : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por

$$\delta_n(s) := s(n).$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Claramente, δ_n es un funcional lineal. Además la igualdad

$$\delta_n(st) = (st)(n) = s(n)t(n) = \delta_n(s)\delta_n(t),\ \forall\, s, t \in S(\mathbb{R}).$$

señala que δ_n es multiplicativo. Ya que $\delta_n \neq 0$, concluimos que δ_n es un homomorfismo de álgebras definido en $S(\mathbb{R})$.

Hemos visto que L y $\delta_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, son homomorfismos de álgebras definidos en c. Probaremos ahora que son todos.

Lema 4.1. *Si $h : c \to \mathbb{R}$ es un homomorfismo de álgebras, entonces h es positivo.*

Demostración. Consideremos $s \in c$ tal que $s \geq 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $\sqrt{s}\,(n) = \sqrt{s(n)}$. Entonces $\sqrt{s} \in c$ y $\sqrt{s}^{\ 2} = s$. Ya que h es un funcional multiplicativo, esto implica que

$$h(s) = h(\sqrt{s}^{\ 2}) = (h(\sqrt{s}))^2 \geq 0. \qquad \square$$

Teorema 4.2. *El conjunto de homomorfismos de álgebras definidos en c es $\{L\} \cup \{\delta_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración. Sea $h : c \to \mathbb{R}$ un homomorfismo de álgebras. Supongamos que $s \in c$ y $s^2 = s$. Siendo h un funcional multiplicativo, se sigue que $h(s)^2 = h(s)$. Lo cual implica que $h(s) = 0$ o $h(s) = 1$. Así, hemos probado que

$$\text{si } s^2 = s,\ \text{entonces } h(s) = 0 \text{ o } h(s) = 1. \tag{9}$$

Ya que $e^2 = e$, se cumple que $h(e) = 0$ o $h(e) = 1$. Supongamos que $h(e) = 0$ y consideremos cualquier $s \in c_0$. Ya que la sucesión s

es acotada, elijamos $M > 0$ tal que $|s(n)| \leq M, \; \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $s \leq |s| \leq Me$. Usando (4) y la positividad de h obtenemos que

$$|h(s)| \leq h(|s|) \leq Mh(e) = 0, \forall\, s \in c_0$$

Por consiguiente $h = 0$.

Ya que $h \neq 0$, lo anterior implica que

$$h(e) = 1. \tag{10}$$

Supongamos ahora que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $h(e_n) \neq 0$. Puesto que $e_n^2 = e_n$, de (9) concluimos que $h(e_n) = 1$. Veamos que en este caso

$$h = \delta_n. \tag{11}$$

En virtud de (10) los homomorfismos de álgebras h y δ_n coinciden en e. Ya que h y δ_n son lineales y teniendo presente el lema 1.1, para que h y de δ_n coincidan en c basta entonces que lo hagan en c_0.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \neq n$ y supongamos que $h(e_m) > 0$. Entonces $(e_n + e_m)^2 = e_n + e_m$ y $h(e_n + e_m) = 1 + h(e_m) > 1$, lo cual contradiría (9). Por lo tanto

$$h(e_n) = 1, \;\; h(e_m) = 0 \text{ si } m \neq n. \tag{12}$$

Tomemos ahora cualquier $s \in c_0$ y sea $t_n = s - \sum_{k=1}^{n} s(k)e_k$. Ya que h es un funcional lineal positivo y $h(e_k) = 0, \forall\, k > n$, al aplicar el lema 3.1 y usar (12) resulta

$$h(s) = h\left(\sum_{k=1}^{n} s(k)e_k + t_n\right) = \sum_{k=1}^{n} s(k)h(e_k) + 0 = s(n) = \delta_n(s).$$

Supongamos ahora que $h(e_n) = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Nuevamente tomemos cualquier $s \in c_0$ y sea $t_n = s - s(1)e_1$. Ya que h es un funcional lineal positivo y $h(e_k) = 0, \forall\, k > 1$, al aplicar el lema 3.1 y usar (12) resulta

$$h(s) = h(s(1)e_1 + (s - s(1)e_1)) = 0 + 0 = 0 = L(s).$$

Puesto que $h(e) = 1 = L(e)$, lo anterior implica que $h = L$. $\square$

Llegamos así a la otra caracterización del funcional límite L.

Corolario 4.1. *El funcional límite L es el único homomorfismo de álgebras definido en c que se anula en el sistema canónico $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

En retrospectiva podemos apreciar que la propiedad de positividad que posee el funcional límite resultó fundamental para establecer las dos caracterizaciones que presentamos. De manera abstracta la positividad es un concepto que se estudia en espacios vectoriales que cuentan con cierta estructura de orden y que son llamados *espacios de Riesz*. Muchos espacios de funciones resultan ser espacios de Riesz y existe una amplia, interesante y útil teoría al respecto [3].

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece la cuidadosa labor de los revisores, cuyos comentarios permitieron mejorar la presentación de este trabajo.

Bibliografía

[1] N. Dunford y J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, 1.ª ed., Interscience Publishers Inc., New York, 1958.
[2] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3.ª ed., Mc-Graw-Hill, New York, 1976.
[3] A. C. Zaanen, *Introduction to operator theory in Riesz spaces*, 1.ª ed., Springer Verlag, Berlin, 1997.