Miscelánea Matemática **64** (2017) 37-49 SMM

Dualización de espacios y módulos

Rogelio Fernández-Alonso
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa
Ciudad de México

rojo99@prodigy.net.mx

Resumen

En este texto se hace un breve recorrido por varios conceptos del Álgebra Lineal, la Teoría de las Categorías y la Teoría de Módulos, a partir del concepto de espacio vectorial dual, y de la inmersión que existe de un espacio vectorial en su doble dual. Se pasa al concepto de módulo dual y se estudia la manera en que esta dualización puede mantener dicha inmersión, llegando al concepto de módulo carácter.

1. Introducción

Una situación típica en el desarrollo de las Matemáticas consiste en ampliar un contexto intentando mantener ciertas propiedades. En nuestro caso, si se consideran los K-espacios vectoriales como K-módulos, donde K es un campo, el contexto puede ampliarse a R-módulos para cualquier anillo asociativo R, incluso no necesariamente conmutativo. Así es posible trasladar el concepto de *espacio dual* al de *módulo dual*, y la conexión entre un espacio V y su doble dual V^{**}, que consiste en una transformación lineal denotada e_V, *que siempre es inyectiva*, se traslada a un homomorfismo e_M entre un módulo M y su doble dual M^{**}. Sin embargo, no todo sigue funcionando como antes: dicho homomorfismo no siempre es inyectivo. Es decir, se pierde la inmersión de un objeto en su doble dual. Para resolver esta falla, se requiere redefinir el concepto de módulo dual, y para eso se necesitan herramientas categóricas.

Así que aprovechamos para explicar brevemente los conceptos categóricos básicos, que son *categoría*, *funtor* y *transformación natural*. De esta manera el lector puede encontrar una necesidad para estudiar dichos conceptos, que por generales y abstractos pueden resultar un tanto áridos. En particular nos enfocamos en los funtores *Hom* entre las categorías de módulos izquierdos y derechos, y especialmente en el funtor *Hom* contravariante, mediante el cual se define el espacio o el módulo dual. Así la dualización consiste en aplicar el funtor *Hom* contravariante, fijando el propio anillo. Y los homomorfismos e_M resultan constituir una transformación natural.

La solución a nuestra «falla» resulta de considerar *otro* funtor *Hom*, entre la categoría de $\mathbb{Z}$-módulos (es decir, grupos abelianos) y la categoría de R-módulos, eligiendo adecuadamente el grupo abeliano fijo. Un grupo abeliano que hace funcionar toda esta maquinaria es el grupo cociente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, y su buen funcionamiento se debe a dos propiedades que posee: es *inyectivo* (es decir, *divisible*) y es un *cogenerador*. Estas propiedades son muy importantes en la Teoría de Módulos y también aprovechamos la oportunidad para explicarlas brevemente. Este nuevo dual tiene importancia histórica y se llama *módulo carácter*. Esto puede ser un buen punto de partida si se quiere continuar el estudio de la categoría de módulos.

2. Dualización de espacios vectoriales

Dados un campo K y un K-espacio vectorial V, se considera el conjunto de todas las transformaciones lineales de V en K, que podemos denotar como $Hom_K(V, K)$, y se demuestra fácilmente que es un K-espacio vectorial. Este se llama el *espacio dual* de V y se le denota como V^*. Esta definición, ejemplos y resultados como el presentado a continuación se pueden estudiar por ejemplo en la sección 2.6 de [3].

Resulta que si V es de dimensión finita, el espacio dual tiene la misma dimensión, y por tanto es isomorfo al espacio original.

Proposición 2.1. *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. Para cada $i = 1, \ldots, n$ sea $f_i : V \to K$ la transformación lineal tal que para cada $v \in V$, $f_i(v)$ calcula la i-ésima coordenada de v respecto a la base α. Entonces $\alpha^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ es una base de V^*.*

No sólo se puede hablar de espacios duales; también hay transformaciones lineales duales. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, se define $T^* : W^* \to V^*$ tal que para cada $f : W \to K$ se tiene $T^*(f) = f \circ T$. En efecto $T^*(f) : V \to K$ es una transformación lineal. También resulta que T^* es una transformación lineal entre los espacios duales. Nótese que el sentido de la transformación dual se invierte respecto al de la transformación original.

Obsérvese que la transformación dual de la identidad en un espacio es la identidad en el espacio dual. También se comprueba muy fácilmente que la dualización de transformaciones duales respeta (o bien, invierte) la composición en el siguiente sentido.

Proposición 2.2. *Sean $T : U \to V$ y $S : V \to W$ transformaciones lineales. Entonces $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.*

Este comportamiento de la dualización en espacios y transformaciones lineales corresponde al concepto más abstracto de *funtor* entre dos categorías, que se describirá en la siguiente sección.

Otro aspecto interesante de la dualización de espacios vectoriales es que existe una transformación lineal de *cualquier* espacio, no necesariamente de dimensión finita, a su *doble dual*, y que esta transformación lineal resulta ser inyectiva.

Proposición 2.3. *Sea V un K-espacio vectorial. Defínase la función $e_V : V \to V^{**}$ tal que para cada $v \in V$, $e_V(v) : V^* \to K$ es la transformación lineal tal que para cada transformación lineal $f : V \to K$, se tiene $e_V(v)(f) = f(v)$. Es decir, $e_V(v)$ es la evaluación en v. Entonces:*

1. *e_V es una transformación lineal.*
2. *e_V es inyectiva.*
3. *Si $dim(V)$ es finita entonces e_V es suprayectiva, y por tanto un isomorfismo.*

Demostración. 1): Sean $v, w \in V$. Entonces para cada transformación lineal $f : V \to K$ se tiene $e_V(v+w)(f) = f(v+w) = f(v) + f(w) = e_V(v)(f) + e_V(w)(f) = (e_V(v) + e_V(w))(f)$. Se sigue que $e_V(v+w) = e_V(v) + e_V(w)$. Ahora, si $\alpha \in K,\ v \in V$, entonces para cada transformación lineal $f : V \to K$ sucede que $e_V(\alpha v)(f) = f(\alpha v) = \alpha f(v) = (\alpha e_V(v))(f)$, de donde $e_V(\alpha v) = \alpha e_V(v)$.
2): Sea $v \neq 0$. Entonces existe una base α tal que $v \in \alpha$.[1] Sea $f_v : V \to K$ la transformación lineal que para cada $w \in V$ calcula la coordenada de w respecto a v.[2] Entonces $e_V(v)(f_v) = f_v(v) = 1$. Luego $e_V(v) \neq 0$. Esto demuestra que $\mathrm{Ker}(e_V) = 0$, es decir, e_V es inyectiva.
3): Si V es de dimensión finita, entonces $dim(V^{**}) = dim(V^*) =$

[1] Esto es una situación particular de un resultado más general que dice que todo conjunto linealmente independiente de vectores puede extenderse a una base, y que se demuestra usando el *Lema de Zorn*.

[2] Es decir, es el escalar que aparece multiplicando a v al escribir a w de manera única como combinación lineal de elementos de α.

$dim(V)$, así que toda transformación lineal $V \to V^{**}$ inyectiva también es suprayectiva. □

Este morfismo evaluación es compatible con el funtor doble dual en el siguiente sentido.

Proposición 2.4. *Para cada transformación lineal $T : V \to W$ entre K-espacios vectoriales V y W el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "e_V"'] & W \arrow[d, "e_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & V^{**} \end{tikzcd}$$

Es decir, $e_W \circ T = T^{**} \circ e_V$.

3. Los conceptos categóricos básicos: categoría, funtor y transformación natural

Para investigar en otros ámbitos, como el de módulos, el proceso de dualización descrito en la sección anterior para espacios vectoriales, es necesario primero abstraer los conceptos esenciales de este proceso. La teoría en la que suelen caer este tipo de abstracciones, no sólo refiriéndose a estructuras algebraicas, sino a estructuras de otras áreas de las matemáticas, es la Teoría de las Categorías. Se puede estudiar esta teoría en el libro clásico de Mac Lane ([5]) o en el más accesible [7].

Tratando de usar la menor cantidad posible de palabras, una *categoría* consta de una clase de objetos y una clase de morfismos entre pares de objetos, que pueden ser llamados dominio y codominio del morfismo. Los morfismos se representan usualmente con flechas, como las funciones. Para cada objeto A hay un morfismo identidad, denotado 1_A, y cada vez que consideremos dos morfismos tales que el codominio del primero coincide con el dominio del segundo, debe existir el morfismo composición. Esta composición debe ser asociativa. Así que una categoría abstrae las características más básicas de los conjuntos y las funciones, pero también de otro tipo de ámbitos, como los espacios vectoriales y las transformaciones lineales, o como los espacios topológicos y las funciones continuas. Con un lenguaje más formal:

Definición 3.1. Una categoría $\mathcal{C}$ consta de:

(a) Una clase de objetos, que también suele denotarse como $\mathcal{C}$.
(b) Para cada par de objetos A y B de $\mathcal{C}$ un conjunto de morfismos, denotado $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$. Se dice que los morfismos de este conjunto

tienen como dominio a A y como codominio a B, y se denotan $f : A \to B$.

Y se cumplen las siguientes condiciones:

1. Para cada par de morfismos $f : A \to B$ y $g : B \to C$ existe el morfismo composición $g \circ f : A \to B$.
2. Para cada terna de morfismos $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ se tiene $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
3. Para cada objeto A de $\mathcal{C}$ existe el morfismo identidad 1_A tal que para cada par de morfismos $f : B \to A$ y $g : A \to C$ se tiene $1_A \circ f = f$ y $g \circ 1_A = g$.
4. Para cualesquiera objetos A, B, C, D de $\mathcal{C}$, si $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(C, D) \neq \emptyset$ entonces $A = C$ y $B = D$.

Dando un paso más allá, un *funtor* entre dos categorías es una doble asociación, entre las clases de objetos y entre las clases de morfismos de las categorías correspondientes. Usualmente ambas asociaciones se denotan con la misma letra. Más detalladamente:

Definición 3.2. Dadas dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$, un funtor (covariante) $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ asocia a cada objeto A de $\mathcal{A}$ un objeto $F(A)$ de $\mathcal{C}$ y a cada morfismo $f : A \to B$ de $\mathcal{A}$ un morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ de $\mathcal{C}$ de tal manera que:

1. Para cada objeto A de $\mathcal{A}$ se tiene que $F(1_A) = 1_{F(A)}$.
2. Para cada par de morfismos $f : A \to B$ y $g : B \to C$ de $\mathcal{A}$ se tiene que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Una variación de la definición anterior es un funtor que invierte el sentido de los morfismos, justamente como se comporta la dualización de espacios y transformaciones lineales.

Definición 3.3. Dadas dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$, un funtor contravariante $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ asocia a cada objeto A de $\mathcal{A}$ un objeto $F(A)$ de $\mathcal{C}$ y a cada morfismo $f : A \to B$ de $\mathcal{A}$ un morfismo $F(f) : F(B) \to F(A)$ de $\mathcal{C}$ de tal manera que:

1. Para cada objeto A de $\mathcal{A}$ se tiene que $F(1_A) = 1_{F(A)}$.
2. Para cada par de morfismos $f : A \to B$ y $g : B \to C$ de $\mathcal{A}$ se tiene que $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Así, considerando la Proposición 2.2, si denotamos como K-Vec a la categoría cuyos objetos son los K-espacios vectoriales y cuyos morfismos son las transformaciones lineales, entonces la dualización es un funtor contravariante $(\_)^* : K\text{-Vec} \to K\text{-Vec}$. Si dualizamos dos veces obtenemos un funtor (covariante) $(\_)^{**} : K\text{-Vec} \to K\text{-Vec}$.

Finalmente, la situación descrita en la Proposición 2.4 se abstrae en el tercer concepto categórico básico, el de *transformación natural*.

Definición 3.4. Dadas dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ y dos funtores $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, una transformación natural $\tau : F \to G$ consiste en una clase de morfismos en $\mathcal{C}$, $\{\tau_A : F(A) \to G(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$, tal que para cada morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{A}$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_A"'] & F(B) \arrow[d, "\tau_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Es decir, $\tau_B \circ F(f) = G(f) \circ \tau_A$.

Así tenemos la siguiente situación:

Observación 3.5. La colección de los morfismos $e_V : V \to V^{**}$ forman una transformación natural $e : I \to (\_)^{**}$ del funtor identidad $I : K\text{-Vec} \to K\text{-Vec}$ al funtor doble dual.

4. De espacios vectoriales a módulos. Los funtores Hom

En lo que resta de este texto, cuando escribamos *anillo* nos referiremos a un anillo asociativo (no necesariamente conmutativo) con neutro multiplicativo. Recuérdese que dado un anillo R, un R-módulo izquierdo es una estructura algebraica similar a un K-espacio vectorial, con una suma y un producto «escalar-por-vector» (escribiendo el escalar por la izquierda). Ambas operaciones cumplen exactamente los mismos axiomas que un espacio vectorial. La única diferencia es que ahora los «escalares» están en el anillo R, en vez del campo K. Las funciones entre R-módulos que respetan las operaciones de manera análoga a las transformaciones lineales se llaman *homomorfismos de R-módulos* o R-homomorfismos. Los R-módulos izquierdos junto con los R-homomorfismos forman una categoría, denotada por R-Mod. Así que si K es un campo, K-Mod es la categoría de espacios vectoriales y transformaciones lineales. Si $\mathbb{Z}$ es el anillo de los números enteros entonces $\mathbb{Z}$-Mod es precisamente la categoría de los grupos abelianos.

Si al definir la estructura de R-módulo el producto «escalar-por-vector» se escribe con el escalar a la derecha, tenemos un *R-módulo derecho*. Y también podemos hablar de homomorfismos de R-módulos derechos y de la correspondiente categoría, que se denota como Mod-R. En general no tienen por qué ser isomorfas las categorías de módulos R-Mod y Mod-R, aunque sí lo son cuando el anillo R es conmutativo, como en el caso de un campo o de $\mathbb{Z}$. Los conceptos básicos sobre módulos y sus homomorfismos pueden encontrarse en el capítulo 1 de [1].

Como ya dijimos en la Definición 3.1, dada una categoría $\mathcal{C}$ y dos objetos A, B de $\mathcal{C}$, denotamos por $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ al conjunto de morfismos de A a B. Si fijamos uno de los dos objetos y dejamos libre al otro, obtenemos dos funtores, uno covariante y el otro contravariante. Denotemos por Con a la categoría cuyos objetos son conjuntos y cuyos morfismos son funciones.

Observación 4.1. Para cada objeto C de una categoría $\mathcal{C}$ se tienen funtores:

1. $Hom_{\mathcal{C}}(C, \_) : \mathcal{C} \to$ Con, covariante, que asocia a cada objeto A en $\mathcal{C}$ el conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(C, A)$, y a cada morfismo $f : A \to B$ la función denotada $f_* : Hom_{\mathcal{C}}(C, A) \to Hom_{\mathcal{C}}(C, B)$ tal que $f_*(h) = f \circ h$ para cada $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, A)$.
2. $Hom_{\mathcal{C}}(\_, C) : \mathcal{C} \to$ Con, contravariante, que asocia a cada objeto A en $\mathcal{C}$ el cojunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$, y a cada morfismo $f : A \to B$ la función denotada $f^* : Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$ tal que $f^*(h) = h \circ f$ para cada $h \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$.

Una categoría $\mathcal{C}$ se llama *enriquecida* si para cada par de objetos A, B de $\mathcal{C}$, el conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ tiene una estructura específica adicional. Tal es el caso de la categoría de K-espacios vectoriales, donde el conjunto de transformaciones lineales $Hom_K(A, B)$ es un K-espacio vectorial. ¿Qué sucede con este conjunto en la categoría R-Mod? Al conjunto de los R-homomorfismos entre dos R-módulos A y B lo denotaremos de manera simplificada como $Hom_R(A, B)$. Según sean A y B módulos izquierdos o derechos, dicho conjunto consta de los homomorfismos correspondientes. La categoría R-Mod (así como Mod-R) también resulta ser enriquecida, pues $Hom_R(A, B)$ es un grupo abeliano (con la suma de homomorfismos definida como es usual, puntualmente), aunque en general no es un R-módulo. Así que también tenemos los siguientes funtores *Hom*, para cada R-módulo izquierdo C, definidos de manera análoga:

1. $Hom_R(C, \_) : R$-Mod $\to \mathbb{Z}$-Mod es un funtor covariante.
2. $Hom_R(\_, C) : R$-Mod $\to \mathbb{Z}$-Mod es un funtor contravariante.

Para que el grupo abeliano $Hom_R(A, B)$ tenga una estructura de módulo es suficiente que alguno de ambos R-módulos A o B tenga una estructura más rica: la de *bimódulo*. Dados dos anillos R y S, un R-S-bimódulo M es una estructura algebraica con una suma y *dos* productos «escalar-por-vector», uno escribiendo escalares en R por la izquierda y el otro escribiendo escalares en S por la derecha, donde M es a la vez un R-módulo izquierdo y un S-módulo derecho, y además se cumple la siguiente condición que liga ambos productos «escalar-por-vector»:

$$\text{Para cada } r \in R \text{ y cada } s \in S \text{ y para cada } x \in M, \text{ se tiene}$$
$$r(xs) = (rx)s.$$

A continuación se describe la estructura de módulo que adquiere $Hom_R(A, B)$ si A o B son bimódulos. Las demostraciones son sencillas y resultan un buen ejercicio de escritura para el lector.

Proposición 4.2. *Sean R y S anillos y sean A y B dos R-módulos izquierdos.*

1. *Si A es un R-S-bimódulo entonces $Hom_R(A, B)$ es un S-módulo izquierdo, con el producto definido como sigue: para cada $s \in S$ y cada $f \in Hom_R(A, B)$, sf es tal que para cada $x \in A$, $(sf)(x) = f(xs)$.*
2. *Si B es un R-S-bimódulo entonces $Hom_R(A, B)$ es un S-módulo derecho, con el producto definido como sigue: para cada $s \in S$ y cada $f \in Hom_R(A, B)$, fs es tal que para cada $x \in A$, $(fs)(x) = f(x)s$.*

Si la categoría es de módulos derechos en vez de izquierdos, la estructura anterior se invierte en el siguiente sentido.

Proposición 4.3. *Sean R y S anillos y sean A y B dos R-módulos derechos.*

1. *Si A es un S-R-bimódulo entonces $Hom_R(A, B)$ es un S-módulo derecho, con el producto definido como sigue: para cada $s \in S$ y cada $f \in Hom_R(A, B)$, fs es tal que para cada $x \in A$, $(fs)(x) = f(sx)$.*
2. *Si B es un S-R-bimódulo entonces $Hom_R(A, B)$ es un S-módulo izquierdo, con el producto definido como sigue: para cada $s \in S$ y cada $f \in Hom_R(A, B)$, sf es tal que para cada $x \in A$, $(sf)(x) = sf(x)$.*

Esta estructura de módulo permite considerar los funtores Hom de la siguiente manera, siguiendo la pauta de la Observación 4.1:

Proposición 4.4. *Sean R y S anillos y sea C un R-módulo izquierdo.*

1. *Si C es un R-S-bimódulo, $Hom_R(C, \_) : R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ es un funtor covariante, que asocia a cada R-módulo izquierdo A el S-módulo izquierdo $Hom_R(C, A)$, y a cada R-homomorfismo $f : A \to B$ el S-homomorfismo $f_* : Hom_R(C, A) \to Hom_R(C, B)$ tal que $f_*(h) = f \circ h$ para cada $h \in Hom_R(C, A)$.*
2. *Si C es un R-S-bimódulo, $Hom_R(\_, C) : R\text{-Mod} \to \text{Mod-}S$ es un funtor contravariante, que asocia a cada R-módulo izquierdo A el S-módulo derecho $Hom_R(A, C)$, y a cada R-homomorfismo*

$f : A \to B$ el homomorfismo de S-módulos derechos $f^* : Hom_R(B, C) \to Hom_R(A, C)$ tal que $f^*(h) = h \circ f$ para cada $h \in Hom_R(B, C)$.

5. Dualización de módulos

La opción más natural para definir un módulo dual es seguir la pauta de los espacios vectoriales.

Definición 5.1. Sea R un anillo y M un R-módulo izquierdo. El módulo dual de M, denotado M^*, es el conjunto $Hom_R(M, R)$.

Obsérvese que R es un R-R-bimódulo, así que por la Proposición 4.2, el módulo dual $M^* = Hom_R(M, R)$ resulta ser un R-módulo derecho.

En el contexto general de módulos no podemos seguir hablando de bases, y por tanto no podríamos trasladar la Proposición 2.1, pero la Proposición 4.4 nos permite formalizar la dualización de un módulo en términos de un funtor.

Corolario 5.2. *Dado un anillo R se tiene un funtor contravariante $(\_)^* = Hom_R(\_, R) : R\text{-Mod} \to \text{Mod-}R$.*

Análogamente se tiene un funtor contravariante $(\_)^* = Hom_R(\_, R) : \text{Mod-}R \to R\text{-Mod}$. Obsérvese entonces que el doble dual M^{**} de un R-módulo izquierdo es de nuevo un R-módulo izquierdo, de tal manera que se tiene un funtor covariante $(\_)^{**} : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$.

La Proposición 2.3 se puede trasladar sólo parcialmente; la demostración es completamente análoga.

Proposición 5.3. *Sea M un R-módulo izquierdo. Defínase la función $e_M : M \to M^{**}$ tal que para cada $x \in M$, $e_M(x) : M^* \to R$ es el homomorfismo de R-módulos derechos tal que para cada R-homomorfismo $f : M \to R$, $e_M(x)(f) = f(x)$. Es decir, $e_M(x)$ es la evaluación en x. Entonces e_M es un R-homomorfismo.*

Esta función e_M define también una transformación natural, de manera similar a la Observación 3.5.

Observación 5.4. La colección de los morfismos $e_M : M \to M^{**}$ forman una transformación natural $e : I \to (\_)^{**}$ del funtor identidad $I : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ al funtor doble dual.

La «falla» que se tiene en este caso, respecto a la Proposición 2.3 es que e_M no necesariamente es inyectiva. De hecho puede ser el homomorfismo cero, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.5. Sea $\mathbb{Z}$ el anillo de los números enteros y para $n > 1$ consideremos el grupo abeliano $\mathbb{Z}_n$ de enteros módulo n. Considerando también a $\mathbb{Z}$ como grupo abeliano, dado cualquier homomorfismo $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$ y cualquier $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$, el elemento $f(\overline{a})$ en $\mathbb{Z}$ tiene que ser de orden finito, y por tanto cero. Esto demuestra que $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0$. Luego, $e_{\mathbb{Z}_n}(\overline{a}) = 0$ para toda $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$. Es decir, $e_{\mathbb{Z}_n} = 0$.

Es decir, en general el *núcleo* del homomorfismo e_M no es cero. De hecho podemos describirlo, simplemente desglosando su definición.

Observación 5.6. Sea M un R-módulo izquierdo. Entonces:

$$\mathrm{Ker}(e_M) = \bigcap\{\mathrm{Ker}f \mid f \in Hom_R(M, R)\}.$$

6. Una mejoría en la dualización de módulos: el módulo carácter

Si nos ponemos como meta redefinir una dualización de módulos tal que el homomorfismo e_M sea *inyectivo* (en tal caso llamado también *monomorfismo*), y dado que el comportamiento de los funtores Hom es más o menos general, podríamos intentar sustituir el R-R-bimódulo R por otro módulo tal que $\mathrm{Ker}(e_M) = 0$ para cada R-módulo M. De hecho tales módulos se llaman *cogeneradores*.

Definición 6.1. Sea R un anillo y sea C un R-módulo izquierdo. C se llama cogenerador de R-Mod, o simplemente cogenerador, si para cada $M \in R$-Mod se tiene:

$$\bigcap\{\mathrm{Ker}f \mid f \in Hom_R(M, C)\} = 0.$$

Considerando el concepto de *producto directo* de módulos (que es simplemente el producto cartesiano dotado naturalmente de las operaciones requeridas para ser módulo), se puede caracterizar un cogenerador como un módulo C tal que cualquier otro módulo puede «sumergirse» en un producto directo de copias de C. Más detalladamente:

Proposición 6.2. *Sea R un anillo y sea C un R-módulo izquierdo. Entonces C es un cogenerador si y sólo si para cada $M \in R$-Mod existe un conjunto X y un monomorfismo $M \rightarrowtail C^X$.*

Además puede demostrarse la existencia de un cogenerador en cualquier categoría R-Mod.[3] Nuestro problema parecería resuelto, salvo por el detalle de que para que sigamos teniendo un funtor contravariante $Hom_R(\_, C) : R$-Mod $\to$ Mod-R que funcione como una dualización se

[3]Los conceptos de cogenerador y de producto directo, así como la existencia de cogeneradores pueden consultarse con más profundidad en [1].

requiere que C sea un R-R-bimódulo. Encontrar un cogenerador que además sea un R-R-bimódulo no siempre será fácil.

Pero hay otra manera de resolver el problema. Como ya vimos en la sección 4 de este trabajo, hay muchas posibilidades para definir un funtor *Hom* entre categorías de módulos. Sin embargo, si lo que queremos es definir un proceso de dualización de módulos, es deseable que el doble dual sea un módulo del mismo tipo que el original, para poder definir un homomorfismo como e_M.

El gran truco está en observar que *todos* los R-módulos izquierdos son de hecho R-$\mathbb{Z}$-bimódulos, y utilizar el funtor *Hom* respecto a los $\mathbb{Z}$-homomorfismos en lugar de los R-homomorfismos.

Así, si G es un grupo abeliano (y por tanto un $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo y también *derecho*), y A es un R-módulo izquierdo entonces $Hom_{\mathbb{Z}}(A, G)$ resulta un R-módulo derecho, siguiendo la Proposición 4.3. Más aún:

Proposición 6.3. *Si G es un grupo abeliano, considerado como $\mathbb{Z}$-módulo derecho, entonces $Hom_{\mathbb{Z}}(\_, G) : R\text{-Mod} \to \text{Mod-}R$ es un funtor contravariante, que asocia a cada R-módulo izquierdo A el R-módulo derecho $Hom_{\mathbb{Z}}(A, G)$, y a cada R-homomorfismo $f : A \to B$ el homomorfismo de R-módulos derechos $f^* : Hom_{\mathbb{Z}}(B, G) \to Hom_{\mathbb{Z}}(A, G)$ tal que $f^*(h) = h \circ f$ para cada $h \in Hom_{\mathbb{Z}}(B, G)$.*

Análogamente, si G es un grupo abeliano, considerado como $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo, tenemos un funtor contravariante $Hom_{\mathbb{Z}}(\_, G) : \text{Mod-}R \to R\text{-Mod}$.

Así que sólo hay que encontrar un grupo abeliano que sea cogenerador, por supuesto en Mod-$\mathbb{Z}$, la categoría de grupos abelianos. Resulta que hay uno que se puede expresar de manera muy sencilla, y es el grupo cociente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, que consta de las clases laterales $q + \mathbb{Z}$ con $q \in \mathbb{Q}$. Dos clases son iguales si los representantes difieren en un número entero, así que podemos identificar los elementos de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con los números racionales en el intervalo $[0, 1)$. Para demostrar que dicho grupo abeliano es un cogenerador se utiliza que además es un grupo *divisible*. Un grupo abeliano Q es divisible si dado cualquier $x \in Q$ y cualquier $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ existe $y \in Q$ tal que $x = ny$. Por supuesto que $\mathbb{Q}$ tiene esta propiedad, pero también es bastante claro que la tiene $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Esta propiedad es equivalente a la de ser un $\mathbb{Z}$-módulo *inyectivo*. Para ver la demostración de esta equivalencia puede consultarse [1].

Definición 6.4. Un R-módulo Q se llama inyectivo si para cualquier inclusión $i : N \to M$ de un submódulo en otro y cualquier homomorfismo $h : N \to Q$ existe un homomorfismo $\overline{h} : M \to Q$ tal que $h = \overline{h} \circ i$.

En pocas palabras, un módulo inyectivo tiene la propiedad de que todo homomorfismo que llegue a él se puede extender.

Sabiendo que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo (puesto que es divisible), podemos demostrar que es un cogenerador.

Proposición 6.5. *$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador en $\mathbb{Z}$-Mod.*

Demostración. Sea M un grupo abeliano y sea $x \in M$ tal que $f(x) = 0$ para cada homomorfismo $f : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Supongamos que $x \neq 0$. Entonces el subgrupo cíclico generado por x, denotado por $\langle x \rangle$, tiene un subgrupo K que es máximo[4]. Por tanto el cociente $\langle x \rangle / K$ es un grupo abeliano simple, que debe ser isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_p$ para algún número primo p. A su vez en $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ hay una copia isomorfa de $\mathbb{Z}_p$, a saber el subgrupo generado por la clase $\frac{1}{p} + \mathbb{Z}$. Luego tenemos el siguiente homomorfismo descrito como la composición:

$$\langle x \rangle \twoheadrightarrow \langle x \rangle / K \cong \mathbb{Z}_p \rightarrowtail \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Obsérvese que este homomorfismo no es cero, y por tanto asocia a x un elemento de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ distinto de cero. Como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tiene la propiedad de ser inyectivo, dicho homomorfismo se extiende a un homomorfismo $f : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, que por tanto es tal que $f(x) \neq 0$. Esto es una contradicción que viene de suponer que $x \neq 0$. Por tanto $x = 0$ y se ha demostrado que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador. □

El dual de un R-módulo construido usando el funtor $Hom_{\mathbb{Z}}(\_, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ recibe un nombre especial. La introducción y propiedades importantes de este concepto se pueden encontrar en [4].

Definición 6.6. Sean R un anillo y M un R-módulo izquierdo. Al R-módulo derecho $Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ se le llama módulo carácter de M y se le denota como M^+.

Así tenemos funtores contravariantes $(\_)^+ : R\text{-Mod} \to \text{Mod-}R$ y $(\_)^+ : \text{Mod-}R \to R\text{-Mod}$, y un funtor covariante $(\_)^{++} : R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$. También para cada R-módulo izquierdo M tenemos un homomorfismo $\epsilon_M : M \to M^{++}$ y la colección de estos homomorfismos constituye una transformación natural $\epsilon : I \to (\_)^{++}$. La construcción del dual usando el módulo carácter nos lleva finalmente a la propiedad que queríamos conservar al ampliar el contexto de espacios vectoriales a módulos.

[4]Esto se puede demostrar usando el *Lema de Zorn.*

Corolario 6.7. *Para cada $M \in R$-Mod, ϵ_M es un monomorfismo.*

7. Más allá del módulo carácter

Para que el propio anillo R defina un funtor dual tal que la evaluación e_M sea siempre inyectiva, es necesario y suficiente que R sea un cogenerador como R-módulo. Esta clase de anillos incluye a los llamados *anillos QF* o *quasi-Frobenius*, que además son R-módulos inyectivos y artinianos. Dentro de esta clase están las *álgebras de Frobenius*, que a su vez incluyen a las *álgebras de grupo* de un grupo finito sobre un campo. Para estudiar los anillos QF el lector puede referirse al capítulo 24 de [2].

El funtor carácter tiene otras propiedades importantes, como la que da título al trabajo de Lambek ya citado: *Un módulo es plano si y sólo si su módulo carácter es inyectivo* ([4]). Este teorema nos dice que, sobre el puente constituido por el funtor carácter entre las categorías de módulos izquierdos y derechos de un mismo anillo, las propiedades de ser plano y ser inyectivo son traducción una de la otra. Es decir, son *duales* bajo este concepto de dualidad. Ya explicamos la propiedad de ser inyectivo (Definición 6.4). El lector tendría que ir más allá en el estudio de esta propiedad. Puede consultar la sección 18 de [1], que también incluye a los cogeneradores. Para analizar la propiedad de ser plano, el lector tendría primero que estudiar el funtor producto tensorial, y comprender su relación con los funtores *Hom*. Y entonces considerar otro concepto categórico de gran importancia: el de *adjunción* de funtores o *par adjunto*. Esto aparece en las secciones 19 y 20 de [1], y en el capítulo 2 de [6]. Con todo este bagaje, el lector podría también estudiar el comportamiento del funtor carácter sobre sucesiones exactas cortas de módulos, que aparece en la sección 3.3 de [6]. De hecho, todo este material ya está a la puerta del Álgebra Homológica, que es tratada justamente en [6].

Bibliografía

[1] F. Anderson y K. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, 1973.
[2] C. Faith, *Algebra II Ring Theory*, Springer-Verlag, 1976.
[3] S. Friedberg, A. Insel y L. Spence, *Álgebra Lineal*, Publicaciones Cultural, 1982.
[4] J. Lambek, «A module is flat if and only if its character module is injective», *Canad. Math. Bull.*, vol. 7, 1964, 237–43.
[5] S. M. Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, 1997.
[6] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Springer, 2009.
[7] J. van Oosten, *Basic Category Theory*, Basic Research in Computer Science, 1995.