Misceláanea Matemática **79** (2024) 79-95 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7907

El teorema de Abel para toros complejos

Uriel Guerrero Valadez
U. A. Matemáticas, U. Autónoma de Zacatecas
cogitoergosumquid@gmail.com
y
H. Torres López
CONAHCyT - U. A. Matemáticas, U. Autónoma de Zacatecas
hugo@cimat.mx

1. Introducción

La geometría compleja es una rama de las matemáticas que combina la topología, el análisis complejo y la geometría algebraica. Su objetivo es el estudio de ciertos espacios topológicos localmente homeomorfos a abiertos de $\mathbb{C}^n$ (es decir que localmente su topología puede ser tratada como la topología de un abierto en $\mathbb{C}^n$), estos espacios topológicos son conocidos como variedades complejas de dimensión n. Es de gran interés estudiar los objetos geométricos sobre una variedad compleja tales como: divisores, haces vectoriales, gavillas, etc. La geometría compleja tiene aplicaciones en otras áreas de las matemáticas y de la física tales como: teoría de representaciones, geometría riemanniana, teoría de gauge, teoría de campos, teoría de cuerdas, simetría especular, entre otras.

En este artículo de difusión daremos un repaso sobre variedades complejas con gran énfasis en los toros complejos, así como propiedades de funciones holomorfas y meromorfas sobre superficies de Riemann. También estudiaremos las principales propiedades heredadas de funciones holomorfas sobre superficies de Riemann tales como: continuación analítica o teorema de la identidad, el teorema del módulo máximo y el teorema de Liouville. El objetivo principal de este trabajo es dar una demostración del teorema de Abel en el caso en que la variedad compleja es un toro complejo $\mathbb{C}/\Lambda$ de dimensión $n = 1$ (teorema 4.6). Para llevar a cabo este propósito, calcularemos de manera explícita las funciones meromorfas sobre el mismo.

Palabras clave: toro complejo, funciones holomorfas y meromorfas, divisores, teorema de Abel.

Además de la aplicación anterior, es de gran interés conocer la $\mathbb{C}$-álgebra de funciones meromorfas sobre una variedad compleja compacta X ya que esto nos da información geométrica acerca de la variedad. Una colección de funciones meromorfas $\{f_0, \ldots, f_n\}$ con determinadas propiedades definen una función holomorfa $i : X \to \mathbb{P}^n$. Esta es una manera de ver si la variedad compleja X tiene estructura de variedad compleja proyectiva. El primer objetivo de este artículo de difusión es el siguiente:

Teorema 1.1. *Cada función meromorfa sobre un toro complejo es un cociente de funciones theta trasladadas*

Un concepto de interés sobre superficies de Riemann es el de divisor, esto es una función $D : X \to \mathbb{Z}$ tal que el soporte es finito (véase la definición 4.1). Los divisores están directamente relacionados con funciones meromorfas, dada una función meromorfa f se le puede asociar un divisor, denotado por $\operatorname{div}(f)$, el cual a cada punto p se le asocia el orden de la función meromorfa f en el punto p. Estos divisores provenientes de funciones meromorfas son conocidos como principales y tienen la propiedad que su grado es cero. Una pregunta natural es decidir si todo divisor de grado cero es principal. En la línea proyectiva $\mathbb{P}^1$ todo divisor de grado cero es principal. Sin embargo, en otras superficies de Riemann esta condición no es suficiente. El teorema de Abel caracteriza los divisores principales sobre superficies de Riemann compactas, y es un resultado clásico en la teoría de superficies de Riemann, las ideas en su demostración están relacionadas con temas de interés actuales en geometría algebraica.

Aventajaremos al lector enunciando de manera breve el teorema de Abel para toros complejos $X = \mathbb{C}/\Lambda$. Dado un divisor $D : X \to \mathbb{Z}$ denotaremos por $\sum_{p\in X} D(p) \cdot p$ a la suma en X como grupo. Entonces, podemos definir un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} A : \operatorname{Div}(X) &\to X \\ D &\mapsto \sum_{p\in X} D(p) \cdot p, \end{aligned}$$

donde $\operatorname{Div}(X)$ es el grupo de divisores de X.

Teorema 1.2 (Teorema de Abel para el toro complejo)**.** *Un divisor D sobre el toro complejo $X = \mathbb{C}/\Lambda$ es principal si y solo si deg$(D) = 0$ y $A(D) = 0$.*

Utilizando el homomorfismo de grupos A, el teorema de Abel caracteriza la equivalencia lineal de dos divisores de grado d (véase el corolario 4.7). Una de las consecuencias del teorema de Abel es que el grupo de divisores de grado cero sobre el toro complejo X módulo equivalencia lineal es isomorfo a X (véase el corolario 4.8). El análogo al teorema de Abel para toros complejos de dimensión arbitraria es conocido como teorema de Appel-Humbert (véanse [2, teo. 2.2.3], [6]).

A los interesados en el teorema de Abel para superficies de Riemann compactas de género g se les recomienda los siguientes textos: [1, cap. 1, §3], [3, cap. 5] y [4, cap. 8]. En [7], Nagashima demostró el teorema de Abel para variedades complejas.

El artículo está escrito de la siguiente manera: en la sección 2 demostramos que el toro complejo es una variedad compleja. En la sección 3 desarrollamos la teoría de funciones holomorfas y meromorfas sobre una superficie de Riemann y calculamos las funciones meromorfas sobre un toro complejo. Finalmente, en la sección 4 estudiamos los divisores sobre superficies de Riemann y demostramos el teorema de Abel para toros complejos.

2. Preliminares

El objetivo de esta sección es dar la definición de variedad compleja. Posteriormente demostraremos que el toro complejo $\mathbb{C}^g/\Lambda$ es una variedad compleja.

Definición 2.1. *Una* **carta compleja** *de dimensión n sobre un espacio topológico X, es un homeomorfismo $\phi : U \to V$, donde $U \subset X$ y $V \subset \mathbb{C}^n$ son abiertos. Decimos que dos cartas $\phi_1 : U_1 \to V_1$ y $\phi_2 : U_2 \to V_2$ son* **compatibles** *si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ o*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

es una función holomorfa (ver figura 1). Un **atlas complejo** *$\mathcal{A}$ sobre X es una colección de cartas compatibles $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$ tal que $X = \bigcup U_\alpha$. Decimos que dos atlas complejos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son* **compatibles** *si cada carta de $\mathcal{A}$ es compatible con cada carta de $\mathcal{B}$.*

Definición 2.2. *Dado un espacio topológico X y dos atlas $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$, diremos que estos son equivalentes si $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ es de nuevo un atlas sobre X. Bajo esta identificación, una* **estructura compleja** *para X es una clase equivalencia de un atlas complejo de X. Una* **variedad compleja** *es un espacio topológico segundo numerable, Hausdorff y conexo tal que contiene una estructura compleja. La* **dimensión de la variedad compleja** *X es la dimensión de cualquiera de sus cartas. En particular si la variedad compleja X es de dimensión 1, decimos que X es una* **superficie de Riemann**.

Una pregunta interesante es la siguiente: dado un espacio topológico X, ¿cuántas estructuras complejas no equivalentes tiene X? Por muchos

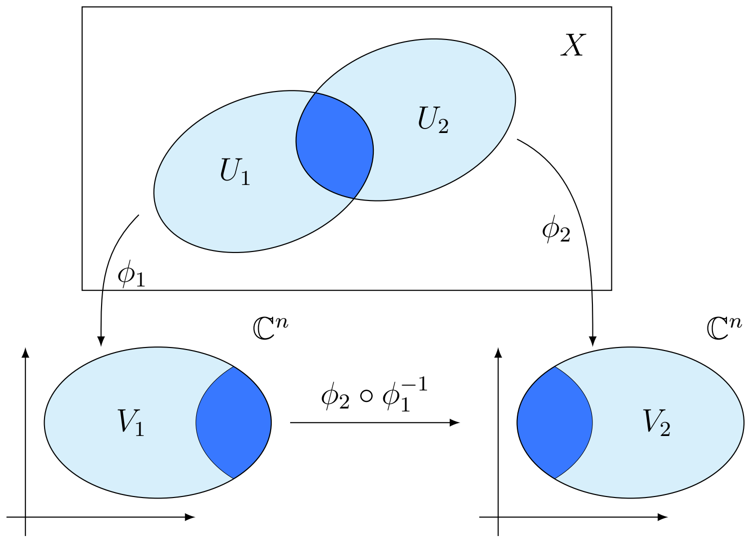


Figura 1. Cartas compatibles de ϕ_1 y ϕ_2.

años se ha estudiado esta pregunta y existen espacios topológicos para los cuales se desconoce si contienen al menos una estructura compleja, un ejemplo muy conocido es el de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^7$. Nuestro interés en estas notas es solo demostrar que un toro complejo tiene al menos una estructura compleja, para lo cual es suficiente exhibir un atlas complejo para el mismo.

Ejemplo 2.3. **$\mathbb{C}^n$ es una variedad compleja de dimensión n.** *Vamos a construir la estructura compleja de la siguiente manera: para cada $z \in \mathbb{C}^n$, escogemos un abierto $U_z \subset \mathbb{C}^n$ tal que $z \in U_z$. Para cada abierto U_z, escogemos $\phi_z : U_z \to U_z$ la función identidad con $\phi_z(y) = y$. Si $U_z \cap U_w \neq \emptyset$, entonces $\phi_w \circ \phi_z^{-1}(y) = y$ es una función holomorfa. Entonces $\{U_z \mid z \in \mathbb{C}^n\}$ forma un atlas para $\mathbb{C}^n$. Como $\mathbb{C}^n$ es espacio conexo, segundo numerable y Hausdorff, entonces $\mathbb{C}^n$ es una variedad compleja de dimensión n.*

Ejemplo 2.4. *Sean $x = (x_0, \dots, x_n), y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$. Decimos que x es equivalente a y si existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que*

$$(x_0, \dots, x_n) = (\lambda y_0, \dots, \lambda y_n).$$

Se verifica que $\sim$ es una relación de equivalencia. El espacio proyectivo, denotado por $\mathbb{P}^n$, es el conjunto de clases de equivalencia

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\sim .$$

Un buen ejercicio para el lector es comprobar que $\mathbb{P}^n$ con la topología cociente es una variedad compleja compacta de dimensión n.

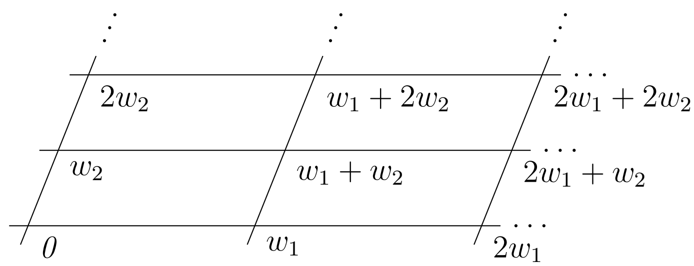


Figura 2. Retícula generada por w_1 y w_2 en $\mathbb{C}$.

Ejemplo 2.5. Toros complejos. *Sean* $w_1, \ldots, w_{2n} \in \mathbb{C}^n$ *tal que son* $\mathbb{R}$*-linealmente independientes, esto es, si existe una combinación lineal*

$$0 = r_1 w_1 + \ldots + r_{2n} w_{2n} \quad con \quad r_i \in \mathbb{R},$$

entonces $r_i = 0$ *para todo* $i = 1, \ldots, 2n$. *Definimos la* **retícula** Λ *formada por los* w_i *como*

$$\Lambda = \{a_1 w_1 + \ldots + a_{2n} w_{2n} \mid a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Para $x, y \in \mathbb{C}^n$, *decimos* x *es equivalente a* y, *denotado por* $x \sim y$, *si y solo si* $x - y \in \Lambda$. *Se verifica que* $\sim$ *es una relación de equivalencia. Ahora, vamos a demostrar que* $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$ *es una variedad compleja compacta de dimensión* n *con la topología cociente: aquí, al considerar la proyección natural* $\pi : \mathbb{C}^n \to X$, *tenemos que* $U \subset X$ *es abierto si y solo si* $\pi^{-1}(U)$ *es abierto en* $\mathbb{C}^n$.

1. π **es una función abierta**. Sea $V \subset \mathbb{C}^n$ abierto, mostraremos que $\pi(V)$ es abierto. Tenemos que

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{w \in \Lambda} (w + V).$$

   Dado que V es abierto, $w + V$ es abierto, y luego $\pi^{-1}(\pi(V))$ es abierto porque es una unión de abiertos. Como X tiene la topología cociente se concluye que $\pi(V)$ es abierto.
2. Λ **es un subgrupo discreto y cerrado**. Definimos la función

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^{2n} & \to & \mathbb{C}^n \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}) & \mapsto & \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_{2n} w_{2n} \end{array}$$

   Notemos que F es un homeomorfismo y $F(\mathbb{Z}^{2n}) = \Lambda$. Como $\mathbb{Z}^{2n}$ es un subgrupo discreto y cerrado, también lo es $\Lambda = F(\mathbb{Z}^{2n})$.
3. **Las cartas sobre** X. Sea $Y = \Lambda - \{0\}$. Tenemos que Y es cerrado, discreto y además $0 \notin Y$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $|y| \geq 2\epsilon$ para todo $y \in Y$. Para $z \in \mathbb{C}^n$, definimos $D_z = B_\epsilon(z)$. Tomamos $\pi_z : D_z \to \pi(D_z)$ la restricción de π sobre su imagen.

Claramente π_z es continua, sobreyectiva y abierta porque es la restricción de una función que cumple con las propiedades anteriores. A continuación probaremos que π_z es inyectiva. Asumimos que para $z_1, z_2 \in D_z$ se satisface que $z_1 + \Lambda = \pi_z(z_1) = \pi_z(z_2) = z_2 + \Lambda$. Por lo tanto $z_1 - z_2 \in \Lambda$, y así

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z| + |z - z_2| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Entonces $z_1 = z_2$ y por esto π_z es inyectiva. Tenemos que π_z es un homeomorfismo ya que es continua, inyectiva, sobreyectiva y abierta. Para cada $z \in \mathbb{C}^n$, definimos

$$\phi_z : \pi(D_z) \to D_z \subset \mathbb{C}^n$$

como la inversa de π_z. De este modo ϕ_z define una carta para X en $\pi(z)$.

4. **Compatibilidad de las cartas**. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^n$ y tomemos las cartas

$$\phi_i : \pi(D_{z_i}) \to D_{z_i}.$$

Consideramos el abierto $U = \pi(D_{z_1}) \cap \pi(D_{z_2})$. El caso $U = \emptyset$ es inmediato. Así, supongamos que $U \neq \emptyset$, demostraremos que $T(z) = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z)$ es holomorfa:

$$\pi(T(z)) = \pi \circ \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = \mathrm{Id} \circ \phi_1^{-1}(z) = \pi(z).$$

Entonces $T(z) - z \in \Lambda$ para todo $z \in \phi_1(U)$ y por ello $w(z) = T(z) - z$ es una función continua. Como Λ es discreto, entonces $w(z)$ es localmente constante, *i.e.* $T(z) = z + w$ localmente, por lo tanto $w(z)$ es una función holomorfa y las cartas son compatibles.

5. $\mathbb{C}^n/\Lambda$ **es conexo.** Como $\mathbb{C}^n$ es conexo y $\pi : \mathbb{C}^n \to X$ es una función continua y sobreyectiva, se sigue que $\mathbb{C}^n/\Lambda$ lo es.

6. $\mathbb{C}^n/\Lambda$ **es compacta**. Definimos el conjunto

$$P = \{\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_{2n} w_{2n} \mid \lambda_i \in [0,1]\} \subset \mathbb{C}^n.$$

Notemos que P es compacto ya que es la imagen de la función continua y sobreyectiva

$$\begin{aligned} h : [0,1]^{2n} &\to P \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}) &\mapsto \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_{2n} w_{2n}. \end{aligned}$$

Afirmamos que $\pi : P \to X$ es sobreyectiva. Sea $v + \Lambda \in X$. Así, existen $r_1, \ldots, r_{2n}$ tales que $v = r_1 w_1 + \ldots + r_{2n} w_{2n}$ con $r_i \in \mathbb{R}$. Podemos escribir a $r_i = a_i + \lambda_i$, con $a_i \in \mathbb{Z}$ y $\lambda_i \in [0,1]$. Por lo tanto

$$v + \Lambda = \sum a_i w_i + \sum \lambda_i w_i + \Lambda = \sum \lambda_i w_i + \Lambda.$$

Entonces $\pi(\sum \lambda_i w_i) = v + \Lambda$ y $\mathbb{C}^n/\Lambda$ es compacta. De esta forma concluimos que el toro $\mathbb{C}^n/\Lambda$ es una variedad compleja.

3. Funciones holomorfas y meromorfas sobre superficies de Riemann

En esta sección estudiaremos algunas propiedades heredadas de funciones holomorfas sobre superficies de Riemann tales como: continuación analítica o teorema de la identidad, el teorema del módulo máximo y el teorema de Liouville. Finalmente, determinaremos las funciones meromorfas sobre el toro complejo.

Definición 3.1. *Sean X, Y superficies de Riemann, $F : X \to Y$ una función y $p \in X$. Decimos que F es* **holomorfa** *en p, si existen cartas $\phi_1 : U_1 \to V_1$ en X y $\phi_2 : U_2 \to V_2$ en Y, con $p \in U_1$ y $F(p) \in U_2$ respectivamente, tales que*

$$\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : V_1 \subset \mathbb{C} \to V_2 \subset \mathbb{C}$$

es holomorfa en $\phi_1(p)$, en el sentido usual de variable compleja.

Sea F una función definida sobre un conjunto abierto W sobre una superficie de Riemann X, entonces decimos que F es **holomorfa en** W, si F es holomorfa en cada punto de W. Decimos que F es una aplicación **holomorfa de** X **en** Y, si es holomorfa en todo X. En particular, cuando $Y = \mathbb{C}$, decimos simplemente que F es una función holomorfa de X.

Ejemplo 3.2. *La función identidad $id : X \to X$ es una función holomorfa. Sea $p \in X$. Como X es una superficie de Riemann, existe una carta $\phi : U \to V$ de X con $p \in U$. Luego, tenemos que $\phi \circ id \circ \phi^{-1} = id : V \to V$ es claramente holomorfa.*

Ejemplo 3.3. *Sea $F : X \to Y$ una función entre superficies de Riemann. Las siguientes propiedades se satisfacen y, es un buen ejercicio para el lector verificarlas:*

(a) *F es holomorfa en $p \in X$ si y solo si para cada par de cartas $\phi_1 : U_1 \to V_1$ en X, con $p \in U_1$ y $\phi_2 : U_2 \to V_2$ en Y, con $F(p) \in Y$, la composición $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(p)$.*
(b) *La composición de funciones holomorfas es holomorfa: si $G : Y \to Z$ una función holomorfa entre superficies de Riemann, entonces $G \circ F : X \to Z$ es una función holomorfa.*
(c) *Si F es holomorfa en $p \in X$, entonces F es continua en p.*

Uno de los teoremas principales en la variable compleja es el teorema de continuación analítica (véase [5, teo. 6.1.1]), el cual afirma que si tenemos dos funciones holomorfas, definidas en una región del plano complejo y coinciden en un conjunto con un punto límite, entonces las funciones son iguales. Este teorema puede ser generalizado en el contexto de funciones holomorfas entre superficies de Riemann como se enuncia a continuación:

Teorema 3.4 (Teorema de la identidad)**.** *Sean $F, G : X \to Y$ dos funciones holomorfas entre superficies de Riemann. Si $F = G$ en un subconjunto infinito de X que contiene un punto límite, entonces $F = G$.*

Algunas equivalencias del teorema de la identidad son las siguientes:

(1) Existe un sucesión convergente $\{z_n\} \subset X$, con punto límite z y $F(z_n) = G(z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(2) Existe una vecindad W de z tal que $F = G$ en W.
(3) $F = G$ en X.

Las implicaciones (3) $\Rightarrow$ (2) y (2) $\Rightarrow$ (1) se verifican sin problemas. La idea de demostrar (1) $\Rightarrow$ (2) está en el hecho de encontrar cartas $\phi_1 : U_1 \to V_1$ de X con $z \in U_1$ y $\phi_2 : U_2 \to V_2$ de Y tal que las funciones holomorfas $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ y $\phi_2 \circ G \circ \phi_1^{-1}$ son iguales en la sucesión $\phi_1(z_n)$. Por el teorema de la identidad en $\mathbb{C}$, estas funciones deben ser iguales en V_1 y por lo tanto F y G lo son en U_1.

Como X es conexa, para ver (2) $\Rightarrow$ (3) es suficiente verificar que el conjunto

$$B = \{z \in X \mid F = G \text{ en una vecindad de } z\}.$$

es no vacío, abierto y cerrado. La parte compleja de este paso es demostrar que B es cerrado, sin embargo la demostración es similar al paso anterior.

Otro de los teoremas principales en la variable compleja es el teorema del módulo máximo (véase [5, teo. 2.5.1]) el cual afirma que una función holomorfa en un compacto alcanza su máximo en su frontera. En el contexto de funciones holomorfas sobre superficies de Riemann el teorema del módulo máximo se generaliza de la siguiente manera:

Teorema 3.5 (Teorema del módulo máximo)**.** *Sea $F : W \subset X \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, donde $W \subset X$ es un abierto conexo de X. Si existe un punto $p \in W$ tal que $|F(p)| \geq |F(x)|$, para todo $x \in W$, entonces F es constante en W.*

La idea de la demostración es aplicar el teorema del módulo máximo en $\mathbb{C}$ a la función holomorfa $F \circ \phi^{-1} : V \to \mathbb{C}$, donde $\phi : U \to V$ es un carta de X con $p \in U$ y U es conexo. Entonces, la función holomorfa $F \circ \phi^{-1}$ es constante en V, por lo tanto F es constante en U. Finalmente, por el teorema de la identidad F es contante en W. Como una consecuencia inmediata del teorema de módulo máximo, tenemos el teorema de Liouville para superficies de Riemann compactas.

Teorema 3.6 (Teorema de Liouville)**.** *Sea X una superficie de Riemann compacta. Si $F : X \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces F es constante.*

La demostración es una aplicación directa del teorema del módulo máximo en superficies de Riemann. Como F es holomorfa en una superficie de Riemann compacta entonces $|F|$ alcanza el máximo, por lo tanto F es constante.

3.1 Propiedades de funciones theta:

En esta subsección definiremos y daremos propiedades de funciones theta en el plano complejo, con el objetivo de calcular las funciones meromorfas sobre el toro complejo $\mathbb{C}/\Lambda$.

Sea $\tau = a + bi$ un número complejo con la parte imaginaria de τ positiva. Definimos la **función theta**, denotada por $\Theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, como

$$\Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i(n^2\tau + 2nz)), \text{para cada } z \in \mathbb{C}.$$

Resulta ser que la función theta es holomorfa: para ver esto demostraremos que theta converge absolutamente y uniformemente en $B = \overline{B_R(0)}$, la cerradura de una bola de radio $R > 0$ (véase [5, teo. 3.1.8]). Para cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos la función

$$\begin{array}{rcl} g_n : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \exp(\pi i(n^2\tau + 2nz)). \end{array}$$

La función g_n es entera (es decir, es holomorfa en todo $\mathbb{C}$), pues es composición de funciones enteras. Sea $z = x+iy \in \overline{B_R(0)}$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se satisface

$$|g_n(z)| \leq \frac{2}{b\pi n^2}.$$

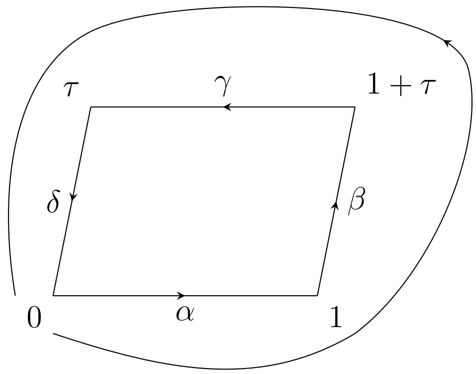
Por el criterio M de Weierstrass ([5, Teorema 3.1.7]), $\Theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n(z)$ converge absolutamente y uniformemente en B. Concluimos que Θ es una función holomorfa en $\mathbb{C}$ por el teorema de continuación analítica (véase [5, teo. 3.1.8]).

Usando propiedades de variable compleja e inducción matemática, obtenemos las siguientes propiedades:

(1) $\Theta(z + 1) = \Theta(z)$.
(2) $\Theta(z + \tau) = \exp(-\pi i(\tau + 2z))\Theta(z)$.
(3) $\Theta(z + m + n\tau) = \Theta(z + n\tau)$ para $m, n \in \mathbb{Z}$.
(4) $\Theta(z + r\tau) = \exp(-\pi i g(r, z, \tau))\Theta(z)$, para alguna función g que solo depende de z, τ, r.

(5) z_0 es un cero de Θ de orden k si y solo si $z_0 + m + n\tau$ es un cero de orden k, para $m, n \in \mathbb{Z}$.

Un buen ejercicio para el lector es verificar que $\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$ es un cero de Θ. Para demostrar que $\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$ es un cero simple integraremos sobre la retícula $\Lambda = \{1, \tau\}$. Definimos la curva ρ como $\alpha + \beta + \gamma + \delta$, donde



$$\begin{array}{ll} \alpha & : [0,1] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto t. \\ \beta & : [0,1] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto 1 + t\tau. \\ \gamma & : [0,1] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto (1-t) + \tau. \\ \delta & : [0,1] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto (1-t)\tau. \end{array}$$

Calculando las integrales de la función $\frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}$ sobre las caminos α, β, γ y δ, obtenemos que

$$\int_\gamma \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} dz = 2\pi i - \int_\alpha \frac{\Theta'}{\Theta}(z) dz \quad \text{y} \quad \int_\beta \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} dz \;=\; -\int_\delta \frac{\Theta'}{\Theta}(z) dz.$$

Sumando las integrales, obtenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\rho \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} dz = 1.$$

Teniendo en cuenta que la función Θ es holomorfa con al menos un cero en la retícula Λ, por el teorema de conteo de ceros y polos ([5, teo. 6.2.1]), concluimos que el único cero de Θ en la retícula Λ es $\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$ y su orden es 1.

Para determinar las funciones meromorfas sobre un toro complejo $\mathbb{C}/\Lambda$ es crucial la siguiente definición. Para $x \in \mathbb{C}$, definimos la función **theta trasladada**, denotada por $\Theta^{(x)}(z)$, como

$$\Theta^{(x)}(z) = \Theta(z - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - x).$$

Las funciones $\Theta^{(x)}(z)$ son holomorfas ya que son una composición de funciones holomorfas, y satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\Theta^{(x)}(z+1) = \Theta^{(x)}(z)$.
2. $\Theta^{(x)}(z+\tau) = -\exp((-2\pi i(z-x)))\Theta^{(x)}(z)$.
3. Los ceros de $\Theta^{(x)}(z)$ son simples y están dados por $x + m + n\tau$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$.

3.2 Funciones meromorfas sobre el toro complejo:

Utilizando las propiedades de las funciones theta trasladadas, calcularemos las funciones meromorfas sobre el toro complejo $\mathbb{C}/\Lambda$. Para este propósito comenzaremos enunciando la definición de una función meromorfa sobre una superficie de Riemann.

Definición 3.7. *Sea X una superficie de Riemann, $p \in X$ y W una vecindad agujerada de p. Sea $f : W \to \mathbb{C}$ una función.*

(1) *Decimos que f tiene una* **singularidad removible** *(respectivamente, un* **polo de orden** *k, una* **singularidad esencial***) en p si y solo si existe una carta $\phi : U \to V$ con $p \in U$ tal que $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad removible (respectivamente un polo de orden k, una singularidad esencial) en $\phi(p)$.*

(2) *Decimos que f es* **meromorfa** *en p si y solo si f es holomorfa en p, tiene una singularidad removible en p o tiene un polo en p.*

El estudio de funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann X está relacionado con el estudio de funciones holomorfas entre la superficie de Riemann X y la línea proyectiva $\mathbb{P}^1$.

Ejemplo 3.8. *Sea X una superficie de Riemann y f una función meromorfa sobre X. La función f induce la siguiente función:*

$$\begin{aligned} F : X &\to \mathbb{P}^1 \\ p &\mapsto [1 : f(p)] \end{aligned}$$

y es un buen ejercicio para el lector comprobar que de hecho es holomorfa.

Teorema 3.9 (Polos y ceros discretos)**.** *Sea f una función meromorfa sobre una superficie de Riemann X. Si f no es cero, entonces el conjunto de ceros y polos forman un conjunto discreto. En particular, si X es compacta entonces los conjuntos de ceros y polos son finitos y de la misma cardinalidad.*

Demostración. Por el ejemplo 3.8, f induce una función holomorfa $F : X \to \mathbb{P}^1$. Por el teorema de la identidad 3.4 aplicado a la función holomorfa F, tenemos que los conjuntos de ceros y polos son finitos. El hecho que el conjunto de ceros y polos tiene la misma cardinalidad es una consecuencia del teorema del residuo en superficies de Riemann (véase [3, teo. 4.9]). □

Ahora definiremos el orden de una función meromorfa en un punto sobre una superficie de Riemann. Sea f una función meromorfa definida en una vecindad agujerada de p. Sea $\phi : U \to V$ una carta de X, con $p \in U$; pensando $z = \phi(x)$ para x cerca de p, tenemos que $f \circ \phi^{-1}$ es meromorfa en una vecindad de $z_0 = \phi(p)$. Podemos expandir $f \circ \phi^{-1}$ en una serie de Laurent cerca de z_0,

$$f \circ \phi^{-1}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n.$$

El orden de f en p está definido como $\mathrm{ord}_p(f) = \mathrm{ord}_{z_0}(f \circ \phi^{-1})$. Nótese que se hace abuso de notación pero no hay peligro de confusión pues se dirá explícitamente cuando estemos trabajando con funciones meromorfas sobre superficies de Riemann.

Las funciones periódicas son importantes en matemáticas ya que al conocer su comportamiento en un periodo determinado, podemos saber como se comportan en general. En nuestro caso nos interesan las funciones Λ-periódicas, entendiendo a una **función Λ-periódica** $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como aquella que satisface $f(z) = f(z + \lambda)$ para cada $z \in \mathbb{C}$ y cada $\lambda \in \Lambda$.

Teorema 3.10. *Si $\{x_1, \cdots, x_n\}$, $\{y_1, \cdots, y_m\}$ son conjuntos de números complejos, entonces el cociente de funciones theta trasladadas*

$$R(z) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \Theta^{(x_i)}(z)}{\prod_{i=1}^{m} \Theta^{(y_i)}(z)},$$

es una función Λ-periódica y meromorfa sobre $\mathbb{C}$. Más aún, $R(z)$ desciende a una función meromorfa sobre $\mathbb{C}/\Lambda$ si y solo si $n = m$ y $\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \in \mathbb{Z}$. Los ceros y polos de $R(z)$ en $\mathbb{C}/\Lambda$ están dados por $p_i = \pi(x_i)$ y $q_i = \pi(y_i)$ respectivamente.

Demostración. $R(z)$ es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ ya que es cociente de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$. Tenemos que $R(z)$ es meromorfa en $\mathbb{C}/\Lambda$ si y solo si la función $R(z)$ es periódica con respecto a la retícula Λ; es decir, $R(z)$ es meromorfa en X si y solo si $R(z + 1) = R(z)$ y $R(z+\tau) = R(z)$. Como $\Theta^{(x)}(z+1) = \Theta^{(x)}(z)$, para todo $x \in \mathbb{C}$, tenemos que $R(z+1) = R(z)$. Ahora, analizaremos la condición $R(z+\tau) = R(z)$:

$$R(z + \tau) = (-1)^{m-n} \exp(-2\pi i[(m - n)z + \sum_{j}^{m} y_j - \sum_{i}^{n} x_i])R(z).$$

Por lo tanto $R(z)$ es meromorfa sobre $\mathbb{C}/\Lambda$ si y solo si

$$(-1)^{m-n} \exp(-2\pi i[(m - n)z + \sum_{j=1}^{m} y_j - \sum_{i=1}^{n} x_i]) = 1. \tag{1}$$

Finalmente, se verifica que la ecuación (1) es equivalente a $n = m$ y $\sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{i=1}^{n} x_i \in \mathbb{Z}$. $\square$

Teorema 3.11. *Cada función no constante y meromorfa sobre un toro complejo $X = \mathbb{C}/\Lambda$ es un cociente de funciones theta trasladadas.*

Demostración. Sean f una función meromorfa no constante sobre $\mathbb{C}/\Lambda$, $p_1, \dots, p_n$ los ceros de f y $q_1, \dots, q_n$ los polos de f (véase el teorema 3.9). Consideramos a $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ la función cociente, escogemos $2n$ valores $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$ tales que $\pi(x_i) = p_i$ y $\pi(y_i) = q_i$. Afirmamos que $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i$.

Asumimos lo contrario, es decir que $\sum_{i=1}^n p_i \neq \sum_{i=1}^n q_i$ en $\mathbb{C}/\Lambda$. Como $\mathbb{C}/\Lambda$ es un grupo y $\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^n q_i \in X$, elegimos puntos p_0 y q_0 en $\mathbb{C}/\Lambda$ tales que

$$\sum_{i=0}^n p_i = \sum_{i=0}^n q_i \quad \text{en } \mathbb{C}/\Lambda.$$

Escogemos $x_0, y_0 \in \mathbb{C}$ tales que $\pi(x_0) = p_0$ y $\pi(y_0) = q_0$. Definimos

$$R(z) = \frac{\prod_{i=0}^n \Theta^{(x_i)}(z)}{\prod_{i=0}^n \Theta^{(y_i)}(z)}.$$

La función $g = \frac{R}{f}$ es meromorfa e induce un isomorfismo $G : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^1$ pues g tiene un solo cero simple en p_0 y un solo polo simple en q_0, lo cual implica que $\mathbb{C}/\Lambda$ y $\mathbb{P}^1$ tienen el mismo género. Esto nos da una contradicción ya que $\mathbb{C}/\Lambda$ tiene género 1 y la línea proyectiva $\mathbb{P}^1$ tiene género 0. Concluimos que $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i$.

Sea

$$\tilde{R}(z) = \frac{\prod_{i=1}^n \Theta^{(x_i)}(z)}{\prod_{i=1}^n \Theta^{(y_i)}(z)}.$$

Por el teorema 3.10, $\tilde{R}(z)$ es una función meromorfa sobre $\mathbb{C}/\Lambda$ sin ceros y sin polos en $\mathbb{C}/\Lambda$. En particular, $\frac{f}{\tilde{R}}$ es holomorfa. Usando el teorema de Liouville $\frac{f}{\tilde{R}}$ es constante. Concluimos que $f(z) = c\tilde{R}(z)$, para algún $c \in \mathbb{C}$. □

4. Divisores y el teorema de Abel

El principal objetivo de esta sección es demostrar el teorema de Abel para divisores sobre el toro complejo el cual caracteriza a los divisores principales.

Definición 4.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Denotamos por $\mathbb{Z}^X$ el conjunto de funciones de X a $\mathbb{Z}$. Dada una función $D : X \to \mathbb{Z}$, el* **soporte** *de D, denotado por $Supp(D)$, es el conjunto de puntos*

$$Supp(D) = \{p \in X \mid D(p) \neq 0\}.$$

Un **divisor** *sobre X es una función $D : X \to \mathbb{Z}$ con soporte finito. Denotamos por $Div(X)$ al conjunto de divisores sobre X.*

Para $i = 1, 2$ consideramos dos divisores $D_i : X \to \mathbb{Z}$, así, tenemos que $\mathrm{Supp}(D_i)$ es un conjunto discreto. Dado que

$$\mathrm{Supp}(D_1 - D_2) \subset \mathrm{Supp}(D_1) \cup \mathrm{Supp}(D_2),$$

tenemos que $D_1 - D_2$ es un divisor. De esta manera, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2. $\mathrm{Div}(X)$ *es un grupo abeliano.*

Denotaremos al divisor $D : X \to \mathbb{Z}$ como la suma formal

$$D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p.$$

Definición 4.3. *El* **grado de un divisor** *D sobre una superficie de Riemann compacta, denotado por $deg(D)$, es la suma de los valores de D:*

$$deg(D) = \sum_{p \in X} D(p).$$

El grado define un homomorfismo de grupos $\deg : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$. En efecto, sean $D_i = \sum_{p \in X} D_i(p)p$ divisores sobre X, con $i = 1, 2$. Entonces

$$\begin{aligned} \deg(D_1 + D_2) &= \sum_{p \in X} D_1(p) + D_2(p) \\ &= \sum_{p \in X} D_1(p) + \sum_{p \in X} D_2(p) \\ &= \deg(D_1) + \deg(D_2). \end{aligned}$$

Definición 4.4. *Sea f una función meromorfa sobre una superficie de Riemann compacta X. El* **divisor principal** *determinado por f, denotado por $div(f)$, está definido por*

$$div(f) = \sum_{p \in X} ord_p(f) \cdot p.$$

Notemos que $\mathrm{div}(f)$ es un divisor pues en una superficie de Riemann compacta el conjunto de ceros y polos es un conjunto finito. Por el teorema 3.9, los divisores principales tienen grado cero. En efecto:

$$\deg(\mathrm{div}(f)) = \sum_{p \in X} \mathrm{div}(f)(p) = \sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p(f) = 0.$$

Definición 4.5. *Sean D_1 y D_2 divisores sobre una superficie de Riemann X. Decimos que D_1 y D_2 son linealmente equivalentes, denotado por $D_1 \sim D_2$, si existe una función meromorfa f tal que $div(f) = D_1 - D_2$.*

Los divisores linealmente equivalentes tienen el mismo grado y utilizando las siguientes propiedades:

- $\operatorname{div}(fg) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)$
- $\operatorname{div}(\frac{f}{g}) = \operatorname{div}(f) - \operatorname{div}(g)$
- $\operatorname{div}(\frac{1}{f}) = -\operatorname{div}(f)$

se verifica que la equivalencia lineal es una relación de equivalencia sobre el grupo de divisores de X.

Cabe señalar que los divisores principales sobre la línea proyectiva $\mathbb{P}^1$ están determinados por su grado. Sin embargo, para otras superficies de Riemann esta condición es necesaria pero no suficiente. El teorema de Abel da las condiciones suficientes y necesarias para determinar cuando un divisor es principal. Utilizando herramientas de variable compleja daremos una demostración del teorema de Abel para toros complejos.

Consideramos el toro complejo $X = \mathbb{C}/\Lambda$, con retícula $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$. Recordemos que X tiene estructura de grupo, esto permite definir un homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{rcl} A : \operatorname{Div}(X) & \to & X \\ D & \mapsto & \displaystyle\sum_{p \in X} D(p) \cdot p, \end{array}$$

donde la suma de la derecha es la suma en X como grupo.

Teorema 4.6 (Teorema de Abel para el toro complejo)**.** *Un divisor D sobre el toro complejo $X = \mathbb{C}/\Lambda$ es principal si y solo si* $\deg(D) = 0$ *y* $A(D) = 0$.

Demostración. Supongamos que D tiene grado cero y $A(D) = 0$. Demostraremos que D es un divisor principal. Como D tiene grado cero, podemos escribir a D como $\sum_i (p_i - q_i)$, donde $p_i, q_i \in X$. Escogemos $z_i, w_i \in \mathbb{C}$ tales que $\pi(z_i) = z_i + \Lambda = p_i$ y $\pi(w_i) = w_i + \Lambda = q_i$. Como $A(D) = 0$, entonces $w = \sum_i (z_i - w_i) \in \Lambda$. Cambiando z_1 por $z_1 - w$, podemos suponer que $\sum_i (z_i - w_i) = 0$; nótese que este cambio puede hacerse pues $\pi(z_1 - w) = z_1 - w + \Lambda = z_1 + \Lambda = p_1$. Por el teorema 3.10, la función theta trasladada

$$h(z) = \frac{\prod_i \Theta^{(z_i)}(z)}{\prod_i \Theta^{(w_i)}(z)}$$

es meromorfa y Λ-periódica sobre $\mathbb{C}$; además, h determina una función meromorfa sobre $\mathbb{C}/\Lambda$ con $\operatorname{div}(h) = D$.

Ahora supongamos que D es un divisor principal. Escogemos una función holomorfa f tal que $\operatorname{div}(f) = D$, entonces $\deg(D) = 0$. Finalmente demostraremos que $A(D) = 0$. Sea π la función cociente. Definimos $h = f \circ \pi$. Tenemos que h es una función meromorfa sobre $\mathbb{C}$ y Λ-periódica, pues f y π son meromorfas y π es Λ-periódica. Para $p \in \mathbb{C}$, denotamos por γ_p al paralelogramo con vértices en $p, p+1, p+1+\tau$ y $p+\tau$. Dado que los ceros y polos son discretos, escogemos un punto $p \in \mathbb{C}$ tal que h no tiene ceros ni polos en γ_p. Sea $x \in \mathbb{C}$, luego, x es un cero o un polo de h si y solo si $x + \Lambda$ es un cero o polo de f. Entonces los ceros y polos de f en $\mathbb{C}/\Lambda$ están en correspondencia biunívoca con los ceros y polos de h dentro de γ_p, más aún, si x es un cero o polo de h, se tiene que $\operatorname{ord}_x(h) = \operatorname{ord}_{x+\Lambda}(f)$. Un buen ejercicio para el lector es comprobar que

$$\int_{\gamma_p} z\frac{h'(z)}{h(z)}dz \in \Lambda.$$

Utilizando el teorema de residuos en $\mathbb{C}$, tenemos que

$$\int_{\gamma_p} z\frac{h'(z)}{h(z)}dz = \sum_{z_o \in \operatorname{Int}(\gamma_p)} \operatorname{ord}_{z_0}(h) z_0.$$

Dado que $\operatorname{ord}_{z_0}(h) = \operatorname{ord}_{z_0+\Lambda}(f)$, tenemos que

$$\sum_{x \in X} \operatorname{ord}_x(f)x = 0 \in \mathbb{C}/\Lambda.$$

Se concluye $A(D) = A(\operatorname{div}(f)) = 0$. □

Dado que $\deg(\cdot)$ y $A(\cdot)$ son homomorfismos de grupos, tenemos que el teorema de Abel determina cuando dos divisores son linealmente equivalentes.

Corolario 4.7. *Si D_1 y D_2 son dos divisores sobre el toro complejo $\mathbb{C}/\Lambda$. Entonces D_1 es linealmente equivalente a D_2 si y solo si* $\deg(D_1) = \deg(D_2)$ *y* $A(D_1) = A(D_2)$.

Definimos el conjunto

$$\operatorname{Div}^0(X) := \{D \in \operatorname{Div}(X) \mid \deg(D) = 0\}.$$

Notemos que $\operatorname{Div}^0(X)$ es un subgrupo de $\operatorname{Div}(X)$ pues es el núcleo del homomorfismo grado. En particular, el teorema de Abel da la siguiente caracterización del toro complejo en términos de divisores de grado cero.

Corolario 4.8. *El homomorfismo A induce un isomorfismo de grupos*

$$\begin{aligned} \tilde{A} : \operatorname{Div}^0(X)/\sim \;&\to\; X \\ [D]_\sim \;&\mapsto\; A(D). \end{aligned}$$

Demostración. Sean D_1 y D_2 divisores de grado cero y linealmente equivalentes, por el corolario 4.7 tenemos que $A(D_1) = A(D_2)$ y por eso $\tilde{A}$ está bien definido. Además, como A es un homomorfismo de grupos, entonces $\tilde{A}$ también lo es. Supongamos que $A(D_1) = A(D_2)$. Por el corolario 4.7 tenemos que $\tilde{A}$ es inyectivo. Si $p \in X$, entonces el divisor $D = p - 1 \cdot 0$ tiene grado cero y $\tilde{A}([D]_\sim) = A(D) = p$. Por lo tanto $\tilde{A}$ es sobreyectivo. $\square$

5. Agradecimientos

Los autores agradecen de manera especial a los revisores del artículo por sus comentarios, sin duda las aportaciones ayudaron a mejorar considerablemente el mismo. También, agradecemos a María Cecilia Martínez Reyes por su valiosa ayuda en la elaboración de los diagramas.

Bibliografía

[1] J. Arbarello E.; Cornalba M.; Griffiths P. A.; Harris, *Geometry of algebraic curves vol. i*, 1.ª ed., Springer New York, NY, 1985.
[2] H. Birkenhake, C.; Lange, *Complex abelian varieties*, 2.ª ed., Springer Berlin, Heidelberg, 2004.
[3] P. A. Griffiths, *Introduction to algebraic curves*, Transl. Math. Monogr., 76 American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.
[4] R. C. Gunning, *Lectures on Riemann surfaces*, 2.ª ed., Princeton Mathematical Notes Princeton University Press, Princeton, NJ,, 1966.
[5] M. J. Marsden, J. E.; Hoffman, *Basic complex analysis*, 3.ª ed., W. H. Freeman and Company, New York, 1987.
[6] D. Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics 5, Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1974.
[7] Y. Nagashima, «Abel's theorem for divisors on an arbitrary compact complex manifold», *J. Math. Soc. Japan*, vol. 51, núm. 4, 1999, 1015–1028.