Miscelánea Matemática **78** (2024) 1-16 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7801

Introducción a los clones de funciones

Carlos Galeana Hernández
Departamento de Matemáticas, ITAM
charleehp@gmail.com
y
Edith Vargas-García
Departamento de Matemáticas, ITAM
edith.vargas@itam.mx

1. Introducción

Si bien la palabra *clon* está generalmente asociada a ramas como la biología y la genética, es también un concepto de importancia en las matemáticas, especialmente en el ámbito del *Álgebra Universal*.

El nombre clon apareció por primera vez, en términos matemáticos, en 1965, en la monografía de P.M. Cohn [4], quien atribuyó la noción a sus predecesores: P. Hall, E. Post y K. Menger. Otro nombre para un clon es *Funktionenalgebra* (álgebra de funciones), que se utiliza en [11] y [10]. En términos generales, un clon es un conjunto de *funciones finitarias* sobre un conjunto no vacío A, que es cerrado bajo la *composición* y que contiene a todas *las proyecciones*.

Los clones pueden ser ordenados mediante la contención, con dicho orden formamos un *retículo*. Uno de los principales problemas en la *Teoría de Clones* ha sido dar la descripción del retículo de todos los clones sobre un conjunto A. Tratar de describir dicho retículo ha probado ser una tarea muy complicada, tal dificultad yace en el hecho de que incluso si el conjunto A es finito, el conjunto de clones es infinito. Aun así, Emil L. Post demostró en [12] que si A es un conjunto con dos elementos, el retículo de clones sobre A es infinito, pero es numerable. Más aún, en 1941 proporcionó una descripción completa de dicho retículo (véase figura 2). Una descripción similar del retículo de clones sobre conjuntos con tres o más elementos aún no existe y parece una tarea imposible ya que el conjunto de clones sobre dichos conjuntos no es numerable [18].

Palabras clave: Clones, Clones maximales, Clones minimales y Clones de Polimorfismos.

Ante tal panorama, ¿cómo se puede proceder a estudiar el retículo de clones sobre un conjunto de tres o más elementos? Una posibilidad es restringir el conjunto a estudiar y considerar solo a una sección del retículo. Esto puede lograrse, por ejemplo, si se consideran solo a los clones que cumplan con alguna propiedad dada.

Este artículo pretende ser una breve introducción a la teoría de clones. Con el fin de proporcionar una definición formal de un clon y adentrarnos a la Teoría de Clones, en la sección 2 damos las nociones principales que serán necesarias para comprender dicho concepto, posteriormente presentaremos algunos ejemplos de conjuntos de funciones que forman clones. En la sección 3 mostraremos el retículo descrito por Emil L. Post y presentaremos algunos resultados generales relacionados con los *átomos* y *coátomos* del retículo de clones, es decir con los clones *maximales* y *minimales*. Finalmente, en la sección 4 presentaremos la herramienta más importante para el estudio de clones, que es la *conexión de Galois* $\mathrm{Pol} - \mathrm{Inv}$ entre operaciones y relaciones, inducida por la relación de preservación (véase [6, pp.155-156] para la definición de conexión de Galois). Esta conexión ha sido nombrada «La conexión de Galois más básica en álgebra» [9].

A lo largo del texto necesitaremos las siguiente nociones. Si P es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación binaria sobre P, que es *reflexiva, antisimétrica y transitiva*, entonces $(P, \leq)$ se define como un **conjunto parcialmente ordenado** y a la relación $\leq$ se le denomina **orden (parcial)**. Un conjunto parcialmente ordenado es un **retículo** si cumple que para cualquier par de elementos existe tanto su ínfimo como su supremo. Más aún, es un **retículo completo** si para cualquier subconjunto de elementos existe tanto el ínfimo como el supremo de dicho subconjunto.

2. Definición y ejemplos de clones.

Comenzaremos estudiando algunos conceptos básicos necesarios para presentar la definición de clon.

La suma, la multiplicación, la división, incluso operaciones más complejas como la composición de funciones, son todas ellas ejemplos de *operaciones binarias*. Se les llama binarias porque operan sobre dos elementos. También hay *operaciones unarias* como el inverso aditivo. Naturalmente, también es posible definir funciones que operen sobre cualquier cantidad de elementos como veremos a continuación.

Definición 2.1. Dado $n \in \mathbb{N}_+$ un *número natural positivo*, una **función (u operación) n-aria** sobre un conjunto no vacío A es de la forma $f : A^n \to A$.

Ejemplo 2.2.

1. La función $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) := -x$ es una función unaria.
2. La función $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f_2(x, y) := x + y$ es una función binaria.
3. La función $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f_3(x, y, z) := xy + z$ es una operación ternaria.
4. La función $f_4 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por
$$f_4(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
es una función n-aria.

Más adelante, estudiaremos no solo a funciones n-arias particulares, sino también a conjuntos, potencialmente infinitos, de funciones n-arias. Será útil entonces que tengamos una notación para el conjunto de todas las funciones n-arias sobre un conjunto A.

Definición 2.3. Dado $n \in \mathbb{N}_+$, denotamos al **conjunto de todas las funciones n-arias sobre un conjunto** A por
$$\mathcal{O}_A^{(n)} = \{f : A^n \to A\}.$$
Si $f \in \mathcal{O}_A^{(n)}$, decimos que f es una **función de aridad** n. Además, definimos al conjunto
$$\mathcal{O}_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} \mathcal{O}_A^{(n)},$$
como el **conjunto de todas las funciones finitarias sobre** A.

Ejemplo 2.4. Tomando a las funciones definidas en los ejemplos anteriores podemos escribir: $f_1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}^{(1)}$, $f_2 \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}^{(2)}$, $f_3 \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}^{(3)}$ y $f_4 \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}^{(n)}$, de este modo $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$.

El concepto de clon lo podemos pensar como una generalización de monoides de funciones, para ello necesitaremos generalizar las ideas de función identidad y composición para funciones de cualquier aridad.

Definición 2.5. Sea $n \in \mathbb{N}_+$. Para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ definimos a la **j-ésima proyección** de A^n como la función n-aria $e_j^n : A^n \to A$ dada por
$$e_j^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) := x_j.$$

Además, denotaremos al **conjunto de todas las proyecciones** de A como
$$\mathcal{J}_A := \{e_j^n \mid n \in \mathbb{N}_+, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

En particular, en $\mathcal{O}_A^{(1)}$ hay solo una proyección, e_1^1, que es la función identidad. En el siguiente ejemplo damos algunas proyecciones.

Ejemplo 2.6. Sea $A = \{0, 1, 2, 3\}$, entonces

- La proyección $e_1^2(2, 3) = 2$, ya que 2 es la primera entrada.
- La proyección $e_2^2(2, 3) = 3$, pues 3 es la segunda entrada.
- La proyección $e_3^5(0, 2, 1, 3, 1) = 1$, porque 1 es la tercera entrada.

Abajo presentamos una forma de definir la composición de una función en $\mathcal{O}_A^{(n)}$ con n funciones en $\mathcal{O}_A^{(m)}$.

Definición 2.7. Sean $f \in \mathcal{O}_A^{(n)}$ y $g_1, g_2, \ldots, g_n \in \mathcal{O}_A^{(m)}$, definimos a la **composición** de la función f con las funciones $g_1, g_2, \ldots, g_n$ como la función $f[g_1, g_2, \ldots, g_n] \in \mathcal{O}_A^{(m)}$ dada por:

$$f[g_1, g_2, \ldots, g_n](x_1, \ldots, x_m) := f(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m)).$$

Ejemplo 2.8. Sean $f_2 \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}^{(2)}$ y $f_3 \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}^{(3)}$ las funciones del ejemplo 2.2 y la proyección $e_1^3 \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}^{(3)}$. La composición de f_2 con f_3 y e_1^3 es

$$f_2[f_3, e_1^3](x, y, z) = f_2(f_3(x, y, z), e_1^3(x, y, z)) = f_2(xy+z, x) = xy+z+x.$$

Habiendo estudiado los conceptos de composición para funciones n-arias y el de las proyecciones, estamos en condiciones de enunciar la definición de un clon.

Definición 2.9. Sea $F \subseteq \mathcal{O}_A$ un conjunto de operaciones sobre A. Denotaremos a $F^{(k)} := \{f \in F \mid f \in \mathcal{O}_A^{(k)}\}$ como el conjunto de todas las funciones de aridad k en F.

Decimos que F es un **clon** si cumple las siguientes dos propiedades:

1. F contiene a todas las proyecciones, es decir, $\mathcal{J}_A \subseteq F$.
2. F es cerrado bajo la composición, es decir, para todo $f \in F^{(n)} \subseteq F$ y $g_1, g_2, \ldots, g_n \in F^{(m)} \subseteq F$ se cumple $f[g_1, g_2, \ldots, g_n] \in F^{(m)}$.

Es fácil ver que el conjunto $\mathcal{O}_A$ es un clon, pues $\mathcal{J}_A \subseteq \mathcal{O}_A$ y la composición de cualesquiera funciones da como resultado una función en $\mathcal{O}_A$. Cuando $F \subseteq \mathcal{O}_A$ es clon, lo denotamos por $F \leq \mathcal{O}_A$. Si F es un clon distinto a $\mathcal{O}_A$, lo denotamos por $F \lneqq \mathcal{O}_A$.

En el siguiente lema mostraremos que el conjunto de todas las proyecciones, $\mathcal{J}_A$, también es un clon.

Lemma 2.10. *El conjunto $\mathcal{J}_A$ es un clon.*

Demostración. El conjunto $\mathcal{J}_A$ contiene a todas las proyecciones ya que $\mathcal{J}_A \subseteq \mathcal{J}_A$.

Sea $e_k^n \in \mathcal{J}_A$ la k-ésima proyección de A^n y sean n proyecciones de A^m: $e_{i_1}^m, e_{i_2}^m, \ldots, e_{i_n}^m \in \mathcal{J}_A$, con $i_j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Entonces la composición

$$\begin{aligned} e_k^n[e_{i_1}^m, \ldots, e_{i_n}^m](x_1, \ldots, x_m) &= e_k^n(e_{i_1}^m(x_1, \ldots, x_m), \ldots, e_{i_n}^m(x_1, \ldots, x_m)) \\ &= e_k^n(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = x_{i_k} \\ &= e_{i_k}^m(x_1, \ldots, x_m). \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que $e_k^n[e_{i_1}^m, \dots, e_{i_n}^m] = e_{i_k}^m$, es decir, la composición es una proyección. □

Hasta ahora hemos visto que $\mathcal{J}_A$ y $\mathcal{O}_A$ son clones, a continuación damos otro ejemplo de clones.

Ejemplo 2.11. En este ejemplo veremos que el conjunto de las funciones monótonas forma un clon, para lo cual comenzaremos definiendo el concepto de monotonía para funciones n-arias, sobre un conjunto A con una relación de orden $\leq$.

Para $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in A^n$ decimos que

$$(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n)$$

si $x_i \leq y_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. De este modo, una función $f \in \mathcal{O}_A^{(n)}$ es **monótona** si y solo si:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \implies f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

El conjunto

$$\mathbb{M} := \{f \in \mathcal{O}_A \mid f \text{ es } \textbf{monótona}\} \subseteq \mathcal{O}_A$$

de **todas las funciones monótonas en** A es un clon. Para demostrarlo, debemos comprobar que $\mathbb{M}$ cumple con las dos propiedades de la definición 2.9.

1. Probaremos que $\mathcal{J}_A \subseteq \mathbb{M}$. Sean $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in A^n$ tales que $(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n)$ y sea $e_i^n \in \mathcal{J}_A$ cualquier proyección en A. Tenemos entonces que:

   $$e_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i \leq y_i = e_i^n(y_1, \dots, y_n).$$

   Por lo tanto la proyección e_i^n es una función monótona, y como esto se cumple para cualquier proyección, se sigue que $\mathcal{J}_A \subseteq \mathbb{M}$.
2. Veamos que $\mathbb{M}$ es cerrado bajo la composición. Sean $f \in \mathbb{M}^{(n)}$ y $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{M}^{(m)}$. Sean $(x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m) \in A^m$ cualesquiera dos tuplas tales que $(x_1, \dots, x_m) \leq (y_1, \dots, y_m)$. Dado que g_i es monótona, entonces para toda $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que

   $$g_i(x_1, \dots, x_m) \leq g_i(y_1, \dots, y_m).$$

   Dado que f es también una función monótona, se tiene que

   $$f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)) \leq \\ f(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m)),$$

   lo que implica:

   $$f[g_1, \dots, g_n](x_1, \dots, x_m) \leq f[g_1, \dots, g_n](y_1, \dots, y_m).$$

De lo anterior se sigue que $f[g_1, \ldots, g_n]$ es una función monótona. Por lo tanto, $\mathbb{M}$ es cerrado bajo la composición.

Existen más ejemplos de clones, a continuación enlistaremos solo algunos de ellos. El lector interesado puede probar que dichos conjuntos forman clones.

Ejemplo 2.12.

- El conjunto $\mathbb{S} := \{f \in \mathcal{O}_A \mid f \text{ es conservativa}\}$ de **todas las funciones conservativas** en A forma un clon, donde $f \in \mathcal{O}_A^{(n)}$ es **conservativa** si para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n$ se cumple que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
- El conjunto de **todas las operaciones idempotentes** en A es un clon, donde $f \in \mathcal{O}_A^{(n)}$ es **idempotente** si cumple $f(x, x, \ldots, x) = x$ para todo $x \in A$.
- Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, **todas las operaciones continuas** en X forman un clon, llamado el clon de $(X, \mathcal{T})$. Empezando con la monografía [15], hay una serie de artículos que discuten la información topológica que este clon contiene sobre el espacio. En [16] se da un resumen con resultados en esta dirección.

3. El retículo de clones

La contención induce un orden sobre los clones de un conjunto A. Si definimos a

$$L_A := \{F \subseteq \mathcal{O}_A \mid F \text{ es clon}\}$$

como el **conjunto de todos los clones** en A, entonces $(L_A, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Más aún, $\mathcal{L}_A = (L_A, \subseteq)$ forma un *retículo completo* cuyo elemento mínimo es $\mathcal{J}_A$ y cuyo elemento máximo es $\mathcal{O}_A$. Con el fin de describir al ínfimo y supremo de parejas de elementos en el retículo, necesitaremos los siguientes resultados y definiciones.

Proposición 3.1. *Sean $C_1, C_2 \leq \mathcal{O}_A$ cualesquiera dos clones, entonces $C_1 \cap C_2$ es también un clon.*

Demostración. Veremos que $C_1 \cap C_2$ cumple las dos propiedades de un clon.

1. Dado que C_1 y C_2 son clones, tenemos que $\mathcal{J}_A \subseteq C_1$ y $\mathcal{J}_A \subseteq C_2$. Por lo tanto, $\mathcal{J}_A \subseteq C_1 \cap C_2$.
2. Sean $f \in (C_1 \cap C_2)^{(n)}$ y $g_1, g_2, \ldots, g_n \in (C_1 \cap C_2)^{(m)}$. Entonces $f, g_1, g_2, \ldots, g_n \in C_1$ y $f, g_1, g_2, \ldots, g_n \in C_2$. Ya que C_1 y C_2 son clones, tenemos que $f[g_1, g_2, \ldots, g_n] \in C_1$ y $f[g_1, g_2, \ldots, g_n] \in C_2$.

Por lo tanto, $f[g_1, g_2, \ldots, g_n] \in C_1 \cap C_2$, obteniéndose que $C_1 \cap C_2$ es cerrado bajo la composición. $\square$

Observación 3.2. La proposición anterior puede ser generalizada para mostrar que la intersección de un conjunto arbitrario de clones es a su vez un clon.

Cualquier conjunto F de funciones sobre un conjunto A está contenido en al menos un clon: $\mathcal{O}_A$, por lo que es natural preguntarse cuál es el clon *más pequeño* que contiene a F. Para dicho propósito introducimos la siguiente noción.

Definición 3.3. Sea $F \subseteq \mathcal{O}_A$. Definimos al **clon generado por F**, denotado por $\langle F\rangle$, como la intersección de todos los clones en $\mathcal{O}_A$ que contienen a F. Es decir,

$$\langle F\rangle := \bigcap\{C \leq \mathcal{O}_A \mid F \subseteq C\}.$$

La definición anterior tiene sentido gracias a la proposición 3.1, obteniéndose que $\langle F\rangle$ es el **clon más pequeño** que contiene a F, esto significa que para cualquier clon $C \leq \mathcal{O}_A$, tal que $F \subseteq C$, se cumple que $\langle F\rangle \subseteq C$. Notemos que si $F \leq \mathcal{O}_A$ es clon, entonces $F = \langle F\rangle$.

Para el retículo de clones, definimos al ínfimo y supremo de cualesquiera dos clones $F, G \in L_A$ sobre A como sigue:

$$\begin{aligned} F \wedge G &:= F \cap G. && \text{Ínfimo,} \\ F \vee G &:= \langle F \cup G\rangle. && \text{Supremo.} \end{aligned}$$

Más aún, definimos el ínfimo y el supremo de cualquier conjunto de clones $S \subseteq L_A$ como:

$$\bigwedge S := \bigcap_{F\in S} F,$$

$$\bigvee S := \left\langle \bigcup_{F\in S} F \right\rangle.$$

A continuación definiremos los átomos y co-átomos del retículo $\mathcal{L}_A$.

Definición 3.4. Sean A cualquier conjunto no vacío y $F \leq \mathcal{O}_A$ un clon. Decimos que $F \neq \mathcal{O}_A$ es un **clon maximal o co-átomo** si para cualquier clon C se cumple que

$$F \subsetneqq C \Rightarrow C = \mathcal{O}_A.$$

Es decir, el único clon que contiene propiamente a F es $\mathcal{O}_A$.

Similarmente, decimos que $F \neq \mathcal{J}_A$ es un **clon minimal o átomo** si para cualquier clon C se cumple que

$$C \subsetneqq F \Rightarrow C = \mathcal{J}_A.$$

En la figura 1 mostramos el lugar que ocupan los clones maximales y minimales en el retículo de clones.

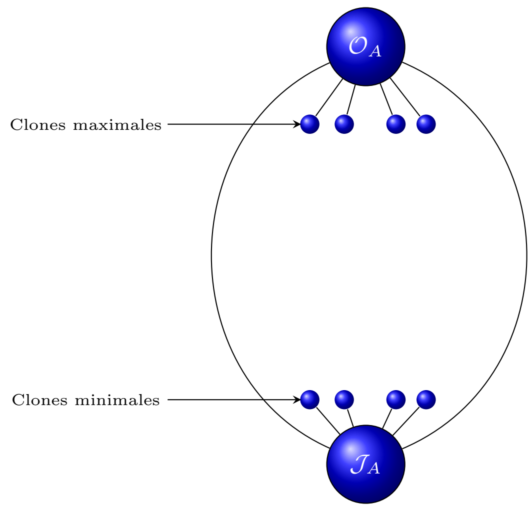

Figura 1. Clones maximales y minimales en el retículo de clones de un conjunto A.

La teoría de clones estudia principalmente el retículo $\mathcal{L}_A$ cuando A es finito, aunque también se ha investigado dicho retículo cuando A es infinito (véase [7] y sus referencias).

Para $|A| = 1$, el retículo de clones contiene un solo elemento (notar que en este caso $\mathcal{J}_A = \mathcal{O}_A$). Cuando $|A| = 2$, dicho retículo fue completamente descrito por Emil Post en [12]. Es infinito, pero numerable. En la figura 2 se muestra el retículo, el que contiene 8 átomos y 5 co-átomos. Es infinito debido a la existencia de 8 cadenas infinitas de clones generados por funciones de umbral (threshold functions) [12].

Sin embargo, cuando $|A| > 2$, el retículo ya no es numerable y se sabe muy poco sobre su estructura. Incluso cuando $|A| = 3$, parece imposible describir $\mathcal{L}_A$ completamente. Además de los tamaños de estos retículos, el siguiente resultado indica que sus estructuras son muy complejas: para $|A| \geq 4$, todo producto numerable de retículos finitos es un subretículo de $\mathcal{L}_A$ (véase [2]). Por lo tanto, la investigación en teoría de clones se ha dirigido a objetivos mucho más modestos, como lo es el describir los átomos y co-átomos de retículo $\mathcal{L}_A$, que naturalmente nos llevan a las siguientes preguntas.

¿Podemos describir a los clones maximales?

La respuesta es *Sí* pues Emil Post en [12] describió todos los clones maximales en el retículo cuando $|A| = 2$. Para $|A| = 3$, en 1958 Jablonskiĭ caracterizó todos los clones maximales y siete años después, en 1965, Ivo Rosenberg resolvió el problema de caracterizar todos los clones maximales para todo conjunto finito A, en su famosa tesis doctoral

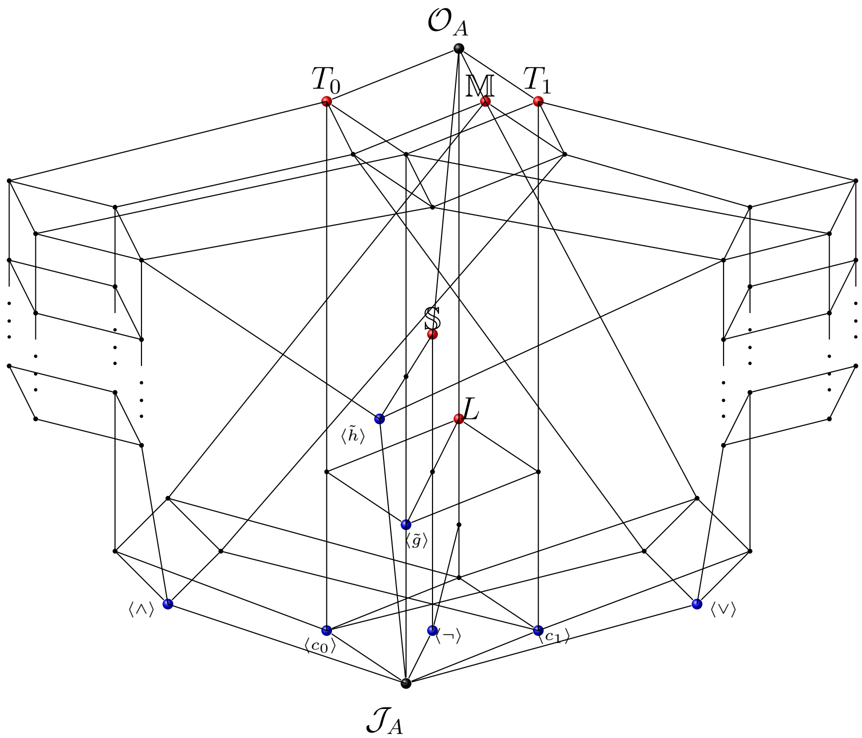

Figura 2. Retículo del conjunto de clones sobre el conjunto $A = \{0,1\}$, también conocido como el retículo de Post. Figura proporcionada por Reinhard Pöschel en [9] y fue descrita por E. Post en [12].

[13]. En la figura 2 se muestran los 5 clones maximales para $|A| = 2$, entre ellos se encuentran los clones $\mathbb{M}$ y $\mathbb{S}$ de los ejemplos 2.11 y 2.12, respectivamente.

Conociendo los clones maximales, nos viene a la mente la siguiente pregunta:

¿Podemos describir a los clones minimales?

Para el caso cuando $A = \{0,1\}$ todos los clones minimales fueron descritos en el teorema 3.5, cuya demostración en español se encuentra en [8], dichos clones están representados en la figura 2.

Teorema 3.5 ([12])**.** *Sea $A = \{0,1\}$. En $\mathcal{O}_A$ hay 7 clones minimales, los cuales son: $\langle c_0\rangle, \langle c_1\rangle, \langle\neg\rangle, \langle\vee\rangle, \langle\wedge\rangle, \langle\tilde{g}\rangle, \langle\tilde{h}\rangle$, donde*

- *c_0 es la función constante con valor 0. Es decir, $c_0(x) = 0$ para toda $x \in A$,*
- *c_1 es la función constante con valor 1. Es decir, $c_1(x) = 1$ para toda $x \in A$,*

- $\wedge$ *es la función lógica AND dada por*

$$\wedge(x,y) := \begin{cases} 1 & si\ x = y = 1 \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

- $\vee$ *es la función lógica OR dada por*

$$\vee(x,y) := \begin{cases} 0 & si\ x = y = 0 \\ 1 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

- $\neg$ *es la función de negación dada por:*

$$\neg(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 1 \\ 1 & si\ x = 0. \end{cases}$$

- $\tilde{g}$ *es la* ***función ternaria minorizante booleana*** *definida como*

$$\tilde{g}(x,y,z) = x \oplus y \oplus z,$$

donde $\oplus$ *es la suma módulo* 2.
- $\tilde{h}$ *es la* ***función ternaria mayorante booleana*** *definida como*

$$\tilde{h}(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x).$$

En [5] Béla Csákány, caracterizó todos los clones minimales para $|A| \leq 3$ y solo se conocen resultados parciales cuando $|A| \geq 4$. De hecho, lo más cerca que se tiene a una descripción general de todos los clones minimales es el siguiente teorema, demostrado por Ivo Rosenberg. Los casos (i) y (iv) del siguiente teorema aseguran la minimalidad, mientras que los otros no. El problema de agregar condiciones adicionales a los otros tres casos tales que este teorema se convierta en una caracterización de clones minimales permanece abierto [9].

Teorema 3.6 (Teorema de clasificación de Rosenberg [14])**.** *Sea A un conjunto finito. Un clon $F \leq \mathcal{O}_A$ es minimal si es generado por una función $f \in \mathcal{O}_A \setminus \mathcal{J}_A$, donde f pertenece a alguno de los siguientes* 5 *tipos de funciones:*

(i) $f \in \mathcal{O}_A^{(1)}$ *es una* ***permutación con orden primo*** *o una* ***retracción*** *distinta de la función identidad (es decir, $f \circ f = f \neq id_A$).*

(ii) $f \in \mathcal{O}_A^{(2)}$ *es una función idempotente, es decir, $f(x,x) = x$ para todo $x \in A$.*

(iii) $f \in \mathcal{O}_A^{(3)}$ *es una función* ***minorizante*** *dada por*

$$f(x,y,z) = x \oplus y \oplus z,$$

en donde $\langle A; * \rangle$ es un grupo de orden 2. *(A la función f así definida se le conoce como operación de Mal'cev).*

(iv) $f \in \mathcal{O}_A^{(3)}$ *es una función* ***ternaria mayorizante***. *Es decir*

$$f(x,x,y) = f(x,y,x) = f(y,x,x) = x.$$

(v) *$f \in \mathcal{O}_A^{(n)}$ es una semiproyección de aridad n, donde $3 \leq n \leq |A|$. Con $n \geq 2$ y cualquier $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, una función $f \in \mathcal{O}_A^{(n)}$ es una* ***semiproyección*** *sobre la i-ésima entrada si para cada tupla $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ con repeticiones (es decir, existen $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}, j \neq k$, tal que $x_j = x_k$), se cumple $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$.*

Concluiremos esta breve introducción a los clones de funciones con la siguiente sección, mostrando una de las técnicas que es más usada y eficiente en el estudio de caracterización de clones sobre cualquier conjunto.

4. Clones de polimorfismos

A lo largo de esta sección estudiaremos a los *polimorfismos* de relaciones, y finalizaremos mostrando que todo polimorfismo de relaciones forma un clon, para demostrar esto último, damos algunas definiciones.

Definición 4.1. Para $k \in \mathbb{N}_+$, denominamos a cualquier subconjunto del producto cartesiano A^k, $\rho \subseteq A^k$, como una **relación k-aria** sobre A. Al **conjunto de todas las relaciones k-arias sobre** A lo denotaremos por $R_A^{(k)}$ y la unión de todas ellas,

$$R_A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} R_A^{(k)},$$

es el **conjunto de todas las relaciones sobre** A.

En el ejemplo 2.11 estudiamos a las funciones que preservan la relación de orden $(\leq)$ en $\{0, 1\}$. Ahora veremos qué significa, en general, que una función preserve una relación, noción fundamental en la teoría de clones.

Definición 4.2. Sean $f \in \mathcal{O}_A^{(n)}$ una función n-aria y $\rho \in R_A^{(k)}$ una relación k-aria. Decimos que f **preserva** ρ (o que ρ es **invariante con respecto a** f), denotado por $f \rhd \rho$, si

$$\begin{aligned}
&\text{para todo } (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{k1}), \ldots, (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn}) \in \rho \\
&\qquad\qquad \text{se cumple } (f(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), \ldots, f(x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})) \in \rho.
\end{aligned}$$

Para ilustrar esta definición, podemos representar a las n tuplas de ρ como columnas de una matriz, y si aplicamos f a los renglones de esta matriz, obtendremos una nueva tupla que deberá formar parte de ρ.

Ejemplo 4.3. Sea $A = \{0, 1, 2\}$, definamos la siguiente relación binaria

$$R_1 := \{(x, y) \in A^2 \mid x = 2 \vee y \leq 1\}.$$

$$\begin{array}{cccccccc}
f(& x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} &) = & \circ \\
f(& x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} &) = & \circ \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
f(& x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kn} &) = & \circ \\
 & \Cap & \Cap & \dots & \Cap & & \Cap \\
 & \rho & \rho & \dots & \rho & \Rightarrow & \rho.
\end{array}$$

Figura 3. Diagrama de $f \rhd \rho$.

La relación R_1 puede ser representada mediante una matriz, cuyas columnas son las tuplas que pertenecen a R_1:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por demostrar que $c_2^{(3)} \rhd R_1$, donde $c_2^{(3)}$ es la función constante con valor 2, la cual cumple que para todo $(x, y, z) \in A^3$ $c_2^{(3)}(x, y, z) := 2$.

Para cualesquiera tres tuplas de la forma $r_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \in R_1$, con $j \in \{1, \dots, 7\}$, se cumple que al aplicar $c_2^{(3)}$ por renglones a todas ellas obtenemos siempre la tupla $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in R_1$. Por ejemplo, si consideramos tres tuplas de R_1, obtenemos

$$c_2^{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2^{(3)}(1, 2, 2) \\ c_2^{(3)}(1, 0, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in R_1.$$

Más aún, podemos definir otra función $h \in \mathcal{O}_A^{(3)}$ como

$$h(x, y, z) := \text{máx}(\text{mín}(x, y), \text{mín}(y, z), \text{mín}(z, x)).$$

La función h así definida cumple que

$$h(x, x, y) = h(x, y, x) = h(y, x, x) = x.$$

Es posible mostrar que $h \rhd R_1$. Para probarlo, se implementó el algoritmo que describimos a continuación, que dada cualquier relación ρ y cualquier función f, verifica si $f \rhd \rho$.

Algoritmo 4.4.

Sea $f \in \mathcal{O}_A^{(n)}$ una función y $\rho \subseteq A^k$ una relación finita de m tuplas.
procedure PRESERVA
  Devuelve *SÍ* cuando $f \rhd \rho$, NO *en caso contrario.*
  for *toda familia de índices* $j_1, j_2, \dots, j_n \in \{1, 2, \dots, m\}$ ***do***

Definir $f_i = f(\rho_{ij_1}, \rho_{ij_2}, \ldots, \rho_{ij_n})$ *para toda* $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *donde* ρ_i *es la* i*-ésima tupla de* ρ.
_if_ $(f_1, f_2, \ldots, f_k) \notin \rho$ **_then_**
  devolver NO
end if
end for
devolver SÍ
end procedure

Notemos que si ρ es una relación k-aria con m tuplas y f es una función n-aria, este algoritmo debe probar con todas las posibles selecciones de n tuplas de ρ y verificar si cumplen la propiedad descrita en la definición 4.2, por lo cual el algoritmo tiene una complejidad computacional de $O(m^n)$. En particular, para verificar que la función h preserva a la relación R_1, se deben revisar $7^3 = 343$ selecciones de tuplas.

NOTA: La relación R_1 pertenece a un tipo especial de relaciones conocido como *relaciones de causalidad* [17].

Definición 4.5. Para una relación k-aria $\rho \in R_A^{(k)}$ definimos el **polimorfismo** de ρ como:

$$\mathrm{Pol}\,\{\rho\} = \{f \in \mathcal{O}_A \mid f \rhd \rho\}.$$

Adicionalmente, para una función $f \in \mathcal{O}_A^{(n)}$ definimos al **invariante** de f, $\mathrm{Inv}\,\{f\}$, como:

$$\mathrm{Inv}\,\{f\} = \{\rho \in R_A \mid f \rhd \rho\}.$$

NOTA: Cuando el contexto sea claro, usaremos $\mathrm{Inv}\ f$ en lugar de $\mathrm{Inv}\,\{f\}$ y $\mathrm{Pol}\ \rho$ en lugar de $\mathrm{Pol}\,\{\rho\}$.

Podemos generalizar estas definiciones para conjuntos de relaciones y funciones. Sean $S \subseteq R_A$ un conjunto de relaciones y $F \subseteq \mathcal{O}_A$ un conjunto de funciones, definimos:

$$\mathrm{Pol}\ S = \bigcap_{\rho \in S} \mathrm{Pol}\ \rho = \{f \in \mathcal{O}_A \mid \forall \rho \in S : f \rhd \rho\},$$

$$\mathrm{Inv}\ F = \bigcap_{f \in F} \mathrm{Inv}\ f = \{\rho \in R_A \mid \forall f \in F : f \rhd \rho\}.$$

En palabras, $\mathrm{Pol}\ S$ es el conjunto de todas las funciones que preservan a todas las relaciones de S. Así mismo, $\mathrm{Inv}\ F$ es el conjunto de todas las relaciones que son invariantes con respecto a todas las funciones en F. Los operadores Pol e Inv forman una **conexión de Galois** inducida por $\rhd$, de este modo satisfacen las siguientes propiedades.

- $F \subseteq F' \Rightarrow \mathrm{Inv}\ F \supseteq \mathrm{Inv}\ F'$.

- $R \subseteq R' \Rightarrow$ Pol $R \supseteq$ Pol R'.
- $F \subseteq$ Pol Inv F y $R \subseteq$ Inv Pol R.

Usando las propiedades anteriores, que ilustramos en la figura 4, se puede mostrar lo siguiente.

- Pol $R =$ Pol Inv Pol R.
- Inv $F =$ Inv Pol Inv F.

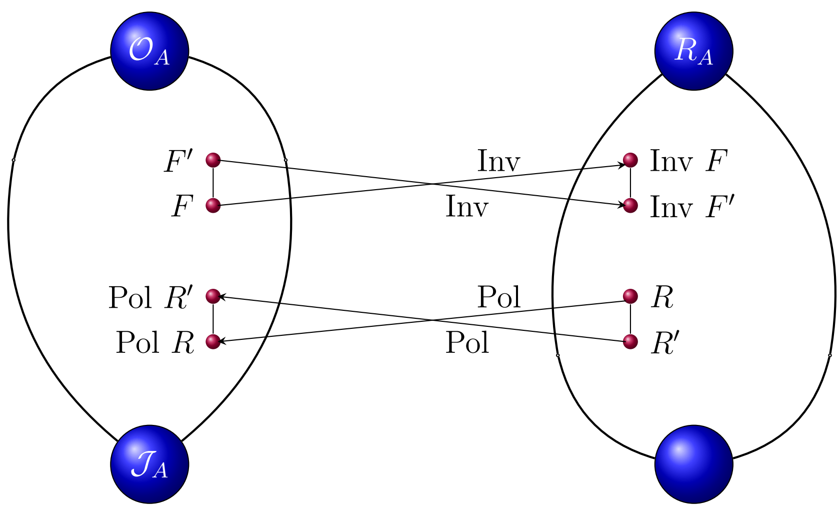

Figura 4. Relación entre Pol e Inv.

Se puede demostrar que la composición de los operadores Pol e Inv forman un *operador cerradura* (véase [6, pp. 145–146] para esta definición). Más aún, uno de los teoremas más importantes de la teoría de clones que relaciona la conexión de Galois Pol $-$ Inv con el clon $\langle \circ \rangle$ es el siguiente. Su demostración se puede encontrar en [1].

Teorema 4.6. *[1] Sea A un conjunto finito y sea $F \subseteq \mathcal{O}_A$ un conjunto de funciones sobre A. Entonces se cumple que*

$$\langle F \rangle = \textit{Pol Inv } F.$$

No es difícil demostrar que el polimorfismo de cualquier relación forma un clon.

Proposición 4.7. *Sea ρ una relación k-aria. El polimorfismo Pol ρ es un clon.*

Usando la proposición anterior podemos mostrar lo siguiente:

Corolario 4.8. *Sea $S \subseteq R_A$ un conjunto de relaciones. Se cumple que Pol S es un clon.*

Demostración. Por la proposición 4.7 sabemos que Pol ρ es un clon para todo $\rho \in S$, y por la proposición 3.1 sabemos que la intersección de un conjunto de clones es también un clon. Como Pol $S = \bigcap_{\rho \in S} \text{Pol } \rho$, se obtiene que Pol S es clon. $\square$

El corolario 4.8 nos brinda una nueva alternativa para probar que un conjunto de funciones es clon, que es describirlo como el polimorfismo de un conjunto de relaciones. Por ejemplo, los clones maximales T_0, T_1 y L cuando $A = \{0, 1\}$ están descritos como

$$T_0 := \text{Pol } \{0\},$$
$$T_1 := \text{Pol } \{1\},$$
$$L := \text{Pol } \{(x, y, z, u) \in A^4 \mid x \oplus y = z \oplus u\}, \text{con } \oplus \text{ la suma mod 2.}$$

Cerraremos este artículo mencionando muy superficialmente la importancia de estudiar clones de funciones en álgebra universal. Un **álgebra universal** o simplemente **álgebra** es una estructura algebraica $\mathbb{A} = (A, F)$ que consta de un conjunto A y un conjunto F de operaciones finitarias sobre A. La mayoría de las propiedades de las álgebras universales (*los homomorfismos entre álgebras, productos de álgebras, factorización de un álgebra a través de una relación de equivalencia, etc.*) dependen más de las funciones de términos de $\mathbb{A}$ que de las funciones que están en F. Más aún, se puede probar que el conjunto de funciones de términos de $\mathbb{A}$ siempre es un clon y, que dado un clon, siempre se le puede asociar una álgebra universal $\mathbb{A}$ donde sus funciones de términos son las funciones que pertenecen al clon.

Por otro lado, en las últimas tres décadas el estudio de clones ha dado grandes aportaciones en la determinación de la complejidad de problemas de satisfacción de restricciones (CSP por sus siglas en inglés), ya que el analizar cuándo un CSP se puede resolver en tiempo polinomial o cuándo un CSP tiene una complejidad equivalente a otro CSP, se puede hacer determinando las funciones que preservan sus restricciones, es decir, se puede hacer analizando los clones de polimorfismos de las relaciones que definen al CSP [3].

Bibliografía

[1] V. G. Bodnarčuk, L. A. Kalužnin, V. N. Kotov y B. A. Romov, «Galois theory for Post algebras. I, II», *Kibernetika (Kiev)*, núm. 3, 1969, 1–10; ibid. 1969, no. 5, 1–9.

[2] A. Bulatov, «Finite sublattices in the lattice of clones», *Algebra and Logic*, vol. 33, núm. 5, 1994, 287–306.

[3] A. A. Bulatov, A. A. Krokhin y P. Jeavons, «Constraint satisfaction problems and finite algebras», en *Automata, Languages and Programming: 27th International Colloquium, ICALP 2000 Geneva, Switzerland, July 9–15, 2000 Proceedings 27*, Springer, 2000, 272–282.

[4] P. M. Cohn, *Universal algebra*, Harper & Row, Publishers, 1965.
[5] B. Csákány, «All minimal clones on the three-element set», *Acta cybernetica*, vol. 6, núm. 3, 1983, 227–238.
[6] B. A. Davey y H. A. Priestley, *Introduction to lattices and order*, Cambridge university press, 2002.
[7] M. Goldstern y M. Pinsker, «A survey of clones on infinite sets», *Algebra universalis*, vol. 59, 2008, 365–406.
[8] C. G. Hernández, «Introducción a la teoría de clones de funciones y monoides centralizadores», 2022, Undergraduate Honors Thesis.
[9] S. Kerkhoff, R. Pöschel y F. M. Schneider, «A short introduction to clones», *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, vol. 303, 2014, 107–120.
[10] D. Lau, «Submaximale klassen von p3», *Elektron. Informationsverarb. Kybernet*, vol. 18, 1982, 227–243.
[11] R. Pöschel y L. A. Kalužnin, *Funktionen- und Relationenalgebren*, Mathematische Monographien [Mathematical Monographs], vol. 15, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979, Ein Kapitel der diskreten Mathematik. [A chapter in discrete mathematics].
[12] E. L. Post, *The two-valued iterative systems of mathematical logic. annals of mathematics studies*, vol. 5, Princeton University Press, 1941.
[13] I. G. Rosenberg, *Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. Struktur der Funktionen von mehreren Veränderlichen auf endlichen Mengen*, vol. 80, Rozpravy Československé Akademie Věd: Řada matematických a Přírodních Věd, núm. 4, Academia, 1970.
[14] ______, «Minimal clones I: the five types», en *Lectures in universal algebra, Colloq. Math. Soc. János Bolyai 43*, North-Holland, 1986, 405–427.
[15] W. Taylor, «The clone of a topological space», en *Research and Exposition Math.*, vol. 13, Helderman Verlag, 1986.
[16] V. Trnková, «Clones of topological spaces», *Topology and its Applications*, vol. 159, núm. 13, 2012, 3122–3129.
[17] E. Vargas, «Clausal relations and c-clones», *Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications*, vol. 30, núm. 2, 2010, 147–171.
[18] Y. I. Yanov y A. Muchnik, «The existence of a k-valued closed class that has no finite basis», en *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 127, 1959, 44–46.