Miscelánea Matemática **59** (2014) 67-75 SMM

Propiedades geométricas de las raíces de un polinomio de variable compleja

Jesús Jerónimo-Castro
Facultad de Ingeniería,
Universidad Autónoma de Querétaro,
Cerro de las Campanas s/n, C.P. 76010,
Querétaro, México
jesusjero@hotmail.com

1. Introducción

El punto de partida para la realización del presente trabajo es el siguiente: consideremos un polinomio de segundo grado en la variable real x

$$p(x) = ax^2 + bx + c,$$

de manera que las raíces de este son ambas números reales. Como sabemos, las raíces de este polinomio son $r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Observemos que $\frac{r_1+r_2}{2} = \frac{-b}{2a}$ es el punto medio del intervalo $[r_2, r_1]$, además, también podemos observar que $\frac{-b}{2a}$ es la raíz del polinomio $p'(x) = 2ax + b$. Consideremos ahora un polinomio de segundo grado en la variable compleja z, $p(z) = (z-r_1)(z-r_2)$, cuyas raíces r_1 y r_2 son números complejos. De nuevo tenemos que $p'(z) = 2z - (r_1 + r_2)$, el polinomio derivada de $p(z)$, tiene como raíz a $s_1 = \frac{r_1+r_2}{2}$. Recordando que a cada número complejo $a + bi$ le podemos asociar el punto (a, b) en el plano Cartesiano, y viceversa, tenemos que el punto asociado al número complejo s_1 es precisamente el punto medio del segmento que une los puntos asociados a los números complejos r_1 y r_2. Pero, ¿qué sucede con los polinomios de grado mayor y las raíces de sus derivadas?

De manera sorprendente, existe una relación muy interesante entre los puntos asociados a las raíces de la derivada de un polinomio y los puntos asociados a las raíces del polinomio en sí. Tal relación fué descubierta por primera vez por Gauss y Lucas [4]. El objetivo de este trabajo es entender el maravilloso Teorema de Gauss-Lucas y algunos resultados que muestran relaciones entre las raíces de un polinomio y las raíces de su derivada.

2. Teorema de Gauss-Lucas

Antes de enunciar y demostrar el Teorema de Gauss-Lucas es necesario introducir algunos conceptos y notación que facilitarán la comprensión del tema. El primer concepto es la *envolvente convexa* (para más información sobre las nociones básicas de Convexidad se puede consultar [1], [7], [9], [11], [12], por citar algunos).

Definición 2.1. Dado un conjunto X de puntos en el plano, se define la *envolvente convexa* como el menor conjunto convexo (por contención) el cual contiene al conjunto X. Denotamos por *conv* X a la envolvente convexa de un conjunto dado X.

Dicho de otra manera, si suponemos que en cada uno de los puntos colocamos un clavo y extendemos una liga y la soltamos de manera que contenga al conjunto X, la envolvente convexa será precisamente la curva que describe la liga junto con el interior de esta curva.

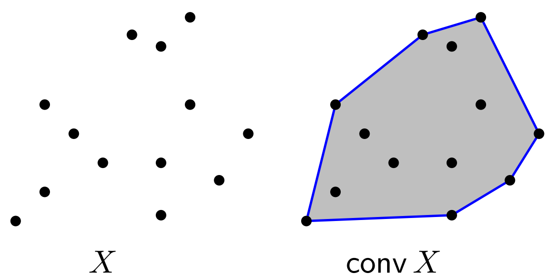


Figura 1.

Otra noción importante en Geometría es la de *combinación convexa* de puntos. Se define de la siguiente manera.

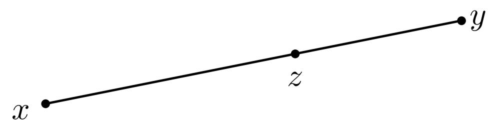
Definición 2.2. Dados los números reales no negativos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, no todos iguales a cero, tales que $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$, decimos que el punto

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$$

es una combinación convexa de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Uno de los teoremas básicos en convexidad establece que la envolvente convexa de un conjunto coincide con el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de este. Por ejemplo, es fácil ver que la envolvente convexa de un par de puntos es el segmento de recta que los une; por otro lado, por Geometría Analítica básica sabemos que todo punto del segmento se expresa como combinación convexa de dichos puntos.

De igual manera, podemos ver que la envolvente convexa de tres puntos no colineales es el triángulo que tiene a estos como vértices y



$$z = \lambda x + (1-\lambda)y$$

Figura 2.

que todo punto contenido en este se expresa de manera única en la forma $z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$, con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Para convencernos de esto último, consideremos un punto z contenido en el triángulo de vértices x_1, x_2 y x_3. Si z coincide con alguno de los vértices del triángulo, entonces se cumple la afirmación anterior de manera clara; si z está en el interior de alguno de los lados del triángulo $\triangle x_1x_2x_3$, por decir en el lado x_1x_2, entonces $z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, para un par de números no negativos α_1, α_2, los cuales cumplen $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Supongamos entonces que z está en el interior del triángulo $\triangle x_1x_2x_3$. Sea m el punto sobre x_2x_3 el cual es colineal con z y x_1. Tenemos lo siguiente:

$$m = \alpha x_2 + (1-\alpha)x_3 \;\text{ y }\; z = \beta m + (1-\beta)x_1 \;\text{ para } \alpha, \beta \in (0,1).$$

Después de hacer la sustitución de m en la segunda expresión se obtiene que

$$z = (1-\beta)x_1 + \beta\alpha x_2 + \beta(1-\alpha)x_3,$$

de donde al hacer $\lambda_1 = 1-\beta, \lambda_2 = \beta\alpha$ y $\lambda_3 = \beta(1-\alpha)$ se obtienen la expresión buscada para z ya que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

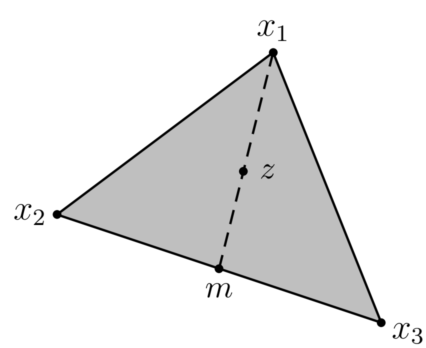


Figura 3.

Una vez vistas las nociones anteriores, estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema tan esperado. Sin embargo, mostraremos primero un relación entre las raíces de un polinomio y las raíces de su derivada la cual se obtiene de manera sencilla de las fórmulas de Vieta.

Proposición 2.3. *El centroide de las raíces de un polinomio coincide con el centroide de las raíces de su derivada* $p'(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \ldots + a_1$.

Demostración. Sea $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ el polinomio dado, donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son números complejos. Si $r_1, r_2, \ldots, r_n$ y $r'_1, \ldots, r'_{n-1}$ son las raíces de $p(z)$ y $p'(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \ldots + a_1$, respectivamente, entonces por las fórmulas de Vieta

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-1}}{a_n} &= -(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) \\ \frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n} &= -(r'_1 + r'_2 + \ldots + r'_{n-1}). \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}{n} = \frac{-a_{n-1}}{na_n} = \frac{r'_1 + r'_2 + \ldots + r'_{n-1}}{n-1},$$

es decir, los centroides de $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ y $\{r'_1, r'_2, \ldots, r'_{n-1}\}$ coinciden. □

Teorema 2.4 (de Gauss-Lucas)**.** *Las raíces de la derivada de un polinomio de variable compleja pertenecen a la envolvente convexa de las raíces del polinomio en sí mismo.*

Demostración. Sea $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ el polinomio dado, donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son números complejos. Por el Teorema Fundamental del Álgebra tenemos que el polinomio se puede factorizar como

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n),$$

donde $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son las raíces de $p(z)$. Por simplicidad, analizaremos solamente el caso cuando todas las raíces son distintas. Derivando $p(z)$ y haciendo el cociente con $p'(z)$ obtenemos que

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \ldots + \frac{1}{z - z_n}.$$

Multiplicando cada una de las fracciones por su número complejo conjugado obtenemos que

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{\overline{z} - \overline{z_1}}{|z - z_1|^2} + \frac{\overline{z} - \overline{z_2}}{|z - z_2|^2} + \ldots + \frac{\overline{z} - \overline{z_n}}{|z - z_n|^2}.$$

Ahora, si alguna de las raíces de $p'(z)$ coincide con alguno de los números $z_1, z_2, \ldots, z_n$, entonces ya acabamos porque en tal caso esta pertenece de manera trivial a la envolvente convexa de las raíces de $p(z)$. Por el contrario, si z_0 es una raíz de $p'(z)$ diferente a $z_1, \ldots, z_n$, entonces dado que $p'(z_0) = 0$ tenemos

$$0 = \frac{\overline{z_0} - \overline{z_1}}{|z_0 - z_1|^2} + \frac{\overline{z} - \overline{z_2}}{|z - z_2|^2} + \ldots + \frac{\overline{z_0} - \overline{z_n}}{|z_0 - z_n|^2}.$$

Como el conjugado de 0 es de nuevo 0, se sigue que

$$0 = \frac{z_0 - z_1}{|z_0 - z_1|^2} + \frac{z_0 - z_2}{|z_0 - z_2|^2} + \ldots + \frac{z_0 - z_n}{|z_0 - z_n|^2}.$$

Despejando de esta última expresión a z_0 tenemos que

$$z_0 = \frac{\frac{1}{|z_0 - z_1|^2} \cdot z_1 + \ldots + \frac{1}{|z_0 - z_n|^2} \cdot z_n}{\frac{1}{|z_0 - z_1|^2} + \ldots + \frac{1}{|z_0 - z_n|^2}}.$$

Si hacemos $\lambda_i = \frac{\frac{1}{|z_0 - z_i|^2}}{\frac{1}{|z_0 - z_1|^2} + \ldots + \frac{1}{|z_0 - z_n|^2}}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, tenemos que $z_0 = \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_n z_n$ con cada $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Lo anterior significa que z_0 es combinación convexa de $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Por lo tanto, z_0 está contenido en la envolvente convexa de las raíces de $p(z)$. $\square$

3. Teorema de Siebeck y elipse de Steiner

En el caso de polinomios de grado 3 es posible decir aún más. Las raíces de la derivada del polinomio son los focos de la elipse que es tangente a los lados del triángulo en sus puntos medios, cuyos vértices son las raíces del polinomio original. Tal teorema es conocido como Teorema de Marden, sin embargo, Marden en su libro *Geometry of polynomials* [8] le atribuye el teorema a Siebeck [10] en un artículo que data de 1864. Por otro lado, dado un triángulo, existe una única elipse la cual hace contacto con este en sus puntos medios. Esta elipse es conocida como *elipse de Steiner* y tiene mucha importancia en varios resultados de Geometría Convexa (ver por ejemplo [1], [2], [5], [6]). Antes de demostrar el Teorema de Siebeck notemos lo siguiente:

Observación 3.1. Dado un punto x en una recta ℓ y un par de puntos p, q en el mismo semiplano determinado por ℓ, existe una elipse tangente a ℓ en el punto x y con focos p y q si y solo si los ángulos que forman los segmentos $[p, x]$ y $[q, x]$ con ℓ son iguales.

Observación 3.2. Dado un ángulo de vértice x y un par de puntos p, q contenidos en su interior, existe una elipse tangente a los lados del ángulo, con focos p y q, si y solo si los ángulos que forman los segmentos $[p, x]$ y $[q, x]$ con los lados del ángulo son iguales.

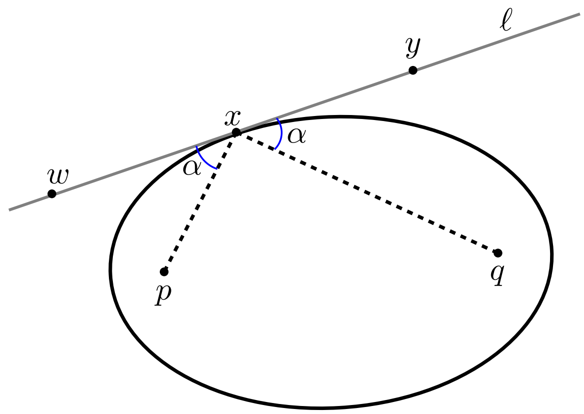


Figura 4.

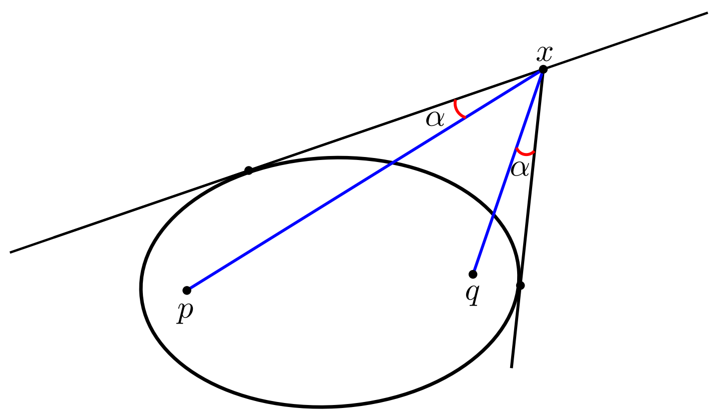


Figura 5.

Observación 3.3. Si recordamos, además, que al multiplicar dos números complejos su argumentos se suman, podemos expresar las observaciones anteriores como sigue: si x y y son dos puntos sobre la recta ℓ (ver Figura 4) de manera que x está en el interior del segmento $[w, y]$, entonces $\measuredangle wxp = \measuredangle yxq$ si y solo si $\arg\left(\frac{p-x}{w-x}\right) = \arg\left(\frac{y-x}{q-x}\right)$, es decir, si y solo si

$$\arg[(p-x)(q-x)] = \arg[(w-x)(y-x)].$$

Proposición 3.4. *Sean r y s las raíces de la derivada del polinomio $p(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$. Entonces los puntos correspondientes a r y s son conjugados isogonales con respecto al triángulo $\triangle abc$.*

Demostración. Probaremos que $\angle bar = \angle cas$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a = 0$, dado que substrayendo a de a, b y c, cambiamos las raíces de la derivada de $p(z)$ por $-a$. Geométricamente esto corresponde a la traslación por el vector $-a$. Obtenemos

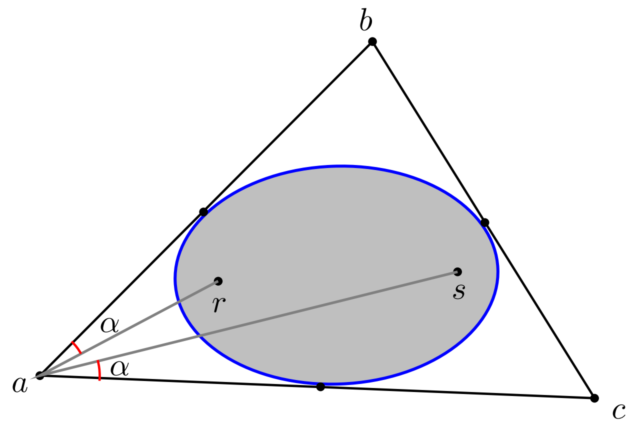


Figura 6.

que $p(z)$ se convierte en el polinomio $z^3 - (b+c)z^2 + bcz$ con derivada $p'(z) = 3z^2 - 2(b+c)z + bc$. Por el Teorema de Vièta tenemos que el producto de las raíces de $p'(z)$ es igual a $\frac{1}{3}bc$. Esto significa que el producto de b y c tiene el mismo argumento que el producto de r y s, se sigue por la Observación 3.3 que $\angle bar = \angle cas$. De manera semejante se prueba que $\angle abr = \angle cbs$ y $\angle acr = \angle bcs$. Por lo tanto, r y s son conjugados isogonales con respecto al triángulo $\triangle abc$. $\square$

Ahora, de la Observación 3.2 tenemos que existe una elipse $\mathcal{E}$ con focos r y s la cual es tangente a los lados ab y bc, de manera análoga tenemos que existe una elipse $\mathcal{E}'$ tangente a ab y ac. Dado que la elipse con focos r, s y tangente a ab es única, se sigue que $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$. Sea $d = c/2$, tenemos que $(s-d)(r-d) = (s-\frac{c}{2})(r-\frac{c}{2}) = sr - \frac{c}{2}(s+r) + \frac{c^2}{4}$, además, como $r+s = \frac{2}{3}(b+c)$ y $rs = \frac{bc}{3}$, tenemos que $(s-d)(r-d) = \frac{bc}{3} - \frac{c}{3}(b+c) + \frac{c^2}{4} = -\frac{c^2}{12} = (c-\frac{c}{2})(\frac{c}{3}-\frac{c}{2})$. De la Observación 3.1 tenemos que $\mathcal{E}$ es tangente al lado ac del triángulo. De igual manera se demuestra que $\mathcal{E}$ es tangente a ab y bc en sus puntos medios. Con esto hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 3.5 (de Siebeck)**.** *Sea $p(z)$ un polinomio cúbico con coeficientes complejos cuyas raíces z_1, z_2, z_3 son puntos no colineales en el plano complejo. Entonces existe una única elipse inscrita en el triángulo $\triangle z_1z_2z_3$ tangente en sus puntos medios. Los focos de esta elipse son las raíces de $p'(z)$.*

4. Conjetura de Sendov

Finalmente, enunciamos una conjetura la cual fué formulada por el matemático búlgaro Bl. Sendov en 1962. Sobre esta conjetura es valioso mencionar que existen más de 90 artículos de investigación publicados y que la conjetura solo ha sido demostrada para algunos casos especiales. Entre las cosas que se saben, la conjetura es cierta para polinomios de grado a lo más 8 ó para polinomios cuyas raíces están todas sobre una misma circunferencia. El enunciado de la conjetura es el siguiente:

Conjetura de Sendov. Si todos los ceros de un polinomio $p(z)$, de grado $n \geq 2$, están contenidos en un disco de radio r y z_1 es un cero de $p(z)$, entonces el disco con centro z_1 y radio r contiene al menos un cero de la derivada $p'(z)$.

En [3] Cohen y Smith dan una demostración muy sencilla para la conjetura de Sendov en el caso de polinomios de la forma $p(z) = (z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}(z-z_3)^{n_3}$, con n_1, n_2, n_3 enteros positivos. La demostración para el caso cuando el polinomio tiene un cero múltiple, es decir, cuando $n_1 + n_2 + n_3 \geq 4$, es especialmente sencilla. Antes de dar la demostración de esta afirmación, necesitamos primero demostrar el siguiente lema.

Lemma 4.1. *Sea z_0 una raíz de un polinomio $p(z)$. Supongamos que la multiplicidad de z_0 es un número entero $k \geq 2$. Entonces z_0 es también una raíz de $p'(z)$ con multiplicidad $k-1$.*

Demostración. Supongamos que el grado de $p(z)$ es n y que la multiplicidad de z_0 es k, entonces tenemos que $p(z) = a(z-z_0)^k q(z)$, donde $q(z)$ es un polinomio de grado $n-k$ y para el cual se cumple que $q(z_0) \neq 0$. Como

$$p'(z) = a[k(z-z_0)^{k-1}q(z) + (z-z_0)^k q'(z)]$$

tenemos que $p'(z) = a(z-z_0)^{k-1}[kq(z)+(z-z_0)q'(z)]$. Es decir, $p'(z)$ se factoriza como el producto de $a(z-z_0)^{k-1}$ por un polinomio de grado $n-k$. Como $k-1 \geq 1$, tenemos que z_0 es un cero de $p'(z)$, además, como

$$kq(z_0) + (z_0 - z_0)q'(z_0) = kq(z_0) \neq 0,$$

tenemos que la multiplicidad de z_0 como raíz del polinomio $p'(z)$ es $k-1$. □

Proposición 4.2. *Sea $p(z) = (z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}(z-z_3)^{n_3}$, con $n = n_1 + n_2 + n_3 \geq 4$, un polinomio cuyos ceros z_1, z_2, z_3 son distintos y están contenidos en el disco unitario centrado en el origen. Entonces, $p'(z)$ tiene al menos un cero contenido en el disco $|z - z_1| \leq 1$.*

Demostración. Si $n_1 \geq 2$ entonces por el Lema 4.1 tenemos que z_1 es también un cero de $p'(z)$; así de este modo se cumple de manera trivial la conclusión de la proposición. Supongamos ahora que $n_1 = 1$, de nuevo aplicando el Lema 4.1 tenemos que

$$p'(z) = n(z-z_1)^{n_1-1}(z-z_2)^{n_2-1}(z-z_3)^{n_3-1}(z-w_1)(z-w_2), \quad (1)$$

para algún par de números complejos w_1 y w_2. Por otro lado, tenemos que $p(z) = (z - z_1)q(z)$, para algún polinomio $q(z)$ de grado $n - 1$. Entonces, dado que $p'(z) = q(z) + (z - z_1)q'(z)$ tenemos que

$$p'(z_1) = q(z_1) = (z_1 - z_2)^{n_2}(z_1 - z_3)^{n_3}. \tag{2}$$

De (1) y (2) obtenemos que

$$n(z_1 - w_1)(z_1 - w_2) = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3).$$

Por la desigualdad del triángulo tenemos que $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \leq 2$ y también $|z_1 - z_3| \leq 2$, entonces $|z_1 - w_1| \cdot |z_1 - w_2| \leq \frac{4}{n} \leq 1$. Se sigue que $|z_1 - w_1| \leq 1$ ó $|z_1 - w_2| \leq 1$. □

Bibliografía

[1] A. Barvinok, *A course in convexity*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 54, American Mathematical Society, Providence, 2002.

[2] W. Blaschke, *Kreis und kugel*, Gfschen, Leipzig, 1916, reproduced by Chelsea, N.Y., (1949).

[3] G. L. Cohen y G. H. Smith, «A simple verification of ilieff's conjecture for polynomials with three zeros», *Amer. Math. Monthly*, vol. 95, 1988, 734–737.

[4] K. F. Gauss, «Beiträge zur theorie der algebraischen gleichungen», *Abh. Ges. Wiss. Göttingen*, vol. 4, 1850, 73–102.

[5] J. Jerónimo-Castro y L. Montejano, «Chakerian-klamkin type theorems», *Journal of Convex Analysis*, vol. 17, 2010, 643–649.

[6] F. John, «Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions», en *Studies and Essays, Presented to R. Courant on his 60th Birthday*, New York, 1948, 187–204.

[7] S. R. Lay, *Convex sets and their applications*, Wiley-Interscience series of texts, monographs and tracts, 1982.

[8] M. Marden, *Geometry of polynomials*, Math. Surveys no. 3, American Mathematical Society, Providence, 1966.

[9] I. Pak, «Lectures on discrete and polyhedral geometry», 2010, Draft.

[10] J. Siebeck, «Ueber eine neue analytische behandlungweise der brennpunkte», *J. Reine Angew. Math.*, vol. 64, 1864, 175–182.

[11] R. J. Webster, *Convexity*, Oxford Univ. Press, 1994.

[12] I. Yaglom y V. Boltyanski, *Convex figures*, Holt Rinehart and Winston, New York, 1961.