UNA CARACTERIZACION SENCILLA DE LAS ISOMETRIAS.

Robert Cabane*

Introducción.

En este trabajo estudiamos las isometrías del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Estas transformaciones se conocen usualmente como aquellas que preservan las distancias. Primero recordamos cómo se relacionan con las aplicaciones ortogonales del espacio vectorial euclidiano $\mathbb{R}^n$ (teorema 1).

El resultado principal dice que, dada una transformación de $\mathbb{R}^n$, es suficiente que preserve las distancias iguales a 1 para que sea isometría (teorema 2). Este criterio era ya conocido para $n=2$ [1]; aún en este caso, nuestra prueba resulta menos intrincada, y, según creemos, original.

La idea fundamental que usamos es construir "figuras rígidas", o sea conjuntos finitos de puntos sobre los cuales la transformación actúa isométricamente. Por ejemplo, para $n=2$, convienen el triángulo equilátero y (según se probará) el rombo, de lado 1. Logramos así probar que las distancias preservadas forman un conjunto denso en $\mathbb{R}_+$, y concluimos con un argumento de paso al límite, que está muy relacionado con la continuidad.

---

* 30 rue de Liège
75008 París
Francia.

Notación.

a. Suponemos que el lector conoce la geometría euclidiana en $\mathbb{R}^n$, y un poco de análisis en R. Sea Ω el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Dados dos puntos M y P de Ω , denotaremos MP su distancia; M+P el punto cuyas coordenadas son la suma de las coordenadas de M y P; $\|M\|$ y $<M,P>$ la norma y el producto escalar euclidianos. Para mayores detalles sobre la geometría afín euclidiana, véase [2].

b. Sea f una transformación de Ω,o, más generalmente, de Γ en Ω, siendo Γ un abierto de Ω. Denotaremos: f(M)=M'. Diremos que la distancia $\ell \geqslant 0$ es "preservada" por f si, para cualquier par de puntos M y P, con MP=ℓ, se tiene: MP=M'P'. Sea Δ el conjunto de las "distancias preservadas por f".

c. Llamamos "simplejo" de Ω toda figura formada por n+1 puntos $\{A_0,\ldots,A_n\}$ que no se hallen todos en un mismo hiperplano. El simplejo es "regular de lado 1" si se tiene además: $A_iA_j=1$ para todos i y j distintos. Denotaremos el centroide del simplejo regular por: $G=(A_0+A_1+\ldots+A_n)/(n+1)$. Denotaremos también por $H(B_1,\ldots,B_n)$ el hiperplano generado por n puntos independientes $B_1,\ldots,B_n$.

d. Llamamos "isometría" de Ω toda transformación g de Ω tal que $\varphi(M)=g(M)-g(0)$ defina una aplicación lineal y ortogonal (o sea, para todos los puntos M y N, y números reales x,y se tiene $<\varphi(M), \varphi(N)> = <M,N>$,
$\varphi(xM+yN)= x\,\varphi(M)+y\,\varphi(N)$).

Teorema 1. Sean Γ un abierto de Ω, y $f: \Gamma \to \Omega$ una aplicación que preserva las distancias. Entonces f es la restricción a Γ de una isometría.

Prueba. Consideremos un simplejo regular $\{A_0,\ldots,A_n\}$ incluido en Γ. Cualquier punto M de Ω está determinado por las n+1 distancias A_iM. En efecto, si se tuviera, para todo $i: A_iM=A_iN$, entonces: $A_0M^2-A_0N^2-A_iM^2+A_iN^2=0$.

O sea: $< M-A_0,M-A_0> - < N-A_0,N-A_0> - < M-A_i,M-A_i> + < N-A_i,N-A_i>=0$

$= < M-N,M-A_0> + < N-A_0,M-A_0> - < N-M,N-A_0> - < M-A_0,N-A_0>$

$- < M-N, M-A_i > - < N-A_i,M-A_i> + < N-M,N-A_i> - < M-A_i,N-A_i>$

Despejando y agrupando se obtiene:

$$< M-N, M+N-2A_0> - < M-N, M+N-2A_i> = 0$$

$$< M-N, 2A_i-2A_0> = 2 < M-N, A_i-A_0> = 0$$

Entonces M-N sería ortogonal a n vectores independientes, por lo tanto nulo; así que M=N. Mediante dos traslaciones (que son isometrías) podemos suponer que: $A_0=A_0'=0$. Definamos entonces $g: \Omega \to \Omega$ por linealidad a partir de: $g(A_1)=A_1',\ldots,g(A_n)=A_n'$.

Sean: $M=\Sigma\lambda_iA_i$ y $N=\Sigma\mu_jA_j$ dos puntos de Ω. Tenemos:

$$< g(M), g(N)> = \sum_i\sum_j \lambda_i\mu_j < A_i',A_j'> = \Sigma\Sigma\lambda_i\mu_j \frac{\|A_i'\|^2+\|A_j'\|^2-\|A_i'-A_j'\|^2}{2}$$

$$= \Sigma\Sigma\lambda_i\mu_j \frac{\|A_i\|^2+\|A_j\|^2-\|A_i-A_j\|^2}{2} = <M,N>$$ puesto que f preserva las distancias; g es así una isometría que coincide con f en $A_0,A_1,\ldots,A_n$. Para M elemento de Γ, f y g preservan las n+1 distancias A_iM; entonces M' y g(M) verifican $A_i'M'=A_i'\,g(M)=A_iM$; aplicando lo anterior al simplejo $\{A_0',\ldots,A_n'\}$ obtenemos: $M'=g(M)$.

Teorema 2. Sea $f: \Omega \to \Omega$. Si Δ no es $\{0\}$, entonces: $\Delta = \mathbb{R}_+$, y f es una isometría.

La prueba se divide en varios lemas.

Lema 1. Podemos suponer que 1 pertenece a Δ .

Basta reemplazar f por $f' = h^{-1} \circ f \circ h$, siendo h una homotecia de razón $k \neq 0$, y k un elemento de Δ.

Dado un simplejo regular de lado 1: $\{A_0,..,A_n\}$, sean h_n la distancia de A_0 a $H(A_1,...,A_n)$, y $r_n = A_i G$ para $i=0,1,2,...,n$. Ahora calculamos estas distancias.

Lema 2. Se tiene: $h_n = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$ y $r_n = \sqrt{\frac{n}{2n+2}}$

Prueba: por inducción. Para $n=1$ tenemos dos puntos, y $h_1=1$, $r_1=1/2$. Suponiendo: $h_{n-1} = \sqrt{\frac{n}{2n-2}} = \frac{n}{n-1} r_{n-1}$, consideramos un simplejo $\{A_0,...,A_n\}$, su centroide G, y K la proyección ortogonal de A_0 sobre $H(A_1,....,A_n)$. Por simetría, K es el centroide del simplejo $n-1$ dimensional $\{A_1,...,A_n\}$, y el teorema de Pitágoras implica:

$$h_n^2 + r_{n-1}^2 = h_n^2 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{n}{2n-2} = 1,$$

o sea: $h_n = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$.

Por otra parte, tenemos: $A_0-G = A_0-K+K-G$, y, por lo tanto:

$$A_0-G=A_0-K + \left(\sum_1^n A_i\right)/n-\left(\sum_0^n A_i\right)/(n+1)= A_0-K +\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_1^n A_i-A_0/(n+1)$$

$$=A_0-K + \left(\sum_1^n A_i\right)/n(n+1)-A_0/(n+1)=A_0-K+(K-A_0)/(n+1)=\frac{n}{n+1}(A_0-K$$

Tomando normas obtenemos: $G A_0 = \frac{n}{n+1}$ $K A_0 = \frac{n}{n+1}$ $h_n = \sqrt{\frac{n}{2n+2}}$.
(Este cálculo puede interpretarse como un cálculo de baricentros, o sea centroides de puntos, pero con distintos pesos. El lector podrá consultar a este efecto la referencia [2].)

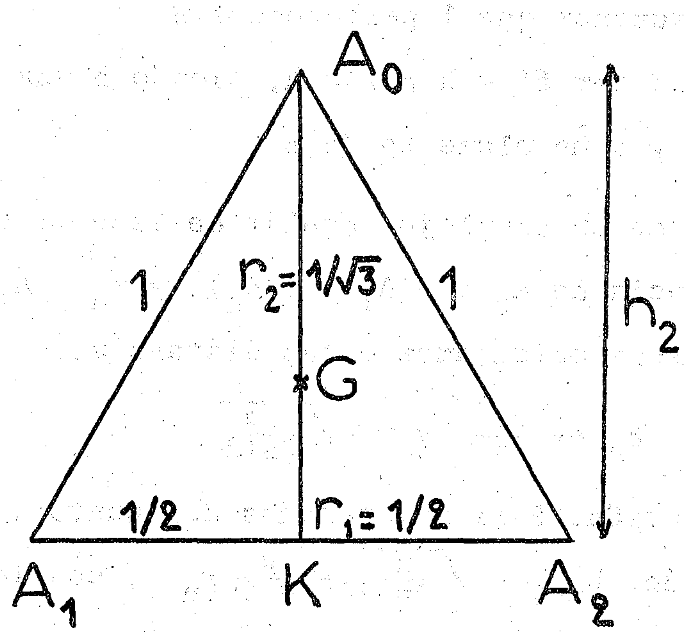

Fig. 1

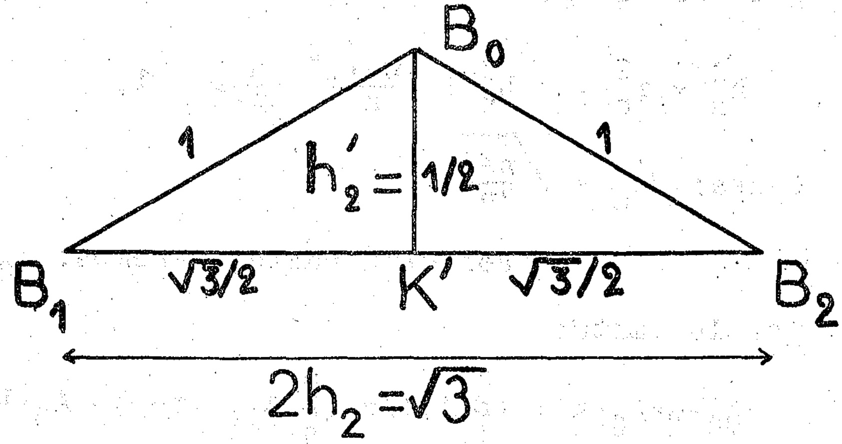

Fig. 2

Lema 3. Existe un simplejo $\{B_0,\ldots,B_n\}$ tal que, para $j > i > 0$: $B_0B_i=1$ y: $B_iB_j=2h_n$. Sean K' la proyección ortogonal de B_0 sobre $H(B_1,\ldots,B_n)$, y $h'_n = B_0K'$. Entonces se tiene que: $h'_n = \frac{1}{n}$.

Prueba: Consideremos un simplejo regular n-1-dimensional $\{B_1,\ldots,B_n\}$, de lado $2h_n$, y su centroide K'; B_1K' vale $2\,h_n r_{n-1}$ por el lema 2, o sea: $\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} < 1$. Existe, pues, un punto B_0 sobre la recta ortogonal a $\{B_1,\ldots,B_n\}$ en K', tal que: $B_0B_1=1 > B_1K'$. Por simetría, resulta también: $B_0B_i=1$ para $i > 1$. Finalmente obtenemos por el teorema de Pitágoras:

$$B_0K'^2 + K'B_1^2 = 1 = h'^2_n + (2\,h_n\,r_{n-1})^2, \text{ o sea: } h'^2_n=1-(1-1/n^2)$$

que es el resultado deseado (véase la figura 2).

En los próximos dos lemas, tratamos de encontrar un par de elementos convenientes de Δ, distintos de 0 y 1.

Lema 4. Δ contiene $2h_n$ y $2h'_n$.

Prueba: Sean A_0 y B_0 tales que: $A_0B_0 = 2h_n$. La intersección del hiperplano bisector de A_0B_0 y de la esfera de centro A_0, radio 1, da una esfera n-1-dimensional, que consta de los puntos a distancia 1 de A_0 y B_0. En esta última inscribimos un simplejo regular n-1-dimensional $\{A_1,\ldots,A_n\}$. Su lado vale 1, pues el radio de la esfera es según Pitágoras: $\sqrt{1-h_n^2} = r_{n-1}$. Resultan así $\{A_0,A_1,\ldots,A_n\}$ y $\{B_0,A_1,\ldots,A_n\}$ simplejos regulares de lado 1.

Las esferas de centro A_0, radio $2h_n$, y de centro B_0, radio 1, se intersectan, puesto que B_0 pertenece a la primera, y que el diámetro de esta vale: $4\,h_n > 1$. Elijamos entonces un punto D_0 común a ambas esferas. Construyamos finalmente $\{C_1,\ldots,C_n\}$ en el hiperplano bisector de A_0D_0 como lo hicimos para $\{A_1,\ldots,A_n\}$ (véase la figura 3).

Ahora probamos que $\{A_0, A_1, ..,A_n, B_0\}$ y $\{A'_0, A'_1, ..., A'_n, B'_0\}$ son isométricos. Es evidente ya para los simplejos presentes. Si A'_0 y B'_0 coincidieran, entonces resultaría: $B'_0D'_0 = A'_0D'_0 = 0$ ó $2\ h_n$ según A'_0 y D'_0 coincidan o no. Esto contradice la hipótesis $B_0D_0=1$, lo que prueba lo deseado. En particular tenemos que: $A'_0B'_0=A_0B_0=2h_n$, o sea, que $2h_n$ pertenece a Δ.

Para $2h'_n$ razonamos con simplejos análogos a los que vimos en el lema 3, "opuestos por la base". Tendremos entonces, para $j > i > 0$: $A_oA_i=B_oA_i=A_0C_i=D_0C_i=1$, y: $A_iA_j=C_iC_j=2h_n$. Como $2h_n$ pertenece a Δ, $\{A_0,...,A_n,B_0\}$ y $\{A'_0,...,A'_n,B'_0\}$ son isométricos, a menos que $A'_0D'_0$ valga 1. Esto no sucederá para $n > 2$, porque entonces: $2h'_n \neq 1$.

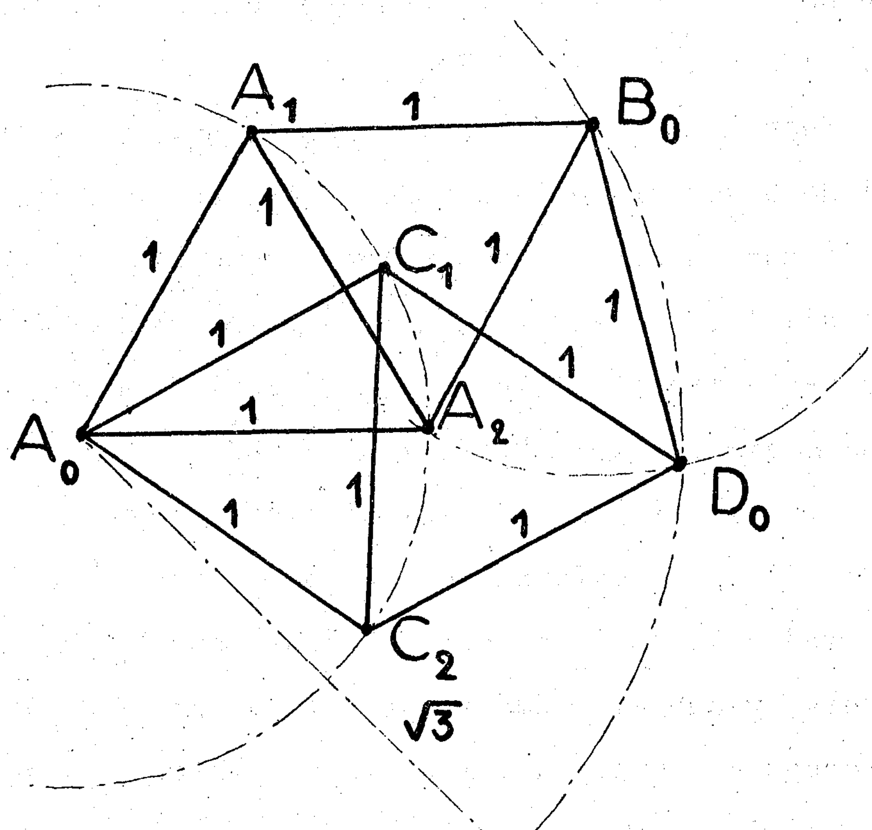

Fig. 3

En el caso n=2, construimos también otro elemento de Δ, distinto de 0,1 y $2h_2 = \sqrt{3}$:

Lema 5. Si n vale 2, entonces 1/2 pertenece a Δ.

Prueba: Consideramos primero dos puntos A y B a distancia 2, y la figura {A,B,C,D,E} que consta de dos rombos (véase la figura 4). Gracias al lema 4, f transforma cada rombo isométricamente. Entonces {A,B,C,D,E} y {A',B',C',D',E'} son isométricos, y tenemos: AB=A'B'=2. O sea, 2 pertenece a Δ.

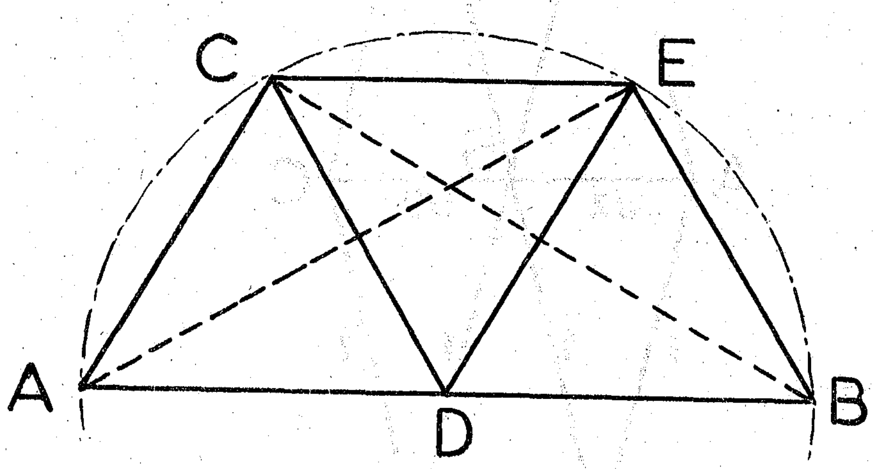

Fig.4

Sean ahora A y B a distancia 1/2, y la figura: {A,B,...,I} formada por varios rombos (véase la figura 5). Como Δ contiene 1 y 2, f transforma isométricamente {A,C,D,F,H} y {A,C,E,G,I}. Es imposible que E' y D' coincidan: se tendría en tal caso H'=G',I'=F',F'H'=F'G'=2. Sin embargo, considerando

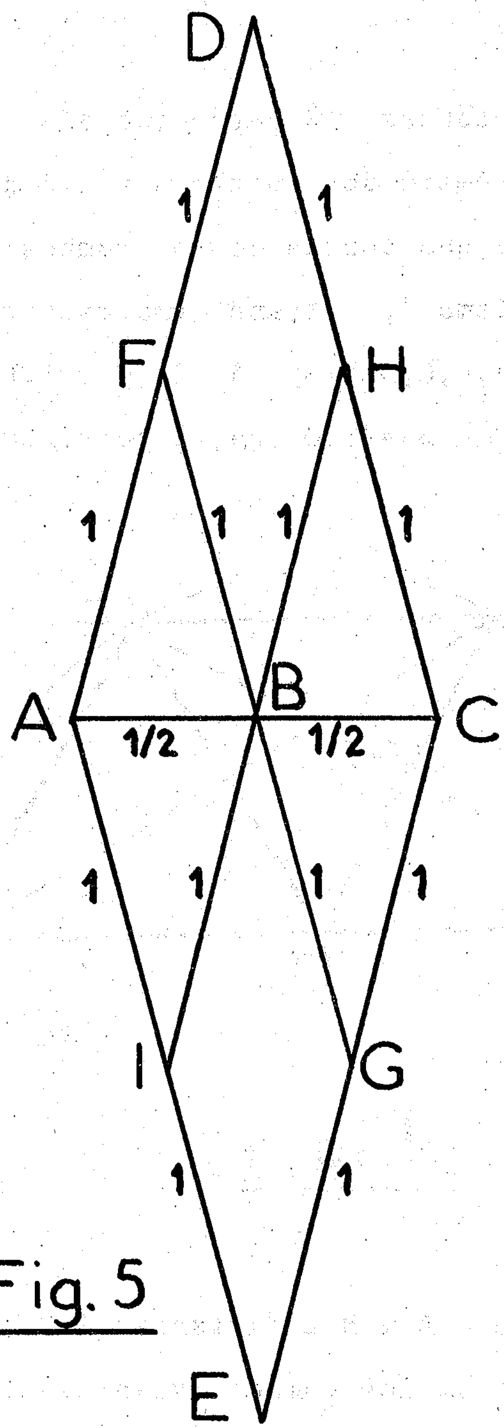

Fig. 5

el triángulo A'C'D', se ve que F'H' es menor que A'C'=1. Contradicción, por lo cual f es isométrica sobre toda la figura y A'B'=AB=1/2, que pertenece por lo tanto a Δ.

Lema 6. (Kronecker) Sea z un irracional positivo. Entonces $G=\{p-qz/p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Esta propiedad se demuestra por métodos elementales, pero sale del enfoque de este artículo. El lector podrá consultar [3] a este efecto.

De los lemas 1,4 y 5 vemos que si f preserva la distancia 1, entonces también preserva las distancias $2h_n$ y $2h'_n$ ($\sqrt{3}$ y 1/2 si n=2). Elegimos estas distancias porque generan por productos un subconjunto de Δ denso en $\mathbb{R}_+$, como lo asegura el siguiente lema.

Lema 7. Δ es denso en $\mathbb{R}_+$.

Prueba: Sean h la homotecia de razón $2h_n$, y: $g=h^{-1} \circ f \circ h$. Si tenemos: AB=1, entonces resulta también $h(A)h(B)=2h_n$, $f(h(A))f(h(B))=2h_n$(lema 4) y finalmente: $g(A)g(B)=1$; g preserva pues, la distancia 1. Esto implica, como para f, que g preserva las distancias $2h_n$ y $2h'_n$; f preserva ahora las distancias $(2h_n)^2$ y $(2h_n)(2h'_n)$, puesto que: $f= h \circ g \circ h^{-1}$. Usando la homotencia h' de razón $2h'_n$, obtenemos de igual manera $(2h'_n)^2 \in \Delta$. Procediendo por doble inducción para homotecias h^{p-1}, $(h')^{q-1}$, se prueba del mismo modo que Δ contiene todos los $(2h_n)^p(2h'_n)^q$ para p y q enteros positivos. Para n=2 obtenemos: $(\sqrt{3})^p/2^q \in \Delta$.

Aplicamos el lema 6 a Log Δ, que contiene elementos p Log $2h_n$+ q Log $2h'_n$. Basta averiguar que $\dfrac{\text{Log } 2h_n}{\text{Log } 2h'_n}$

es irracional. Si se tuviera: $\frac{\mathrm{Log}\ 2h'_n}{\mathrm{Log}\ 2h_n} = -\frac{a}{b}$ con a y b enteros, resultaría: $(2h_n)^a(2h'_n)^b = (\frac{2}{n})^b(2\sqrt{\frac{n+1}{2n}})^a = 1$, o sea: $2^{2b+a}(n+1)^a = n^{a+2b}$, absurdo puesto que n+1 no divide a n. Para n=2, obtenemos $\frac{\mathrm{Log}\ 1/2}{\mathrm{Log}\ \sqrt{3}} = -\frac{a}{b}$, o sea $3^a=2^{2b}$. Absurdo también.

<u>Prueba del teorema 2</u>: Sean A y B en Ω k_n y ℓ_n en Δ tales que, para toda $n \geq 0$: $AB-\ell_n \leq k_n < AB$, y que: $\lim_{n\to\infty} \ell_n=0$. Como las desigualdades triangulares son válidas, existe C_n tal que: $AC_n=k_n$, y: $C_n B = \ell_n$. Obtenemos: $A'C'_n = k_n$; $C'_nB' = \ell_n$; y $k_n-\ell_n \leq A'B' \leq k_n+\ell_n$ por desigualdad triangular. Pasando al límite, y notando que $\lim_{n\to\infty} k_n = AB$, se tiene: AB=A'B'. El teorema 1, con $\Gamma=\Omega$, da el resultado.

<u>Corolario</u>. Sea f tal que existan k y k' positivos, y que para todos M y P se tenga M'P' = k' si MP=k. Entonces f es una semejanza de razón k'/k.

Esto resulta del teorema 1 al considerar: $g=h' \circ f \circ h$; h y h' siendo homotecias de razones k y 1/k' respectivamente.

Hemos probado recientemente el teorema siguiente:

<u>Teorema 3</u>. Sean Γ un abierto conexo de $\Omega = \mathbb{R}^2$, de radio r (es la cota superior de los radios de discos incluidos en Γ), y $f: \Gamma\to\Omega$ que preserva la distancia ℓ. Si se tiene: $r > 2\ell$, entonces f es la restricción de una isometría a Γ.

La prueba sigue los mismos métodos, usando esta vez distancias diádicas. Se verifica que las construcciones necesarias para probar que f es isométrica en un pequeño disco "caben" en Γ_r, y luego se extiende progresivamente la propiedad a Γ , gracias a su conexidad por arcos. No sabemos qué sucede en el caso: $r \leqslant 2\ell$.

R E F E R E N C I A S

1. Modenov, Parkhomenko: Geometric transformations; Academic Press.
2. Coxeter: Fundamentos de Geometría; Editorial Limusa-Wiley.
3. Hardy, Wright: The theory of numbers, p. 373; Oxford.