Miscelánea Matemática **64** (2017) 79-96 SMM

Todo cabe en un espacio de Hilbert sabiéndolo acomodar

Rubén A. Martínez Avendaño
Centro de Investigación en Matemáticas,
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo,
Pachuca, Hidalgo.

rubeno71@gmail.com

1. Introducción

Cualquier estudiante de primer año de una licenciatura en matemáticas está familiarizado con el conjunto de los números reales, denotado usualmente con el símbolo $\mathbb{R}$. Ya en el segundo año, se empieza a trabajar con $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y en general, con $\mathbb{R}^n$ para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, creo que a muchos estudiantes se les ocurre la siguiente pregunta: si hay $\mathbb{R}^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, ¿por qué no hay $\mathbb{R}^\infty$?[1]

Si $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de «parejas» de números reales, $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de «ternas» de números reales y $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de «n-adas» de números reales, $\mathbb{R}^\infty$ tendrá que ser, naturalmente, el conjunto de «∞-adas» de números reales, ¿o no?

Por supuesto, la respuesta depende de que propiedades de $\mathbb{R}^n$ nos interese conservar al pasar a $\mathbb{R}^\infty$. Si todo lo que nos interesa es preservar las propiedades como espacio vectorial (es decir, que la suma de elementos y la multiplicación por un escalar tengan las propiedades «usuales») entonces $\mathbb{R}^\infty$ es eso: el conjunto de «∞-adas» de números reales.[2] Por ejemplo, una «∞-ada» de números reales sería

$$(1, 2, 3, 4, 5, \dots).$$

Sin embargo, si nos interesan otras propiedades, entonces la respuesta no es tan clara. Por ejemplo, algo que es muy útil en $\mathbb{R}^n$ es medir la longitud de los vectores o, equivalentemente, medir la distancia entre puntos. El concepto de distancia usual que utilizamos en $\mathbb{R}^2$ (también

[1] Aquí vamos a pensar en $\mathbb{R}^\infty$ como el producto cartesiano infinito *numerable* de copias de $\mathbb{R}$.

[2] A los lectores que gusten algo más riguroso, podemos pensar en las «∞-adas» como las sucesiones con valores reales; i.e., las funciones de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$.

llamada distancia euclidiana) proviene del Teorema de Pitágoras. Es decir, la longitud del vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es $\sqrt{x^2 + y^2}$. Para $\mathbb{R}^n$ generalizamos esta idea haciendo que la longitud del vector $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sea

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Si queremos generalizar esta idea para $\mathbb{R}^\infty$, estamos en problemas: ¿cuál sería la longitud del vector $(1, 1, 1, 1, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$? Tendríamos que calcular algo como

$$\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots},$$

la cual es una suma divergente. ¿Cómo podemos evitar el problema de medir la longitud de vectores como $(1, 1, 1, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$? Solución: ¡no los medimos![3]

Por supuesto, esto no suena muy científico. Pero, ¿qué tal si redefinimos?

Definición 1.1. El espacio ℓ^2 se define como

$$\ell^2 := \left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \, : \, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}.$$

Este espacio es un ejemplo de un *espacio de Hilbert*, nombrado así en honor de David Hilbert, cuyo trabajo sobre ecuaciones integrales a principios del siglo XX, estableció las bases para el estudio del análisis de espacios de dimensión infinita [12].

Debemos mencionar que, en general, un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con un producto interno, con una norma proveniente de este producto interno, y que es completo con la métrica dada por esta norma.[4] Sugerimos que si el lector no esta familiarizado con la definición de espacio de Hilbert, no se preocupe mucho de esta definición pues no la usaremos más. Concentrémonos en ℓ^2.

En el caso de ℓ^2, el producto interno está dado por

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots,$$

donde $a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ y $b = (b_1, b_2, b_3, \dots)$ están en ℓ^2.[5] La norma de a está dada por

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots}.$$

Pensaremos en la norma como la «longitud» del vector.

[3]Otra solución sería medir la longitud de otra forma: hay varias maneras de hacer esto, pero en este artículo solo nos interesa la distancia euclidiana.

[4]Un espacio vectorial normado es completo si cada sucesión de Cauchy converge a un elemento del espacio.

[5]No atacaremos aquí la convergencia de esta serie. Solo mencionamos que la convergencia se debe a la clásica desigualdad de Cauchy–Schwarz.

Es claro que cualquier vector que termine en una cadena infinita de ceros está en ℓ^2. Por ejemplo, $x := (1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, 0, \dots)$ está en ℓ^2 puesto que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 0^2 + 0^2 + \cdots = 55 < \infty,$$

por lo que $\|x\| = \sqrt{55}$. El espacio ℓ^2 también contiene vectores que no terminan en una cadena infinita de ceros. Por ejemplo, el vector $y := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$ está en ℓ^2 pues

$$1^2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{16^2} + \cdots = \frac{4}{3} < \infty,$$

la cual es la suma de una serie geométrica. En este caso, $\|y\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$. También es cierto, aunque es un tanto más difícil de demostrar, que el vector $z := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$ está en ℓ^2, pues la serie

$$1^2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

es finita, y de hecho es igual a $\frac{\pi^2}{6}$,[6] por lo que $\|z\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

2. Dimensión

El espacio ℓ^2 tiene dimensión infinita. ¿Qué quiere decir que un espacio tenga dimensión infinita? En nuestros cursos de álgebra lineal aprendemos que la dimensión del espacio es la cardinalidad (i.e., el «tamaño») de una base del espacio. Una base (de Hamel) es un conjunto linealmente independiente y que genera al espacio; equivalentemente, es un conjunto linealmente independiente *maximal*; i.e., no hay un conjunto linealmente independiente más grande que lo contenga.

Sin embargo, consideremos la siguiente situación. Para cada número real λ, con $\lambda \in (-1, 1)$, definamos el vector

$$\phi_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots).$$

Es claro que $\phi_\lambda \in \ell^2$ para $\lambda \in (-1, 1)$ puesto que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda^k|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{2k} = \frac{1}{1 - |\lambda|^2} < \infty.$$

Sin embargo, el conjunto

$$\{\phi_\lambda \,:\, \lambda \in (-1, 1)\}$$

[6]Este resultado, conocido como el «Problema de Basilea», fue resuelto por Euler en 1735, y se dice que fue el que lo llevó a la fama en su juventud [1].

es linealmente independiente ya que para cualesquiera constantes $c_1, c_2, \dots, c_k$ y reales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$ que cumplan

$$c_1\phi_{\lambda_1} + c_2\phi_{\lambda_2} + c_3\phi_{\lambda_3} + \cdots + c_k\phi_{\lambda_k} = 0,$$

se debe tener que $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_k = 0$.[7]

Sin embargo, notemos que la cardinalidad del conjunto

$$\{\phi_\lambda : \lambda \in (-1, 1)\}$$

es la del intervalo $(-1, 1)$ y por lo tanto es un conjunto no numerable. ¿Quiere decir esto que la dimensión de ℓ^2 es infinita y no numerable? Sí. Pero, ¿no está raro que un proceso que inició con espacios de dimensión finita (n, pues iniciamos con $\mathbb{R}^n$) al tomar el «límite» nos lleve a una dimensión mayor que la numerable (es decir, dimensión mayor que $\aleph_0$)?

Resulta ser que esto es inevitable: no existen espacios de Hilbert de dimensión infinita numerable.[8] El problema, de nuevo, es uno de definición: en vez de tomar la definición de «base» que aprendimos en álgebra lineal, debemos usar la definición de «base ortonormal». Recordemos que un conjunto $\mathcal{E}$ es ortonormal si cada vector en $\mathcal{E}$ es de longitud uno y cualesquiera dos vectores distintos son ortogonales (i.e., su producto interno es cero). Un conjunto $\mathcal{E}$ es una base ortonormal si es un conjunto ortonormal máximal.

Si para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$e_k := (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots),$$

donde el único 1 está en la posición k, es fácil demostrar que el conjunto $\mathcal{E} := \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal. Por lo tanto la dimensión del espacio de Hilbert, definida como la cardinalidad de una base ortonormal,[9] es $\aleph_0$ (i.e., es numerable).

3. Subespacios e hiperplanos

Recordemos que en nuestros cursos de álgebra lineal aprendemos que, dado un espacio vectorial X, un subespacio U es un subconjunto no vacío de X tal que U es también un espacio vectorial (con las operaciones heredadas de X). En la práctica, para verificar que un conjunto es

[7]Demostrar esto es equivalente a demostrar que la matriz de Vandermonde es no singular. Ver, por ejemplo, [15].

[8]La completez del espacio es lo que produce este curioso fenómeno. Recordemos que una consecuencia del teorema de categoría de Baire (ver, por ejemplo, [6, pp. 161-163]) es que un espacio métrico completo nunca es una unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío. Supongamos que un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, tuviera una base infinita numerable $\{v_k\}$. Sea V_n el espacio generado por los vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Pero entonces, $\mathcal{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ y sin embargo los espacios V_n son cerrados y tienen interior vacío.

[9]Se puede demostrar que cualesquiera dos bases ortonormales tienen la misma cardinalidad. Ver, por ejemplo, [5].

un subespacio, basta verificar que la suma de dos elementos del conjunto está en el conjunto y la multiplicación de un elemento del conjunto por un escalar está en el conjunto.

Cuando consideramos espacios vectoriales con una norma, el espacio tiene estructura de espacio métrico y por lo tanto es natural pensar en los conceptos de «aproximación» y de «cercanía». Esto lleva naturalmente a considerar conceptos como convergencia, cerradura y densidad. Por ejemplo, ¿será cierto que todo subespacio de un espacio vectorial normado es cerrado? Esta pregunta nunca la hacemos en los cursos de álgebra lineal, y la razón es que en $\mathbb{R}^n$ todos los subespacios son cerrados (ver, por ejemplo, [5]).

No es difícil imaginarse subespacios de ℓ^2 que no son cerrados. El ejemplo más sencillo es, quizá, el espacio $\mathcal{M}$ de las sucesiones finitas (i.e., las que terminan en una cadena infinita de ceros). Es claro que es un subespacio. También es claro que no es cerrado: la sucesión (de sucesiones) $\{x_n\}$ definida como

$$x_n := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, 0, 0, \dots)$$

converge al vector x, definido como

$$x := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^5}, \dots),$$

el cual está en ℓ^2, pero no está en $\mathcal{M}$.

Por otro lado, es claro también que $\mathcal{M}$ es denso en ℓ^2: para cualquier vector $y \in \ell^2$ existe una sucesión $\{y_n\}$ de vectores en $\mathcal{M}$ que convergen a y (demostración: repítase lo que se hizo arriba para el vector x).

Si el ejemplo anterior no le parece extraño al lector, quizá el siguiente sí. Primero, un *hiperplano* se define como un subespacio al que le «falta una dimensión» para ser todo el espacio: es decir, un subespacio propio $\mathcal{N}$ es un hiperplano si existe un vector $x \neq 0$ tal que el espacio más pequeño que contiene a $\mathcal{N}$ y a x es todo el espacio.[10]

Recordemos que una base de Hamel, es un conjunto maximal linealmente independiente. Sea $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ la base ortonormal en ℓ^2 definida antes y sea $x \in \ell^2$ un vector no finito: por ejemplo, el vector

$$x := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^5}, \dots).$$

Entonces, se puede demostrar[11] que existe una base de Hamel $\mathcal{B}$ que contiene al conjunto $\{x, e_1, e_2, e_3, \dots\}$. Consideremos ahora al espacio $\mathcal{N}$, definido como el subespacio más pequeño que contiene a los vectores en $\mathcal{B} \setminus \{x\}$. Este espacio $\mathcal{N}$ es un hiperplano, por definición de base de Hamel. Sin embargo, el espacio $\mathcal{N}$ es denso, pues claramente contiene

[10] A esto se le llama el espacio generado por $\mathcal{N}$ y x.

[11] Usando el Lema de Zorn; es decir, asumimos el axioma de elección.

al espacio $\mathcal{M}$ de las sucesiones finitas, el cual ya vimos que es denso. Es decir, en el espacio de Hilbert ℓ^2 existe un hiperplano denso, lo cual va contra la intuición de cómo se ven los hiperplanos.

4. Cuadrantes

¿Cuántos «cuadrantes» hay en ℓ^2? De nuevo, no es mala idea pensar primero acerca de lo que sucede en $\mathbb{R}^n$. Antes que nada, ¿qué es un cuadrante? Los cuadrantes son los conjuntos máximales en $\mathbb{R}^n$ tales que cada vector en el conjunto, tiene el mismo signo ($+$ o $-$), en cada una de sus coordenadas.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ hay cuatro cuadrantes: el conjunto $(-\infty,0)\times(-\infty,0)$, correspondiente a que ambas coordenadas tengan signo $-$, el conjunto $(-\infty,0)\times(0,\infty)$, correspondiente a que la primera coordenada tenga signo $-$ y la segunda tenga signo $+$, el conjunto $(0,\infty)\times(-\infty,0)$, correspondiente a que la primera coordenada tenga signo $+$ y la segunda tenga signo $-$, y, por último, el conjunto $(0,\infty)\times(0,\infty)$, correspondiente a que ambas coordenadas tengan signo $+$.

En $\mathbb{R}^3$ hay ocho cuadrantes (en este caso, por razones obvias, se les llama «octantes»): aquellos que corresponden a la distribución de signos $(-,-,-)$, $(-,-,+)$, $(-,+,-)$, $(-,+,+)$, $(+,-,-)$, $(+,-,+)$, $(+,+,-)$, y $(+,+,+)$. No le costará mucho trabajo al lector verificar que el número de cuadrantes en $\mathbb{R}^n$ es 2^n.

Regresando a la pregunta original: ¿cuántos cuadrantes hay en ℓ^2? Una infinidad, sí, pero, ¿tantos como hay números naturales? Es decir, ¿habrá $\aleph_0$ cuadrantes? No, y para demostrarlo usemos el argumento de diagonalización de Cantor: si hubiera una cantidad numerable de cuadrantes, estos se podrían numerar (todos) en una lista como, por ejemplo, la siguiente:

$$
\begin{array}{c}
(\boldsymbol{+},-,-,+,-,-,+,-,-,\dots)\\
(+,\boldsymbol{+},+,+,-,-,+,-,-,\dots)\\
(-,-,\boldsymbol{-},-,-,-,+,-,-,\dots)\\
(+,-,-,\boldsymbol{+},+,-,+,+,-,\dots)\\
(-,-,-,-,\boldsymbol{-},-,-,-,-,\dots)\\
(+,+,+.+,-,\boldsymbol{-},+,+,-,\dots)\\
(+,-,-,-,-,-,\boldsymbol{+},-,-,\dots)\\
(-,-,-,-,-,-,+,\boldsymbol{+},+,\dots)\\
(-,+,-,-,+,+,+,+,\boldsymbol{+},\dots)\\
\vdots
\end{array}
$$

(Aqui cada renglón representa un cuadrante mediante una distribución de signos.)

Construyamos una distribución de signos fijándonos en la diagonal del diagrama de arriba y cambiando todos los signos: en el ejemplo de arriba la diagonal es $(+,+,-,+,-,-,+,+,+,\dots)$ y al cambiar los signos obtenemos la distribución $(-,-,+,-,+,+,-,-,-,\dots)$, la cual es imposible que esté en la lista, pues si estuviera en la posición n, su n-ésimo elemento tendría que ser igual al n-ésimo elemento de la diagonal, y no lo es. Esto es una contradicción a la suposición de que todas las distribuciones de signos estaban en la lista. Por lo tanto, la cardinalidad de los cuadrantes es no numerable. De hecho, no es difícil demostrar que la cardinalidad es igual a la de los reales.

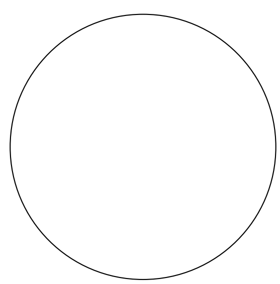
Como sucedió con la dimensión del espacio de Hilbert, aquí también tenemos un fenómeno curioso: para cada $\mathbb{R}^n$ hay una cantidad finita de cuadrantes. Sin embargo, al pasar a ℓ^2, tenemos una cantidad no numerable de cuadrantes.

5. Esferas

Platiquemos un poco más acerca de la geometría de $\mathbb{R}^n$ y de ℓ^2. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ se define la circunferencia (centrada en el origen y de radio uno) como el conjunto

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2=1\}.$$

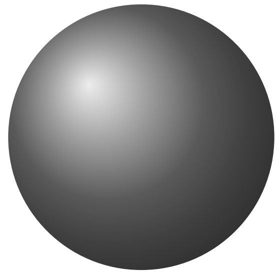
En caso de que alguien tenga duda de como se ve este conjunto, aquí está una figura de la circunferencia:



La «circunferencia» en $\mathbb{R}^3$ se define como el conjunto

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2=1\}$$

y la figura se ve más o menos así:



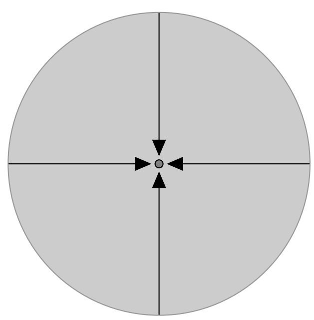
Por supuesto, usualmente, a este conjunto le llamamos la «esfera» en $\mathbb{R}^3$.

La esfera en $\mathbb{R}^n$ se define como el conjunto

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

y la figura se ve usualmente como ... bueno, no sé cómo se ve. Yo no puedo imaginarme esta esfera en $\mathbb{R}^n$ de la misma manera que imaginé la esfera en $\mathbb{R}^2$ o la esfera en $\mathbb{R}^3$.

Una propiedad que tienen las esferas en $\mathbb{R}^n$ es que no son *contraíbles*. ¿Qué quiere decir que un conjunto sea contraíble? Sin entrar en tecnicismos, pensamos que un conjunto es contraíble si puede deformarse, de manera continua y sin salirse del mismo conjunto, a un punto. Por ejemplo, el conjunto $B_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ se puede llevar continuamente, y sin salirse de B_2, al punto $(0, 0) \in B_2$, como se ve en la siguiente figura:



Debería ser claro, al menos intuitivamente, que las esferas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ no son contraíbles: pensemos que la esfera en $\mathbb{R}^3$ está hecha de hule, como si fuera un globo. Si se trata de llevar toda la esfera a un punto (llamémosle «final») sin salirse de ella misma, hay partes de la esfera que nunca se acercarán al punto final. De hecho, es intuitivamente claro que hay puntos muy cercanos entre sí que se mueven en diferentes direcciones.[12] La única manera de acercar a cada uno de los

[12] De hecho hay una relación muy interesante entre la contractibilidad de las esferas y la existencia de funciones (en la bola cerrada determinada por la esfera) sin puntos fijos. Ver [10].

puntos, eventualmente, al punto final es «rompiendo» el hule, lo cual está prohibido por la continuidad.[13]

Consideremos ahora la esfera en ℓ^2. Esta se define como el conjunto

$$S := \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2 \,:\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots = 1\}.$$

Esta esfera, ¿es contraible? Resulta ser que sí es contraible. Sin entrar en muchos detalles, la razón de que sea posible contraer la esfera a un punto es que esta esfera tiene una copia de sí misma en su ecuador. Es decir, el conjunto

$$\{(0, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2 \,:\, x_2^2 + x_3^2 + \cdots = 1\},$$

es, esencialmente,[14] el mismo que S. Gracias a esto, es posible deformar la esfera sobre sí misma, sin romperla, y llevarla a su ecuador (esto de ninguna manera es obvio, pero sí es cierto). Una vez hecho esto el resto es sencillo: deformamos ahora el ecuador llevándolo al «polo norte» de la manera obvia (moviéndonos sobre los «meridianos»). Es decir, hemos logrado deformar la esfera sobre sí misma para llevarla a su polo norte, sin romper y de manera continua. Una muy bonita demostración de esto se puede encontrar en el artículo [10], el cual recomendamos ampliamente al lector interesado.

Notemos el cambio radical al pasar de $\mathbb{R}^n$ a ℓ^2: las esferas en $\mathbb{R}^n$ nunca son contraíbles, sin embargo la esfera en ℓ^2 sí es contraíble. Este cambio en la geometría del espacio al pasar a dimensiones infinitas no es algo raro: mostraremos algunos otros ejemplos en las siguientes secciones.

Debemos agregar que una de las razones de este cambio al pasar de $\mathbb{R}^n$ al espacio de Hilbert ℓ^2 es que este tiene «mucho espacio». Para citar a Saunders Mac Lane (como es citado en [13]): *"Gentlemen: there's lots of room left in Hilbert space."*

6. Compacidad

¿Qué quiere decir que un conjunto sea compacto? Según el Diccionario de la Lengua Española [3],

> **compacto, ta.**
>
> **1**. adj. Dicho de un cuerpo: De textura apretada y poco porosa
>
> **2**. ...
>
> **3**. adj. Denso, condensado.

Si queremos traducir esta definición a algo matemáticamente útil, debemos pensar que querría decir que un conjunto sea «de textura

[13] De hecho, al «romper» el hule, la esfera se convierte en el disco B_2, el cual sí es contraíble.

[14] En términos técnicos, este conjunto es homeomorfo a S.

apretada y poco porosa». Una manera de matematizar esto es pensando en sucesiones dentro del conjunto. Si el conjunto es «apretado y no poroso», esperaríamos que si una sucesión converge, lo haga a un elemento del conjunto (es «poco poroso»). Pero, ¿y si no converge? Bueno, al menos debe tener una subsucesión que lo haga. ¿Y si no tiene subsucesiones convergentes? Entonces no es un conjunto «apretado». Esto nos lleva a la siguiente definición.[15]

Definición 6.1. Un conjunto es *compacto*, si cualquier sucesión en el conjunto tiene una subsucesión que converge a un punto en el conjunto.

Pues bien: pensemos de nuevo en la estera S en ℓ^2. ¿Será un conjunto compacto? Es bien sabido[16] que en $\mathbb{R}^n$ un conjunto es compacto si y solo si es cerrado (i.e., contiene a su frontera) y es acotado (i.e., está contenido en una bola centrada en cero y de un radio fijo). Nuestra esfera S definitivamente es cerrada y acotada, pero no está en $\mathbb{R}^n$. ¿Será compacta?

Veamos el siguiente ejemplo. Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos el vector

$$e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots),$$

en donde el número 1 está en la posición k. Cada vector e_k está en S. Si S fuera compacto, debería haber una subsucesión convergente. Pero note el lector que si $k < j$ se tiene

$$\|e_k - e_j\|^2 = \|(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots)\|^2 = 1^2 + (-1)^2,$$

por lo que $\|e_k - e_j\| = \sqrt{2}$. Esto hace la convergencia de cualquier subsucesión imposible: si una sucesión converge sus términos tienen que acercarse entre sí[17] y ninguna subsucesión de $\{e_n\}$ puede tener esa propiedad pues la distancia entre cualesquiera dos vectores distintos de la sucesión es $\sqrt{2}$.

Es decir, la esfera S no es compacta, ¡a pesar de ser cerrada y acotada!

7. Volumen

Consideremos ahora la bola B en ℓ^2, definida como

$$B := \{x \in \ell^2 \, : \, \|x\| \leq 1\}.$$

¿Cuál será el volumen de la bola B? Una posible manera de atacar el problema es considerar las bolas en dimensión n y tratar de generalizar.

Definamos pues, para cada $n \in \mathbb{N}$, la bola cerrada B_n como

$$B_n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \, : \, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}.$$

[15]Esta definición es válida para espacios métricos. Para espacios más generales (espacios topológicos) la definición es otra.

[16]Teorema de Heine–Borel.

[17]En términos técnicos toda sucesión convergente es, en particular, una sucesión de *Cauchy*.

Ya que B_1 es el intervalo cerrado $[-1,1]$, es claro que su volumen (en $\mathbb{R}^1$ le llamamos «longitud») es 2. La bola B_2 es el círculo de radio 1 por lo que su volumen (en $\mathbb{R}^2$ le llamamos «área») es π. La bola B_3 es la esfera sólida de radio 1 y su volumen es $\frac{4}{3}\pi$. (¿Observa el lector un patrón?)

Se puede demostrar con métodos de cálculo de varias variables (integrando iterativamente por secciones transversales; ver, por ejemplo, [2]) que el volumen de B_n está dado por

$$\operatorname{vol}(B_n) = \begin{cases} \dfrac{\pi^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdots(3)(2)(1)}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \dfrac{\pi^{(n-1)/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Es un ejercicio para un segundo curso de cálculo demostrar que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\pi^k}{k!} = 0.$$

De aquí se sigue que en el caso que n sea par, digamos $n = 2k$, se tiene

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ par}}} \operatorname{vol}(B_n) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ par}}} \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{\pi^k}{k!} = 0$$

Si $n \geq 3$ es impar, obtenemos la desigualdad

$$\left(\tfrac{n}{2}\right)\left(\tfrac{n}{2}-1\right)\cdots\left(\tfrac{5}{2}\right)\left(\tfrac{3}{2}\right) \geq \left(\tfrac{n-1}{2}\right)\left(\tfrac{n-1}{2}-1\right)\cdots\left(\tfrac{4}{2}\right)\left(\tfrac{2}{2}\right) = \left(\tfrac{n-1}{2}\right)!,$$

la cual implica que

$$\operatorname{vol}(B_n) \leq \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} \leq \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\frac{1}{2}}$$

por lo que, si $n = 2k+1 \geq 3$ es impar, se tiene

$$0 \leq \lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ impar}}} \operatorname{vol}(B_n) \leq 2 \lim_{\substack{n\to\infty \\ n \text{ impar}}} \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} = 2 \lim_{k\to\infty} \frac{\pi^k}{k!} = 0$$

y, en conclusión,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{vol}(B_n) = 0.$$

¿Quiere esto decir que el volumen de la bola B en ℓ^2 es cero? ¿Hay alguna manera de definir el volumen de la bola B de manera que obtengamos una cantidad positiva?

Para cada vector e_k (como los definimos en la sección anterior), consideremos la bola cerrada centrada en $\frac{1}{2}e_k$ y de radio $\frac{1}{3}$; es decir,

$$D_k := \left\{ x \in \ell^2 \ : \ \|x - \frac{1}{2}e_k\| \leq \frac{1}{3} \right\}.$$

Además, consideremos la bola cerrada, centrada en 0 y de radio $\frac{1}{3}$:

$$D := \left\{ x \in \ell^2 \ : \ \|x\| \leq \frac{1}{3} \right\}.$$

No sabemos cuál es el volumen de cada una de las bolas D_k. Sin embargo, notemos que cada una de estas bolas es una traslación de la bola D y por lo tanto todas deben tener el mismo volumen (al menos si queremos que el volumen se preserve bajo traslaciones). Supongamos, entonces, que el volumen de D, y por ende de cada una de estas bolas, es positivo. Notemos además que cada una de estas bolas está contenida en B y las bolas son disjuntas entre sí (esto es porque la distancia entre los centros es $\frac{1}{\sqrt{2}}$ el cual es mayor que dos veces el radio de cada bola D_k). Por lo tanto, el volumen de B debe ser mayor que la suma de los volúmenes de la infinidad de bolas D_k, y si todas son del mismo volumen positivo, se sigue que el volumen de B es infinito.

¿Qué quiere decir esto? Pues que el volumen de la bola D es cero o infinito. Si fuera infinito, esto implica que el volumen de la bola B es infinito también. Pero si el volumen de D es cero, y si aceptamos que el volumen de B debiera ser proporcional al volumen de D, entonces el volumen de B debiera ser cero también.

Si el lector no está mareado todavía, la conclusión debería de ser clara: bajo una definición razonable de «volumen», el volumen de B debe ser 0 o infinito. Ya que ninguna opción nos gusta concluimos que *no se puede definir un volumen «razonable» para la bola B en ℓ^2.*

No todo está perdido. Se pueden encontrar maneras de medir volúmenes en el espacio de Hilbert, al menos si retiramos la condición de invariancia bajo traslaciones. Una buena descripción (a nivel avanzado) de como crear estas «medidas gaussianas» se puede encontrar en el capítulo 6 de [4].

8. Operadores y rangos

Para seguir platicando del tipo de fenómenos que ocurren en el espacio de Hilbert ℓ^2, necesitamos hablar primero sobre funciones en el espacio; en particular de transformaciones lineales. A partir de este momento, llamaremos a una transformación lineal continua $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o $T : \ell^2 \to \ell^2$ un *operador*.

No es muy difícil demostrar que todas las transformaciones lineales[18] T en $\mathbb{R}^n$ son funciones continuas. Para demostrar esto es suficiente mostrar que si T es una transformación lineal en $\mathbb{R}^n$, entonces existe

[18] Por supuesto, una vez que fijamos una base del espacio, las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ son simplemente matrices $n \times n$, y cada matriz representa una transformación lineal. No hablaremos aquí de esta relación, estudiada en los cursos de álgebra lineal.

una constante $C > 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$; invitamos al lector a demostrar esto. [19]

Sea T un operador en $\mathbb{R}^n$. Es fácil convencerse que la imagen de T, es decir, el conjunto

$$\{y \in \mathbb{R}^n \,:\, y = Tx, \text{ para algún } x \in \mathbb{R}^n\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, y es cerrado. A estás alturas, no debería sorprenderle al lector que existen operadores en ℓ^2 cuyos rangos no son cerrados. Uno de los ejemplos más simples es el operador $T : \ell^2 \to \ell^2$ definido como

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots\right).$$

Dejamos como ejercicio al lector la demostración de que el operador T está bien definido y que es continuo. Mostraremos que la imagen de T no es todo ℓ^2 pero sin embargo es un subconjunto denso de ℓ^2. Que no es todo ℓ^2 es inmediato de observar que no existe $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$ tal que

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right),$$

pues, al resolver las ecuaciones resultantes, se tendría que $x_k = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pero $(1, 1, 1, \dots)$ no es un vector de ℓ^2.

Por otro lado, recuerde el lector que $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ es el vector que es cero en todas sus entradas, excepto en la entrada k-ésima, donde es igual a 1. Entonces tenemos que $T(ke_k) = e_k$, por lo que cada vector e_k está en la imagen de T. Como la imagen de T es un subespacio vectorial, esto implica que cualquier vector finito está en la imagen de T. Esto quiere decir que la imagen de T es un conjunto denso.

9. Órbitas

¿Cómo se ve la órbita de un vector en $\mathbb{R}^n$ bajo la acción de un operador? En este caso, la órbita del vector $x \in \mathbb{R}^n$, bajo la acción del operador $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se define como el conjunto

$$\{x, Ax, A^2x, A^3x, \dots\}.$$

Aquí, $A^n x := (A \circ A \circ A \circ \cdots \circ A)(x)$, donde la composición se realiza n veces.

El caso más sencillo de estudiar es el de $n = 1$. En este caso, los operadores lineales son todos de la forma $Ax = cx$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (y

[19] En ℓ^2 existen ejemplos de transformaciones lineales no continuas, pero no hablaremos de ellas aquí.

para algún $c \in \mathbb{R}$). Entonces la órbita de x bajo A es el conjunto

$$\{x, cx, c^2x, c^3x, \dots\}.$$

Este conjunto toma diferentes formas, dependiendo de si x es positivo o negativo (o cero), de si c es positivo o negativo (o cero) y de si $|c|$ es mayor o menor (o igual) que uno. Por ejemplo, si $x > 0$ y si $c > 1$, esta órbita es una sucesión creciente y no acotada de números positivos. En particular, este conjunto no tiene puntos de acumulación. Si $x > 0$, pero $0 < c < 1$, la órbita es una sucesión decreciente de números positivos y, de hecho, solo se acumula en el cero. Los demás casos se dejan de ejercicio al lector, pero note que en cada uno de ellos hay a lo más un punto de acumulación.

En el caso $n = 2$ las cosas se complican un poco. Si $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal, entonces A se puede representar (en una base adecuada) con una matriz de alguna de las siguientes tres formas

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \text{o} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

En el primer caso, la órbita de A sobre un vector (u, v) (representado en la misma base) es el conjunto

$$\{(u, v), (c_1u, c_2v), (c_1^2u, c_2^2v), (c_1^3u, c_2^3v), \dots\}.$$

Es claro que dependiendo de los valores de las constantes c_1, c_2, u y v, este conjunto tomará diversas formas (¿cuáles?). Sin embargo, debería ser claro, igual que en el caso $n = 1$, que a lo más hay un punto de acumulación (el origen).

En el caso que la matriz de A tenga la segunda forma, la órbita de A sobre el vector (u, v) es más difícil de entender. Sin embargo, es fácil checar que el conjunto de las «segundas coordenadas» de la órbita es

$$\{v, cv, c^2v, c^3v, \dots\}$$

la cual se acumula, cuando mucho, en el origen. Por lo tanto, la órbita de A se acumula, cuando mucho, en el «eje Y» (de la base escogida).

No es muy complicado convencerse que la matriz del tercer caso no es más que una rotación y una multiplicación por una constante positiva. Por lo cual, es claro que la órbita de A se acumula, a lo mucho, en un círculo de radio fijo (o en el origen). Dejamos la verificación de esto para el lector interesado.

Se puede demostrar que si $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lineal, entonces la órbita de cualquier vector bajo A es un conjunto que es «denso en ninguna parte»; es decir, su cerradura tiene interior vacío. La prueba general de esto está fuera del alcance de esta nota, pero haremos el caso especial cuando A tiene un eigenvalor λ. En este caso, se tiene que λ también es un eigenvector de la matriz transpuesta; sea $v \neq 0$ tal que $A^T v = \lambda v$. Si la cerradura del conjunto

$$\{u, Au, A^2u, A^3u, \dots\}$$

tuviera interior no vacío en $\mathbb{R}^n$, entonces al multiplicar por el vector v^T (por la izquierda), obtenemos el conjunto

$$\{v^T u, v^T Au, v^T A^2u, v^T A^3u, \dots\},$$

cuya cerradura tendría interior no vacío en $\mathbb{R}$ (esto es consecuencia de la continuidad y la suprayectividad de la transformación de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ definida por $x \mapsto v^T x$). Pero obsérvese que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$v^T A^n u = ((A^n)^T v)^T u = ((A^T)^n v)^T u = (\lambda^n v)^T u = \lambda^n v^T u$$

y por lo tanto la cerradura del conjunto

$$\{v^T u, v^T Au, v^T A^2u, v^T A^3u, \dots\} = (v^T u)\ \{1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots\}$$

tendrá interior no vacío, lo cual es imposible (¿Por qué?).

Después de esto, es muy natural pensar que lo mismo debería de suceder en ℓ^2. Sin embargo, en 1969, Stefan Rolewicz [14] demostró que existe un vector $v \neq 0$ para el cual la órbita bajo el operador $2B$ es *denso* en ℓ^2: es decir, no solo la cerradura sí tiene interior, sino que la cerradura es todo el espacio. Aquí B es el operador de desplazamiento hacia atrás definido como

$$B(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) = (a_2, a_3, a_4, a_5, \dots).$$

La aparición del número 2 en el operador $2B$ quizá parezca misteriosa, pero notemos que si x está en ℓ^2 se tiene que $\|Bx\| \leq \|x\|$, por lo que el operador B manda cada vector x a un vector de norma menor o igual que la de x. Por lo tanto la órbita de x bajo el operador B es un conjunto acotado, por lo que la órbita de cualquier vector x bajo B no es un conjunto denso. Sin embargo, esto ya no pasa con $2B$: las normas de x y de $2Bx$ no son comparables (para x arbitrario).[20]

La demostración de Rolewicz es técnicamente complicada, así que solo damos una idea de ella. Primero, escogemos una sucesión $\{v_n\}$ de vectores en ℓ^2 con dos propiedades: cada vector es «finito» (i.e., solamente tiene un número finito de entradas distintas de cero) y la sucesión es densa en ℓ^2. Se construye un vector x colocando en orden (la parte finita de) los vectores v_1, v_2, v_3, etc. e intercalando ceros. Por ejemplo, si $v_1 = (0, 0, 1, 2, 0, 0, 0, \dots)$, $v_2 = (3, -1, 4/5, 0, 0, \dots)$ y $v_3 = (-2, 3, 1, 1, 0, 0, \dots)$ entonces el vector x es

$$x = (0, 0, 1, 2, 0, \dots, 0, 3, -1, 4/5, 0, \dots, 0, -2, 3, 1, 1, 0, \dots).$$

[20] De hecho, el mismo resultado es cierto para λB donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un número de valor absoluto mayor que uno.

El problema que tiene este vector es que no necesariamente está en ℓ^2. La manera en que se arregla esto es modificando cada uno de los vectores v_n multiplicándolos por una potencia apropiada de $\frac{1}{2}$: he aquí donde entran las dificultades técnicas. Una vez hecho esto, sin embargo, no es muy díficil convencerse que muchos de los vectores de la órbita de x bajo $2B$ tienen a los vectores originales $\{v_n\}$ en sus primeras entradas y por lo tanto la órbita es densa.

De nuevo, el hecho de que hay mucho espacio en ℓ^2 juega un papel primordial para que esto sea posible.

Una demostración moderna de la existencia de un vector x tal que la órbita de x bajo $2B$ es densa en el espacio se puede encontrar en [8]. Esta demostración incluye el sorprendente hecho que «casi todos»[21] los vectores del ℓ^2 tienen una órbita densa bajo la acción de $2B$.

Más sorprendentemente, se puede demostrar que, dado cualquier conjunto numerable denso, y linealmente independiente $\mathcal{B}$ en ℓ^2, existe un operador T tal que la órbita del primer vector de $\mathcal{B}$ bajo T es precisamente el conjunto $\mathcal{B}$.

A los operadores con la propiedad de que existe un vector cuya órbita bajo el operador es un conjunto denso del espacio se les llama *hipercíclicos* (y al vector se le llama también *hipercíclico*).

Curiosamente, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que si v es un vector hipercíclico para $T := 2B$, entonces

$$T^n v \notin \operatorname{span}\{v, Tv, T^2v, T^3v, \dots, T^{n-1}v\}$$

pues si lo estuviera, la órbita estaría contenida en

$$\operatorname{span}\{v, Tv, T^2v, T^3v, \dots, T^{n-1}v\},$$

el cual es un espacio de dimensión finita y por lo tanto no es ℓ^2. Pero esto quiere decir que la órbita de v bajo T «llena» el espacio, pero ¡nunca regresa a los subespacio de dimensión finita que ya «tocó»!

10. Comentarios finales

Los lectores se preguntarán, por qué si en el título de esta nota hablamos de «espacios de Hilbert», nos enfocamos solamente en el espacio ℓ^2. Resulta ser que todos los espacios de Hilbert que tienen una base ortonormal numerable son «iguales» a ℓ^2, por lo que lo que sucede en ℓ^2 es lo mismo que sucede en cualquier otro espacio.[22] De todos los espacios de Hilbert, el espacio ℓ^2 es quizá el más sencillo de estudiar desde el punto de vista geométrico por su parecido a $\mathbb{R}^n$. Sin embargo

[21] Para decirlo de manera exacta, es un conjunto *residual* o, en otros términos, un G_δ denso.

[22] En términos técnicos, cualquier espacio de Hilbert con una base ortonormal numerable es isomorfo e isométrico a ℓ^2.

hay muchos otros espacios de Hilbert que son interesantes de estudiar, particularmente por los operadores que existen en ellos, los cuales pueden tener una forma mucho más simple que la forma que tendrían en ℓ^2.

Otra observación que debemos hacer es que los espacios de Hilbert que consideramos aquí son espacios vectoriales sobre el campo de los reales. Sin embargo, todos los resultados que se mencionaron aquí son válidos para el campo de los números complejos. De hecho, algunos resultados son más fáciles de demostrar en el caso complejo.

Por último, debemos aclarar que muchos de los resultados mostrados aquí son válidos para espacios de Banach (espacios vectoriales normados y completos). De hecho, el estudio de los espacios de Banach es un tema de investigación en el que, hoy en día, todavía se encuentran resultados sorprendentes sobre la geometría y los operadores en ellos; una referencia avanzada de este tipo de problemas es el libro [9], además de los dos volúmenes de [11] (para problemas no lineales el libro [4] es una excelente referencia). Curiosamente, el problema abierto, quizá más importante en el análisis funcional, el problema del subespacio invariante sigue abierto en un espacio de Hilbert con base ortogonal numerable, es decir, en ℓ^2. Hablar de este problema merece su propio artículo. Le recomendamos al lector interesado, por ejemplo, el artículo [7], que apareció en esta misma revista.

Agradecimientos:

El autor desea agradecer a los revisores por sus comentarios y las referencias que nos proporcionaron. Todo esto llevó a una mejora significativa de este artículo.

Bibliografía

[1] MacTutor, « History of Mathematics Archive», `www-history.mcs.st-and.ac.uk/`.
[2] T. Apostol, *Calculus*, vol. 2, Editorial Reverté, 2008.
[3] Asociación de Academias de la Lengua Española, «Diccionario de la Lengua Española», 2014, `www.rae.es/diccionario-de-la-lengua-espanola/la-23a-edicion-2014`.
[4] Y. Benyamini y J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, vol. 1, American Mathematical Society Colloquium Publications, 2000.
[5] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2.ª ed., Springer, 1990.
[6] F. G. Fontes, *Elementos de análisis funcional*, Centro de Investigación en Matemáticas A.C., 2006.
[7] M. L. García, «El problema del subespacio invariante», *Miscelánea Matemática*, núm. 58, 2014, 111–124.
[8] K.-G. Grosse-Erdmann y A. P. Manguillot, *Linear Chaos*, Springer, 2011.
[9] A. J. Guirao, V. Montesinos y V. Zizler, *Open problems in the geometry and analysis of Banach spaces*, Springer, 2016.

[10] O. Gutú, «Una demostración geométrica de que la esfera unitaria de ℓ^2 es contraíble», *Miscelánea Matemática*, núm. 42, 2006, 19–25.
[11] W. B. Johnson y J. Lindenstrauss, eds., *Handbook of the geometry of Banach spaces*, vol. I y II, North-Holland Publishing Co., 2001.
[12] I. Kaplansky, «Biografía de David Hilbert», `www.britannica.com/biography/David-Hilbert`.
[13] M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics: I Functional Analysis*, Academic Press, 1980.
[14] S. Rolewicz, «On orbits of elements», *Studia Math.*, vol. 32, 1969, 17–22.
[15] G. Strang, *Linear Algebra and its applications*, Brooks/Cole Pub Co, 2005.