

Un acercamiento histórico a dos sentidos dinámicos de estabilidad

Faustino Sánchez Garduño

Departamento de Matemáticas,
Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México
faustinos403@gmail.com

1. Introducción

Don Juan B. de Oyarzábal, capitán de fragata de la segunda república española, físico y esperantista, merced a la política de asilo practicada por el gobierno del general Lázaro Cárdenas, al triunfo de Francisco Franco en la guerra civil española, después de todo tipo de peripecias, se asiló en México e hizo de nuestro país su hogar. En reciprocidad a este gesto de generosidad Oyarzábal, desde distintas instituciones de educación superior, dedicó su vida profesional a la formación de varias generaciones de físicos mexicanos. Entre otras, lo hizo desde las aulas de la Facultad de Ciencias de la UNAM y de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Su fama de excelente expositor y conferencista sin par, fue legendaria.

Recordamos que en alguna de sus clases Don Juan, refiriéndose a la invención del lenguaje (de los lenguajes), como respuesta a la necesidad para comunicarse, hacía la siguiente reflexión.

Con el transcurrir del tiempo y la consecuente acumulación del conocimiento trajo apareado que el lenguaje que expresa el saber, se especializó a tal grado que se tornó en lo opuesto para lo que fue inventado: ¡se transformó en una barrera, para comunicarse! Para ejemplificar, Don Juan escogió el concepto de *la integral*. En efecto decía Oyarzábal, a través de este los físicos representan al trabajo desarrollado por una fuerza para llevar a un objeto desde un punto hasta otro, siguiendo determinada trayectoria; mientras que para un matemático, en un ejercicio de síntesis que llevó décadas, hablar de la integral de una función dada, puede significar ya sea la antiderivada de esta o bien —aunque

no son independientes— el área bajo su gráfica. Los matemáticos introdujeron un símbolo para representarla como la letra griega sigma mayúscula estilizada: Σ . Así, con el símbolo

$$\int_0^a f(x)dx, \quad (1)$$

los matemáticos convinieron en denotar al área bajo la gráfica de la función f desde el punto $x = 0$ hasta el punto $x = a$. En abono a la discusión que nos ocupa, Don Juan se preguntaba: «Pero... ¿qué le puede decir al hombre de la calle el concepto de integral... ese gusanillo altaneramente erguido que nada le dice al profano?»

El ejemplo mencionado, nos muestra nítidamente la complejidad que surge al intentar establecer comunicación entre dos personas con perfiles diferentes a propósito del mismo concepto. En este caso la integral de una función. A fin de tener una idea de los significados tan diversos de la coloquial palabra *estabilidad* o bien el término asociado a esta, el *equilibrio*, enseguida exponemos de forma esquemática una discusión sobre este punto.

El conductor de un vehículo dice que este es *estable*, si al manejarlo en carretera no presenta vibraciones que pongan en peligro situaciones como rebasar o tomar una curva a determinada velocidad.

Cuando el parte médico de un paciente internado en un hospital es: *el paciente esta estable*, a los familiares les pueda dar una esperanza de que su pariente mejorará. Sin embargo, el *estar estable*, dependiendo desde la referencia que se haga, puede significar cosas muy diferentes. Esta frase no tiene la misma carga si se hace para un paciente en estado de gravedad o si se hace para uno que convalece de una cirugía menor. Sin embargo, el carácter *estable* en este contexto, tiene el sentido si bien no de una mejoría manifiesta, tampoco de un empeoramiento en el estado de salud.

Cuando los dirigentes políticos hablan de que sus países son *políticamente estables*, amén de lo encriptado que suele ser el lenguaje usado por los políticos, con esta frase ellos quieren transmitir el mensaje a sus interlocutores de que las inherentes contradicciones entre las clases sociales de sus países, mantienen un cierto *equilibrio* de manera que dichos territorios los hacen, por ejemplo, propicios para las inversiones extranjeras. Los respectivos estados les garantizan condiciones «adecuadas» para que tales inversiones florezcan.

Cuando se habla de que el mercado de cambios se *estabilizó*, normalmente ello se refiere a que la oferta y la demanda de determinada moneda se equilibran, razón por la cual el precio, por ejemplo del dólar estadounidense comparado en pesos mexicanos, no fluctúa y entonces se dice que el precio de aquel se *estabilizó*. De nueva cuenta, el nivel

en el que ese equilibrio se logre es fundamental: no teniendo fluctuaciones, puede ser que ese cambio lo haga caro o barato para un país en particular.

Mientras que en ecología hasta hace algunos años, no había acuerdo sobre la acepción que los ecólogos habrían de dar a la palabra estabilidad. Para el destacado biólogo teórico Robert May [23]: *Una variedad de interpretaciones ecológicamente interesantes pueden ser y han sido asociadas, al término «estabilidad»*; mientras que para Volker Grimm y Christian Wissel [11] el panorama es aun más obscuro pues, escribieron: *La estabilidad es uno de los términos más nebulosos de la ecología*. A este pasmo de aparente diversidad, además de algunos de los usados en matemáticas, han entrado términos como plasticidad, elasticidad, resiliencia, etc. Véanse [14] y [22].

Los químicos caracterizan al *equilibrio químico* como aquel estado de una reacción química reversible por ejemplo la representada por la ecuación $A + B \rightleftharpoons P + Q$, en el que la rapidez de «ida» de la reacción es igual a la rapidez de «regreso», lo cual se logra siempre que el cociente, $\frac{[A][B]}{[P][Q]}$, de la concentración de los reactivos participantes (en un sentido y en el otro), sea constante.

Por *equilibrio termodinámico* los físicos entienden el estado que caracteriza a un sistema cuando este se encuentra en equilibrio térmico (sin cambio en la temperatura) y mecánico (suma de fuerzas y de torcas igual a cero); mientras que estos mismos profesionistas se refieren a un *punto de equilibrio* de un objeto en movimiento a una posición ocupada por aquel en la cual, además de estar en reposo, la fuerza neta que actúa sobre él, es cero.

Equilibrio metaestable, monoestabilidad, biestabilidad, estabilidad débil y un largo etcétera, son términos que se han acuñado y que incrementan la jerga en este vasto mundo de sentidos y acepciones. Sin embargo, cuando un matemático habla de que un *punto de equilibrio* de un sistema autónomo no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) es *asintóticamente estable localmente* y agrega: *en el sentido de Lyapunov*, lo que quiere decir este profesionista es que si se considera un conjunto de condiciones iniciales en una vecindad suficientemente pequeña de dicho equilibrio, entonces todas las soluciones (una para cada condición inicial) del sistema, tenderán asintóticamente (cuando el tiempo tienda a infinito) al punto de equilibrio. Este será el estado final del sistema independientemente de la condición inicial (con tal de que esté en la vecindad mencionada) de la que se parta.

En los párrafos anteriores, en contextos y con significados diferentes, aparecen los términos *equilibrio* y *estabilidad*. En algunos casos, se les ha añadido o bien un prefijo o bien un adjetivo con la pretendida finalidad de precisar su sentido. A esta pasmosa diversidad, bien se podrían

añadir otros más usados en diversas áreas del saber o en el lenguaje coloquial. Una primera idea que el profano (para usar el lenguaje de Don Juan) asociaría a las palabras «equilibrio» o «estabilidad», es la existencia de «algo» que no cambia, que permanece constante a medida que el tiempo transcurre. Esta noción primaria, básica y elemental que el profano tiene de la palabra estabilidad, no es objetiva, cambia de persona a persona y por lo tanto se presta a multitud de interpretaciones y de sentidos.

La matemática, ciencia de las pautas, ciencia de las regularidades y de lo genérico, no se deja avazallar por este torrente de acepciones y sentidos; urge en los objetos que estudia, los desmenuza para buscar en ellos lo que tienen de común, lo que más allá del sustrato específico en el que se expresen, los hace pertenecientes a la misma *relación de equivalencia* y, por lo tanto, a los ojos de la matemática, ser solo una y la misma cosa. Por otro lado, una definición como las que se introducen en matemáticas, amén de responder a la necesidad de convenir un lenguaje común, debe ser clara, concisa, precisa y sobre todo, útil. Ahora bien, llegar a una conceptualización —como lo es introducir una definición— también implica un proceso de síntesis el cual, aunque conservando las características metodológicas de la ciencia donde este surja, debería también ser algo deseable en otras disciplinas.

En este artículo, tomando como punto de partida el sentido de equilibrio y el de estabilidad asociado al movimiento de los objetos, hacemos una presentación que intenta seguir una línea histórica del desarrollo de dos conceptos fundamentales en el desarrollo de los sistemas dinámicos: *estabilidad de Lyapunov* y *estabilidad estructural*. El uso de los términos *equilibrio* o *estabilidad*, se pierde en los siglos de la historia. Por ello, aunque hay otros actores que en justicia deberían ser incluidos, nuestra reseña empieza en la que llamaremos la «era moderna» de la estabilidad en la que se incluye el equilibrio.

El contenido de este escrito se organiza como sigue. En la sección 2 se presenta una pincelada histórica sobre algunos sentidos de estabilidad: desde la ley de la palanca de Arquímedes, hasta el concepto de estabilidad de Lyapunov, teoremas que dan condiciones para que esta se dé y algunas extensiones del método de Lyapunov. La sección 3 está dedicada a otro concepto de estabilidad fundamental en dinámica: la estabilidad estructural. En la parte final de esta sección, se menciona la introducción del concepto de *estabilidad estocástica* introducido por Christopher Zeeman con la finalidad de clasificar los sistemas dinámicos definidos sobre variedades garantizando además, que los estables bajo este concepto, formen un conjunto denso. Se incluye un apéndice

con la finalidad de poner en perspectiva la contribución hecha por Lagrange, uno de los precursores a la introducción del primer concepto de estabilidad motivo de este escrito.

2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

La llamada *corriente estructuralista* dentro de la matemática, tuvo su máxima expresión en el **Grupo Bourbaki** fundado por brillantes y jóvenes matemáticos franceses a mediados de la década de los treinta del siglo pasado en la *École Normal Supérieure*, en París. Entre su fundadores se encontraban Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Coulomb, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, René de Possel, Szolem Mandelbrojt y André Weil. Con el tiempo y una vez que sus fundadores llegaron al límite de la edad permitida, se incorporarían a este selecto grupo entre otros, Jean-Pierre Serre, Alexandre Grothendieck, Laurent Schwartz, Pierre Samuel, Jean-Louis Koszul, Armand Borel, Pierre Cartier y Roger Godement. Influenciados por la escuela matemática alemana liderada por los destacados matemáticos David Hilbert y Emmy Noether, este grupo se planteó hacer una revisión de los fundamentos de la matemática para lo cual, sostenían, era imperativo imponer un mayor nivel de rigor, uno mucho mayor que el que en esos tiempos tenía la escuela matemática francesa. Sus trabajos los publicaron en sus *Elementos de matemática* de acuerdo con el nuevo canon de rigor y el método axiomático, pretendiendo con ello cubrir las bases de toda la matemática. Su convocatoria tuvo respuesta en muchos lugares del mundo y bajo su influencia, y al grito de a buscar *estructuras madre* que permitan jerarquizar el universo matemático usando la axiomatización como método y sustento filosófico, fueron transformados los contenidos de los cursos de matemáticas, desde nivel elemental, hasta nivel superior. Así, la *matemática moderna* basada en la *teoría de conjuntos*, sentó sus reales y se transformó en el fundamento de la enseñanza de la matemática. Décadas después se abandonó este enfoque.

Sirva este circunloquio como introducción para decir que considero que un posible antecedente de la corriente estructuralista francesa, esta en la *Mécanique analytique*, obra del físico y matemático francés Joseph Louis de Lagrange (1736-1813). En *Mécanique analytique*, Lagrange además de resumir el trabajo hecho en mecánica desde los tiempos del físico y matemático de Cambridge Isaac Newton, hizo contribuciones fundamentales. En aquel, su autor destaca el uso de la teoría de las ecuaciones diferenciales por lo que, a diferencia del lenguaje y los métodos de demostración basados en la geometría euclidiana usados por Newton

en sus *Principia*, Lagrange introdujo los métodos propios del análisis matemático en la mecánica, a tal grado que hay autores quienes consideran que la transformó en una rama de ese. Esta apreciación no está tan alejada de la realidad pues en sus más de cuatrocientas páginas de que constan las partes I (La estática) y II (La dinámica) de esta su monumental obra, el lector no encontrará una sola figura, ningún diagrama explicativo o ilustrativo que perturbe el hilo conductor de los desarrollos y deducciones matemáticas. De esta característica de su trabajo, Lagrange se ufanaba. Tan así fue que en el prólogo de la primera edición de su obra con meridiana claridad, escribió (véase [6]):

En este trabajo uno no encontrará figuras. Los métodos que expongo no requieren construcciones, ni razonamientos geométricos o mecánicos, sino solo de operaciones algebraicas, sujetas a un proceso [de razonamiento] regular y uniforme. Aquellos a los que les guste el Análisis [matemático], verán con placer que la mecánica se convierte en una nueva rama y me agradecerán haber ampliado así el campo.

Una parte de su *Mécanique analytique* Lagrange la dedica al estudio de la relación entre el equilibrio y la estabilidad de los objetos en movimiento. En nuestra opinión, la suya fue una primera gran síntesis en el desarrollo histórico de estos conceptos. Por ello le dedicamos la siguiente subsección en la que, a fin de poner en perspectiva su contribución, mencionamos algunas otras primerísimas ideas y actores.

2.1 Los primeros albores

Esta parte de la historia tuvo lugar en Siracusa algo más de doscientos años antes de Cristo y su actor fue el ingeniero, matemático y físico griego Arquímedes, quien dedujo la relación que deberían tener los pesos, W_1 y W_2 , y la distancia (medida desde el *fulcro*¹ que puede ser el punto medio) a la que cada uno habría de ser colocado a fin de que una barra homogénea, se mantuviera horizontal, no se balanceara. . . estuviera en equilibrio. En su oda: *Gracia y desgracia de la palanca*, Don Juan de Oyarzábal, al describir en forma por demás poética y sin ocultar sus inclinaciones, escribió (véase [7]):

. . . La cosa fue en Siracusa. Frente al mar, el cielo y el sol. La máquina —la palanca— airosa, ligera, capaz de levantar grandes pesos sin esfuerzo. . . ¡gracia! El hombre, puro intelecto. Y la ley. . . ¡Acaso Arquímedes, tenido comúnmente tan solo como un ingeniero práctico, como

¹Palabra de la raíz latina *fulcrum* que significa punto de apoyo de la palanca.

un constructor de máquinas, la encontró experimentando? ¡No! Razonando. Y razonando con gracia, con elegancia, sin presura. . .

¿Cuál fue el razonamiento seguido por el sabio griego que lo condujo a su ley de la palanca? En términos modernos, se diría que fue la traducción matemática del principio de equilibrio estático según el cual: **la suma de torcas (momentos) respecto al punto de apoyo es igual a cero**. Supóngase que la longitud de la palanca es l y que el fulcro esta a la mitad, $l/2$, de la barra. La pregunta por responder es: ¿Dónde deben colocarse los pesos W_1 y W_2 a fin de que la barra esté en equilibrio? Luego, denotemos por d_1 la distancia (a la izquierda del fulcro) a la que habrá de colocarse W_1 y por d_2 la distancia (a la derecha del punto de apoyo) a la que se coloca W_2 . Según el principio de equilibrio, este se logra siempre que se satisfaga la igualdad

$$W_1d_1 = W_2d_2,$$

expresión que por su simplicidad, permite hacer algunos cálculos sin mayor dificultad. Por ejemplo si $W_1 = W_2 = W$, entonces $Wd_1 = Wd_2 \iff d_1 = d_2$ es decir, basta colocar a los pesos en puntos simétricos respecto al fulcro para que la palanca no gire, se mantenga horizontal. Si los pesos son diferentes, digamos $W_2 = 2W_1$ la ley de equilibrio se escribe como $W_1d_1 = 2W_1d_2$ de donde $d_1 = 2d_2$ y con ello garantizamos el equilibrio de la barra.

En la misma vena de razonamiento tenemos que las *medianas* de un triángulo son los segmentos de recta que parten de cada vértice y lleguen al punto medio del lado opuesto a aquel. El punto de intersección de las tres medianas de un triángulo, es llamado *baricentro* o también es conocido como *gravicentro*. Para un objeto plano hecho de material homogéneo cuyo borde es un triángulo, su baricentro tiene la propiedad de que si se sostiene al triángulo con un soporte vertical perpendicular al plano que lo contiene y que pasa por el gravicentro, la figura se mantendrá en equilibrio, no se balanceará. Lo mismo ocurre con un disco circular construido con un material homogéneo: su centro geométrico coincide con su gravicentro. En relación al gravicentro el discípulo de Galileo Galilei, Evangelista Torricelli (1608-1647) en su *De Motu Gravium*, escribió:

Dos pesos que están enlazados no pueden empezar a moverse por sí mismos, si su centro de gravedad común no desciende.

El matemático e ingeniero hidráulico belga Simon Stevin (1548-1620), considerado como el primer matemático que reconoció la validez de los números negativos, dedujo las condiciones para que varios sistemas físicos se mantuvieran en equilibrio. Entre estos, dio las condiciones para

que un cuerpo sobre un plano inclinado se mantuviera en equilibrio ([8]). También realizó experimentos para discernir las condiciones de equilibrio de un cuerpo flotando en agua. En su *Byvough der weeghconst*, a manera de corolario, escribió (citado de [21]):

Es obvio que si el centro de gravedad del cuerpo esta por encima del centro de gravedad del cuerpo de agua desplazada, tiene tal pesadez arriba que todo da la vuelta (siempre que, sin embargo, no sea sostenido) hasta que la línea del centro de gravedad del cuerpo esté en la línea vertical del centro de gravedad del cuerpo de agua desplazada, debajo del centro de gravedad del cuerpo de agua desplazada.

El astrónomo, físico y matemático holandés Christian Huygens (1629-1695) también refiriéndose a un cuerpo flotando, en forma de teorema, escribió (citado de [21]):

Si un cuerpo sólido, flotando en un líquido, se inclina y adquiere otra posición, entonces la altura del centro de gravedad del cuerpo completo [comparada] con la del centro de gravedad de la parte sumergida, será más pequeña en esta última posición que en la posición anterior.

En un salto de escala espacial (y también cualitativo), diremos que el problema de la *estabilidad del sistema solar* o como entonces se le denominaba la *estabilidad del sistema del mundo*, fue uno que ocupó la mente y el trabajo de destacados hombres de ciencia. Físicos y matemáticos fueron aportando de forma tesonera y con el transcurrir de los años, también el sentido de estabilidad evolucionó. Por ejemplo, para Pierre-Simón Laplace (1749-1827) —quien estudió el problema de los tres cuerpos— bajo una serie de suposiciones, concluyó (citado en [21]):

Así, el sistema del mundo solo realiza pequeñas oscilaciones alrededor de un estado promedio del cual nunca se desvía más que por una pequeña cantidad. En virtud de su construcción y de la ley de gravitación, disfruta de una estabilidad la cual solamente puede ser destruída por causas externas. . .

Siméon Poisson (1781-1840) extendió los estudios realizados por Laplace considerando términos de orden superior, para afirmar (citado en [21]):

. . . hemos mostrado que la estabilidad del sistema planetario no cambia si uno toma en cuenta el cuadrado de las masas y todas las potencias de las excentricidades e inclinaciones.

Tanto Laplace como Poisson, adoptaban el acotamiento de la variación del semi-eje mayor de las trayectorias de los planetas, como su concepto de estabilidad del sistema solar. Tanto el primero de ellos como Dirichlet, creyeron haber resuelto el problema. Sin embargo, los estudios realizados en 1846 por el astrónomo francés Urbain J J Le Verrier sobre perturbaciones en la órbita de Urano, permitieron el descubrimiento de otro planeta más del sistema solar: Neptuno. Para la segunda mitad del siglo XIX, se consideraba que el problema de la estabilidad del sistema solar, no estaba resuelto, razón por la cual, aprovechando su amistad y la simpatía que el rey Óscar II de Suecia y Noruega tenía hacia las matemáticas, el matemático sueco Gosta Mittag-Leffler lo convenció para que celebrara su 60 aniversario (en 1889) convocando a la comunidad matemática a un concurso. La convocatoria se publicó en 1885 siendo cuatro los temas, uno de estos era sobre la estabilidad del sistema solar. El plazo límite para la recepción de los trabajos, fue junio de 1888, cinco fueron los participantes sobre el tema que nos ocupa. El matemático francés Henri Poincaré, participó con el trabajo (de 158 páginas): *Sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica*. El jurado —compuesto por Karl Weirstrass, Charles Hermite y Gosta Mittag-Leffler— lo declaró ganador. Además de un estímulo económico, otra parte del premio era la publicación del trabajo en *Acta Mathematica*, revista de mucho prestigio cuyo editor en jefe era Mittag-Leffler. El trabajo editorial para la publicación, se le encargó a Edvard Phragmén quien en este proceso, encontró algunos detalles un tanto oscuros en el trabajo de Poincaré. El editor le pidió a Poincaré los aclarara. Estando trabajando en ello, el propio matemático francés se percató de un error mayor, razón por la cual se dió a la tarea de aclarar los puntos de Phragmén y de corregir el error descubierto. Debido a problemas de coordinación, el proceso editorial no se detuvo habiéndose impreso y repartido algunos ejemplares del número de *Acta Mathematica* en el que aparecía la primera versión del trabajo de Poincaré. Seis meses después, Henri Poincaré envió una versión corregida (en contenido y presentación) y aumentada de su trabajo, ahora constaba de 270 páginas. En él, Poincaré se centró en el llamado *problema restringido de los tres cuerpos* e introdujo métodos novedosos para la mecánica celeste, yendo incluso más allá: sentó las bases de la llamada *teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias*, parte de los sistemas dinámicos. Realmente todo el proceso, desde los términos de la convocatoria, la formación del jurado, etc., estuvo acompañado de polémicas cuya revisión detallada puede verse en [3] o en [5]. Para los fines de este escrito, consideramos conveniente cortar aquí esta narrativa y enfocarnos a los aspectos relevantes motivo del presente trabajo.

El apartado V de la Primera parte de *Mécanique analytique*, lleva por título: Propiedades del equilibrio, relativas a los máximos y a los mínimos. El contenido del subapartado 21 (véanse las páginas 61-63 de [6]) es una verdadera revelación para el tema que nos ocupa, pues en él aparece con absoluta claridad lo que con el tiempo evolucionó y se formuló en términos precisos, formales. Veamos por qué esto es así. A fin de no introducir una interpretación personal (más que mi propia traducción que bien pudiera no ser la mejor posible), prefiero dejar el texto tal cual aparece en el original:

Ahora consideraremos los máximos y los mínimos que pueden tener lugar en equilibrio; para eso usaremos la fórmula general

$$Pdp + Qdq + Rdr + \dots = 0,$$

del equilibrio entre las fuerzas P, Q, R , etc., dirigidas a lo largo de las líneas p, q, r , etc., que terminan en los centros de estas fuerzas.

Podemos suponer que estas fuerzas se expresan de tal manera que la cantidad $Pdp + Qdq + Rdr + \dots$ es la diferencial exacta de una función de p, q, r , etc., la cual es representada por² Π de suerte que

$$d\Pi = Pdp + Qdq + Rdr + \dots .$$

Entonces para el equilibrio tendremos esta ecuación $d\Pi = 0$ lo que demuestra que el sistema debe estar de tal manera que la función Π esté en términos generales, en un máximo o en un mínimo.

Más adelante (en el sub-apartado 22), a manera de resumen de lo hecho y anunciando lo que a continuación hará, el físico y matemático nacido en Turín escribió:

Hemos mostrado que la función Π [energía potencial] esta en un mínimo o en un máximo, cuando la configuración del sistema es una de equilibrio; ahora vamos a demostrar que si esta función esta en un mínimo, entonces el equilibrio será estable, de manera que si el sistema estando en equilibrio, es desplazado por una pequeña cantidad, por sí mismo tenderá a recuperarlo [y lo hará] realizando oscilaciones infinitamente pequeñas.

²La función Π a la que se refiere Lagrange es

$$\Pi = Pp + Qq + Rr + \dots$$

Le sugerimos a nuestro amable lector le dé una mirada al Apéndice A en el que, en lenguaje un tanto más actual, se presenta una versión que contiene parte del razonamiento hecho por Lagrange y que esta contenido en el texto aquí citado.

2.2 Aparece Lyapunov en esta historia

Alexander Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) estudió y resolvió parcialmente un problema que le planteó su profesor Pafnuty Lvovich Chebyshev. Aquel estaba relacionado con la estabilidad (ante cambios en la velocidad angular) de la forma que adopta un fluido contenido en un recipiente cuando esté rota. Seguramente tal problema le sirvió de motivación para emprender su siguiente investigación, base de su tesis de doctorado. En 1892 Lyapunov se doctoró con la tesis: *El problema general de la estabilidad del movimiento*. En ella, desarrolló una teoría para estudiar la estabilidad de soluciones de sistemas de EDO, sentando con ello las bases de la teoría moderna sobre la estabilidad en sistemas dinámicos.

En la monografía [25] —dedicada al uso del método de Lyapunov para estudiar la estabilidad global de distintos tipos de sistemas de Lotka-Volterra (EDO, con retardo, con difusión)— el lector encontrará: una revisión histórica de los antecedentes del método directo de Lyapunov, los usos de este particularmente en modelos matemáticos en dinámica de poblaciones, la interpretación física de distintas funciones de Lyapunov, construcción de estas, etc. Esta revisión, por demás exhaustiva, se hizo casi hasta mediados de la década de los ochenta. Una versión detallada del material contenido en esta y en las subsecciones 2.3-2.6 puede consultarse en dicha monografía.

Mientras que aquí, en aras de brevedad y concisión, no seguiremos el texto original de Lyapunov. La versión que exponemos —apegándose al contenido del trabajo original— es un tanto más moderna la cual al añadirle *de Lyapunov* tanto a las definiciones como a los resultados, se le rinde homenaje al padre de esta forma de estudiar la estabilidad de soluciones de sistemas de EDO de las que un punto de equilibrio, es un caso particular. En lo que sigue de esta subsección, mientras no se diga otra cosa, nos restringiremos a **sistemas autónomos** de EDO definidos por campos vectoriales $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Es decir, sistemas cuya forma genérica es

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}). \quad (2)$$

Notemos que \vec{F} «flecha» a la región Ω en el sentido de que a cada punto $\vec{x} \in \Omega$, \vec{F} le asigna el vector $\vec{F}(\vec{x})$ el cual es tangente a la trayectoria de (2) que pasa por \vec{x} . La característica de «ser autónomo» del campo vectorial \vec{F} es que al no depender explícitamente del tiempo t , el

«flechamiento» que hace en Ω , se «congela» en el tiempo pues \vec{F} solo cambia de punto a punto en Ω , no cambia con t .

Definición 2.1. Si existe $\vec{x}^* \in \Omega$ tal que $\vec{F}(\vec{x}^*) = \vec{0}$ a \vec{x}^* se le llama *punto de equilibrio* del sistema (2) y a la solución $\vec{\varphi}^*(t) \equiv \vec{x}^*$ se le llama *solución de equilibrio* de (2).

Es inmediato ver que si \vec{x}^* es punto de equilibrio de (2) y $\vec{\varphi}(t)$ es solución de (2) tal que $\vec{\varphi}(0) = \vec{x}^*$ entonces $\vec{\varphi}(t) = \vec{x}^* \forall t \geq 0$. Por ello, las soluciones de equilibrio de (2) por sí mismas no son importantes. Lo importante es, sabiendo que (2) tiene un punto de equilibrio, ¿qué les pasa a las demás soluciones de (2) que parten de una condición inicial $\vec{x}_0 \neq \vec{x}^*$?

Definición 2.2. Sea \vec{x}^* punto de equilibrio del sistema autónomo $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$. Se dice que \vec{x}^* es *estable en el sentido de Lyapunov* si dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda solución, $\vec{\varphi}(t)$, de (2) que parta de \vec{x}_0 con $\|\vec{x}^* - \vec{x}_0\| < \delta$ ocurra que $\|\vec{x}^* - \vec{\varphi}(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$. Negando esta definición, se tiene *inestabilidad*. Aquí $\|\cdot\|$ denota la norma euclidiana.

El concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov, captura la idea de que si el sistema parte de un estado cercano al de equilibrio, sus estados posteriores permanecen cercanos a él; mientras que para tener estabilidad asintótica, no basta con que los estados posteriores permanezcan cercanos al equilibrio, se necesita además, que a la larga (cuando $t \rightarrow +\infty$) el estado del sistema sea el de equilibrio (véase la segunda parte de la cita de Lagrange al final de la subsección 2.1). Por esta razón con frecuencia uno encuentra en la literatura frases como «el equilibrio es estable ante perturbaciones temporales».

Definición 2.3. Sea \vec{x}^* punto de equilibrio del sistema autónomo (2). Se dice que \vec{x}^* es **asintóticamente estable** si \vec{x}^* es estable en el sentido de Lyapunov y si además se cumple

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{\varphi}(t) - \vec{x}^*\| = 0.$$

Una familia de campos vectoriales que es especialmente importante, son los llamados *campos vectoriales gradiente*. Para ellos existe $U : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ función de clase C^1_Ω tal que para todo $\vec{x} \in \Omega$, $\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x})$ y entonces el correspondiente sistema autónomo toma la forma

$$\dot{\vec{x}} = -\nabla U(\vec{x}).$$

En el apéndice A el lector encontrará un bosquejo del análisis de estos sistemas en el contexto físico. Entre otras consecuencias del análisis, está la ley de conservación de la energía mecánica. Mientras que aquí continuamos con la línea de exposición que traíamos.

Averiguar, a partir de la definición, si un punto de equilibrio \vec{x}^* de (2) es estable en el sentido de Lyapunov o asintóticamente estable, puede no ser una tarea fácil. Por ello, el propio Lyapunov propuso formas alternas. Una de ellas es para asegurar **estabilidad asintótica local**.

Si el campo vectorial \vec{F} es suficientemente suave en una vecindad $\Omega_1 \subset \Omega$ y $\vec{x}^* \in \Omega_1$ es punto de equilibrio del sistema (2), entonces para todo $\vec{x} \in \Omega_1$, el sistema (2) se aproxima por el sistema lineal

$$\dot{\vec{x}} = J[\vec{F}]_{\vec{x}^*} \vec{x}, \quad (3)$$

donde $J[\vec{F}]_{\vec{x}^*}$ es la matriz de Jacobi del campo vectorial \vec{F} evaluada en el punto \vec{x}^* .

Lema 2.4. *Si todos los valores propios de la matriz de Jacobi $J[\vec{F}]_{\vec{x}^*}$, tienen parte real negativa, entonces el punto de equilibrio \vec{x}^* es asintóticamente estable localmente (a.e.l.).*

La otra forma de estudiar la estabilidad de puntos de equilibrio propuesta por Lyapunov y por la que quizás sea más ampliamente conocido en el ámbito de los sistemas dinámicos, es por hacer depender el tipo de estabilidad del equilibrio de la existencia de una función «apropiada» que a continuación se define.

Definición 2.5. Sean $\vec{x}^* \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ punto de equilibrio del sistema autónomo (2) y $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ función de clase C_Ω^1 . Si $\vec{\varphi}(t)$ es solución del sistema y V satisface:

1. $V(\vec{x}^*) = 0$, $V(\vec{x}) > 0 \forall \vec{x} \neq \vec{x}^*$ (positiva definida),
2. $\dot{V}(t) \equiv \frac{d}{dt}V(\vec{\varphi}(t)) = \nabla V(\vec{\varphi}(t)) \cdot \dot{\vec{\varphi}}(t) \leq 0$ (semi-negativa definida),

entonces V es llamada *función de Lyapunov débil* del sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$. Si en vez de 2., se pide que $\dot{V}(t)$ sea negativa definida, anulándose solo en \vec{x}^* , entonces V es llamada *función de Lyapunov fuerte* del sistema.

Si nos restringimos a sistemas autónomos de EDO definidos por campos vectoriales $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, la interpretación geométrica de una función de Lyapunov, es bastante visual: su gráfica es la de una superficie en forma de vasija³ cuyo mínimo (que vale cero) lo toma en el punto de equilibrio \vec{x}^* . El punto 2. que distingue entre ser débil o fuerte, también tiene su contraparte geométrica. Para ilustrarlo, tomemos el caso extremo de la función de Lyapunov débil en el que $\nabla V(\vec{\varphi}(t)) \cdot \dot{\vec{\varphi}}(t) = 0$, igualdad que indica: en cada punto de la curva de nivel $V(\vec{\varphi}(t)) = C_1$ de V , el ángulo formado por el gradiente $\nabla V(\vec{\varphi}(t))$ y el vector tangente $\dot{\vec{\varphi}}(t)$ a la trayectoria que pasa por ese punto, es $\pi/2$ y esto se cumple para todo punto sobre la curva de nivel en cuestión y para toda curva

³Aunque esta es la imagen de una función de Lyapunov típica, debemos decir también las hay con geometría más complicada. Por ejemplo que en una vecindad de un punto de equilibrio tenga varios mínimos locales. Véase [16].

de nivel. La consecuencia de esto es valiosísima: Las curvas de nivel de una función de Lyapunov como esta, parametrizadas por t , coinciden con las trayectorias del sistema de EDO. Para el caso de una función de Lyapunov fuerte, el ángulo formado por el gradiente, $\nabla V(\vec{\varphi}(t))$, de $V(\vec{\varphi}(t))$ y el vector tangente, $\dot{\vec{\varphi}}(t)$, a las trayectorias del sistema es mayor o igual $\pi/2$ lo que significa que estas tocan transversales a las curvas de nivel de V . Como se verá en los siguientes párrafos, estas dos propiedades de las funciones de Lyapunov tienen consecuencias fundamentales para caracterizar el tipo de estabilidad del punto de equilibrio \vec{x}^* .

Ejemplo 2.6. La energía mecánica (suma de las energías potencial y cinética)

$$H(x, v) = \frac{k}{2}x^2 + \frac{v^2}{2} \quad (4)$$

es función de Lyapunov débil del sistema (y para el equilibrio $(0, 0)$)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -kx, \end{aligned} \quad (5)$$

donde $k > 0$, el cual proviene de la ecuación de movimiento $\ddot{x} + kx = 0$ para una masa unitaria sobre la que actúa la fuerza de un resorte que satisface la ley de Hooke. En efecto, el origen es el único punto de equilibrio de (5), $H(0, 0) = 0$, $H(x, v) > 0 \forall (x, v) \neq (0, 0)$ y si $(x(t), v(t))$ es solución de (5) distinta de la trivial entonces $\dot{H}(t) = H_x(x(t), v(t))\dot{x} + H_v(x(t), v(t))\dot{v} = kxv - vkx = 0 \forall (x, v)$; mientras que la misma función (4) es función de Lyapunov fuerte para el sistema (y para el equilibrio $(0, 0)$)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -kx - 2pv, \end{aligned} \quad (6)$$

donde $p > 0$, el cual tiene su origen en la ecuación de movimiento $\ddot{x} + 2p\dot{x} + kx = 0$ para una masa unitaria sobre la que actúan dos fuerzas: la de un resorte Hookiano y la de fricción proporcional a la rapidez v . Esto es así pues H es función positiva definida y que su derivada, $\dot{H}(t)$, a lo largo de las soluciones de (6) es negativa definida se sigue de calcular $\dot{H}(t) = \nabla H(x(t), v(t)) \cdot (\dot{x}, \dot{v}) = -2pv^2 \leq 0 \forall (x, v)$ siendo cero en el eje x .

Notemos que si $(x(t), v(t))$ es solución del sistema (5), la función $H(x(t), v(t))$ toma el mismo valor para todo t . En términos físicos esto significa que la función $H(x, v)$ se conserva. Esta idea se generaliza para *sistemas hamiltonianos* cuya representación general es

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (7)$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$, q_i y p_i son las posiciones y momentos generalizados, respectivamente y $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ es el hamiltoniano del sistema definido como

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{2} \|\vec{p}\|^2 + U(\vec{q}), \quad (8)$$

siendo el primer sumando la energía cinética del sistema y $U(\vec{q})$ su energía potencial.

Proposición 2.7. *Sea $(\vec{q}^*, \vec{0})$ punto de equilibrio de (7) donde U tiene un mínimo en \vec{q}^* . $H(\vec{q}, \vec{p})$ es función de Lyapunov débil para el sistema (7) y para dicho equilibrio.*

Demostración. Ya que mediante una traslación se logra que $U(\vec{q}^*) = 0$ entonces, de su definición y por tener U un mínimo en \vec{q}^* , $H(\vec{q}, \vec{p})$ es positiva definida en una vecindad de $(\vec{q}^*, \vec{0})$. Ahora, definiendo $H(t) = H(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ al usar la regla de la cadena obtenemos

$$\dot{H}(t) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right],$$

la que al usar (7) conduce a

$$\dot{H}(t) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right] = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad \square$$

Cosa diferente ocurre para el sistema (6) en el que la fuerza de fricción es disipativa originando que $H(x(t), v(t))$ sea una función decreciente del tiempo.

Una vez definidas las funciones de Lyapunov (la débil y la fuerte), el tipo de estabilidad de puntos de equilibrio se caracteriza según lo enuncia el siguiente teorema, parte central de la teoría de estabilidad del matemático ruso.

Teorema 2.8 (Segundo método de Lyapunov). *Sea \vec{x}^* punto de equilibrio del sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$. Si el sistema:*

1. *Tiene una función de Lyapunov débil, entonces \vec{x}^* es punto de equilibrio estable,*
2. *Tiene una función de Lyapunov fuerte, entonces \vec{x}^* es punto de equilibrio asintóticamente estable.*

Vea el lector cómo en la siguiente cita Lyapunov resume su propuesta para el estudio de la estabilidad:

Si las ecuaciones diferenciales de un movimiento perturbado son tales que es posible hallar una función definida

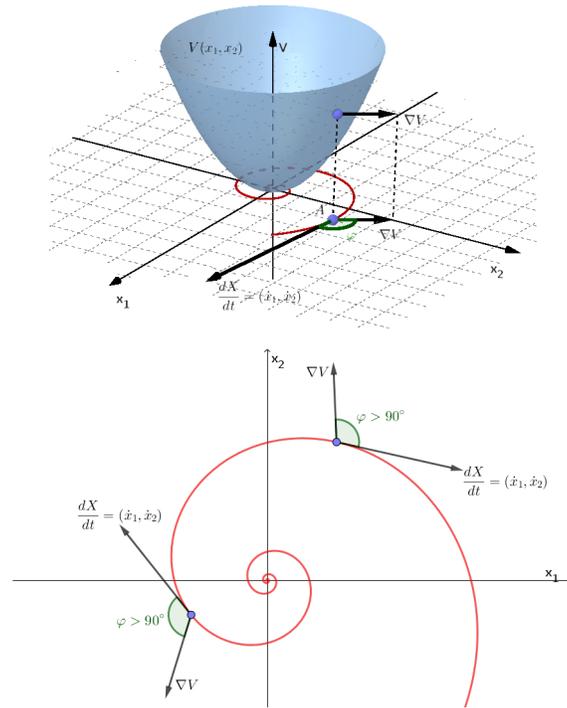


Figura 1. a) Imagen típica de una función de Lyapunov fuerte para un sistema plano. b) Relación de la función de Lyapunov fuerte con la estabilidad asintótica del equilibrio.

V , de la cual la derivada V' es una función de signo fijo opuesto al de V o se reduce idénticamente a cero, el movimiento no perturbado es estable.

A la luz del inciso 2 del teorema 2.8, el lector se convencerá de que en la cita de Lagrange (véase el final de la subsección 2.1), está implícita la existencia de una función de Lyapunov fuerte para el sistema cuya energía potencial tiene un mínimo. De hecho, el punto en el que esta toma su mínimo, corresponde a una posición en la que el cuerpo está en reposo y la fuerza neta sobre él es cero.

La figura 1 muestra la imagen de una función de Lyapunov fuerte, V , para un sistema autónomo plano y la relación entre el gradiente, ∇V , y el vector tangente a las trayectorias, (\dot{x}_1, \dot{x}_2) , que hacen del punto en el que V alcanza su mínimo, punto de equilibrio asintóticamente estable.

2.3 Vito Volterra y sus destellos I

Aunque sin usar el lenguaje introducido por Lyapunov sino más bien uno que viene de la mecánica, en absoluta coincidencia conceptual y

metodológica, el matemático italiano Vito Volterra se alineó con la teoría introducida y desarrollada por aquel. En efecto, en la década de los veinte del siglo pasado el biofísico y demógrafo de origen austriaco nacionalizado estadounidense Alfred Lotka y Vito Volterra, de forma independiente propusieron un modelo matemático para la descripción de la interacción de dos poblaciones: una de presas que es alimento básico (y único) de una de depredadores. Enseguida de forma esquemática, presentamos una versión⁴ ligeramente maquillada pero que sigue las ideas básicas del análisis realizado por el italiano. Sean $x(t)$ y $y(t)$ la densidad poblacional de presas y de depredadores al tiempo t , respectivamente. Supuestas funciones diferenciables para todo $t \in \mathbb{R}$. Con base en una serie de consideraciones, el modelo propuesto es el sistema no lineal de EDO

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy,\end{aligned}\tag{9}$$

donde a, b, c y d son positivas. Según Volterra, su interpretación ecológica es: «... a y c representan la razón de nacimiento y muerte de las dos especies; mientras b mide la susceptibilidad de la especie presa a la depredación y d mide la habilidad de depredación de esta especie. Las constantes b y d son la proporción de encuentros perjudiciales para las presas y la correspondiente de encuentros benéficos para los depredadores.»

Los puntos de equilibrio de (9) son: $P^* = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \equiv (x^*, y^*)$ y $P_0 = (0, 0)$. Del análisis lineal de (9) se sigue que P_0 es punto silla y P^* es centro. Ya que P^* es no *hiperbólico* la dinámica local del sistema no lineal en general no la da la dinámica del sistema lineal que lo aproxima... ¡aunque en este caso, sí!

El siguiente teorema al que Volterra le llamó *ley de periodicidad*, sintetiza la dinámica del sistema (9) en el primer cuadrante positivo del plano fase.

Teorema 2.9. *Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$ cualquier condición inicial. Entonces la solución de (9) que parte de (x_0, y_0) , es periódica y el equilibrio positivo P^* es estable en el sentido de Lyapunov en \mathbb{R}_+^2 .*

Demostración. Esta consta de los siguientes pasos:

1. El sistema (9) se transforma en otro que es *hamiltoniano* el cual le es equivalente. Se obtiene el hamiltoniano H ,
2. Se regresa a las variables originales y se muestra que la H «transformada» es *primera integral*⁵ del sistema original,

⁴Los detalles del análisis que aquí presentamos pueden ser consultados en [13].

⁵Lo que Volterra llamó *primera integral* o *constante de movimiento* en el lenguaje del método de Lyapunov, corresponde a una función de Lyapunov débil.

3. Por ser hamiltoniano, las curvas de nivel de H —parametrizadas por t — coinciden con las trayectorias del sistema,
4. Se muestra que las curvas de nivel de H son óvalos: cerca de P^* , son elipses y lejos de P^* , son «óvalos deformados». \square

Sea $\mathcal{F} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que si $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ entonces

$$\mathcal{F}(x, y) = \left(\ln \frac{x}{x^*}, \ln \frac{y}{y^*} \right) \equiv (u, v).$$

El sistema (9), escrito en términos de u y v es

$$\begin{aligned} \dot{u} &= a - ae^v \\ \dot{v} &= -c + ce^u. \end{aligned} \quad (10)$$

La demostración de las siguientes proposiciones es una guía para la demostración del teorema 2.9.

Proposición 2.10. *La función*

$$H(u, v) = ce^u - cu + ae^v - av, \quad (11)$$

es primera integral de (10). Equivalentemente

$$\hat{H}(x, y) = d \left(x - x^* \ln \frac{x}{x^*} \right) + b \left(y - y^* \ln \frac{y}{y^*} \right), \quad (12)$$

lo es del sistema (9).

Proposición 2.11. *El sistema (10) es hamiltoniano y se escribe como*

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{\partial \hat{H}}{\partial v} \\ \dot{v} &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial u}. \end{aligned} \quad (13)$$

Proposición 2.12. *Los sistemas (9) y*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (a - by)/y \\ \dot{y} &= (-c + dx)/x, \end{aligned} \quad (14)$$

son equivalentes⁶ en \mathbb{R}_+^2 . Más aún, este sistema es hamiltoniano y se escribe así:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\partial \hat{H}}{\partial y} \\ \dot{y} &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (15)$$

Proposición 2.13. *La función $V(x, y) \equiv \hat{H}(x, y) - \hat{H}(x^*, y^*)$*

$$V(x, y) = d \left(x - x^* - x^* \ln \frac{x}{x^*} \right) + b \left(y - y^* - y^* \ln \frac{y}{y^*} \right), \quad (16)$$

es primera integral del sistema (9) y tiene las siguientes propiedades:

⁶Esto es así pues lo que distingue a ambos sistemas, es la magnitud del vector tangente a sus respectivas trayectorias. De hecho, el vector tangente a las trayectorias de (14) se obtiene del correspondiente a (9) con solo multiplicar la parte derecha de este por el término $1/xy$ lo cual, para x y y positivas, preserva la orientación de las trayectorias.

- $V(x^*, y^*) = 0$ y $V(x, y) > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ diferente a (x^*, y^*)
- Tiene un mínimo absoluto en (x^*, y^*) .

Con esto se demuestra el teorema 2.9. \diamond

Consecuencias:

1. La gráfica de $V(x, y)$ tiene el aspecto de una vasija deformada cuyo mínimo (que vale cero) lo tiene en el punto (x^*, y^*) ,
2. Por ser $V(x, y)$ primera integral del sistema (9) las curvas de nivel, $V(x, y) = C$, de V –parametrizadas por t – coinciden con las trayectorias de (15),
3. Las curvas de nivel (una para cada condición inicial (x_0, y_0)) son cerradas y tienen como «centro» al equilibrio (x^*, y^*) ,
4. Por el teorema 2.8, el punto de equilibrio positivo (x^*, y^*) de (9), es estable en \mathbb{R}_+^2 .

En la figura 2 se ilustra la dinámica del sistema (9).

A los ojos de la matemática, el teorema 2.8 sin duda alguna es: profundo, elegante, fino y trascendente, no por nada ha resistido el paso de más de un siglo para situarse entre los teoremas más importantes para el estudio de la estabilidad de soluciones de distintos tipos de sistemas dinámicos. Sin embargo, en el condicional «Si», de la frase: «Si el sistema tiene una función de Lyapunov», radica su principal debilidad al momento de querer echar mano de esta teoría para estudiar la estabilidad de un punto de equilibrio. En efecto, dado un sistema autónomo como (2) del que se sabe que tiene un punto de equilibrio, ¿cómo determinar una función de Lyapunov para el sistema y para el equilibrio? Quizás el origen del que provenga el sistema autónomo puede dar indicios para proponer a funciones de Lyapunov. Así lo hicimos en el ejemplo 2.6 en el que la energía mecánica resultó ser una función de Lyapunov para los sistemas (5) y (6) y para el origen de coordenadas que es su único punto de equilibrio: es función de Lyapunov débil para el primero y fuerte para el segundo. En la referencia [25], se incluye una discusión sobre este aspecto y se presenta una lista de funciones de Lyapunov para diferentes sistemas autónomos, sistemas con retardo y para sistemas de reacción-difusión.

Una vez que se determina el tipo de estabilidad de un equilibrio \vec{x}^* , un problema importante tanto dentro de la matemática como en sus aplicaciones, es tener una idea del tamaño de la **cuenca de atracción** de aquel. Aquí, por cuenca de atracción estamos entendiendo al conjunto de condiciones iniciales, $\{\vec{x}_0\}$, para el cual las trayectorias del sistema (2) que partan de \vec{x}_0 tiendan asintóticamente a \vec{x}^* según lo enuncia la definición 2.3. Los ejemplos que exponemos a continuación nos ponen en alerta sobre esta cuestión.

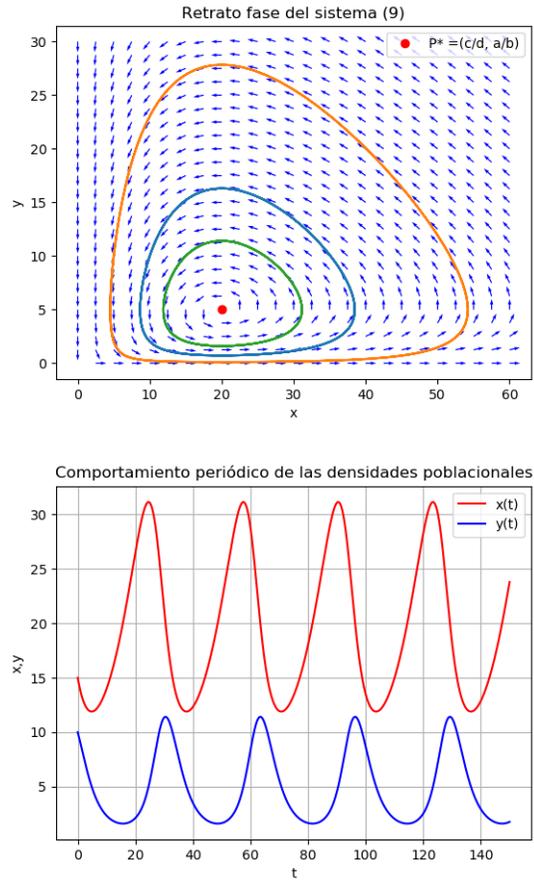


Figura 2. Dinámica del sistema (9): a) Su retrato fase en \mathbb{R}_+^2 . b) Correspondiente a cada óvalo de la figura a), se tiene un comportamiento periódico (del mismo periodo) en ambas densidades poblacionales. Véase el texto.

2.4 Estabilidad local no implica estabilidad global

Los ejemplos que se exponen a continuación —excepto por las simulaciones numéricas que aquí se incluyen— fueron originalmente estudiados por Bean-San Goh. Véanse [9] y [10] y son parte de la familia de los llamados sistemas de Lotka-Volterra.

Ejemplo 2.14. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (-11 + x_1 + x_2) x_1 \\ \dot{x}_2 &= (5.6 - 0.6x_1 - 0.5x_2) x_2, \end{aligned} \quad (17)$$

cuyo punto de equilibrio positivo es $P_e = (1, 10)$. Los valores propios de la matriz de Jacobi que define al sistema lineal que aproxima a (17) alrededor de P_e , son $\lambda_1 = -2 + \sqrt{3}$ y $\lambda_2 = -2 - \sqrt{3}$. Dado que ambos

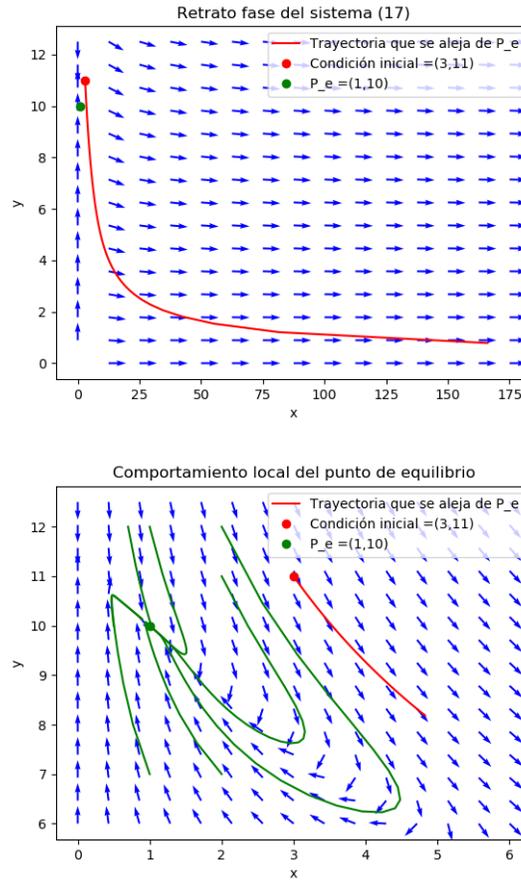


Figura 3. Al equilibrio a.e.l. se le «escapan» trayectorias del sistema (17):
a) Dinámica del sistema (17), b) Un acercamiento. Véase el texto.

son números reales negativos, entonces P_e es a.e.l. Sin embargo, si se considera la condición inicial $(x_1^0, x_2^0) = (3, 11)$, mediante una simulación numérica puede mostrarse que la solución de (17) que parte de este punto, tiende a $(\infty, 0)$ cuando t tiende a ∞ y no al punto $(1, 10)$. Esto se debe a que el sistema tiene, además de $(1, 10)$, otros tres puntos de equilibrio: el origen, uno sobre el eje vertical y el tercero sobre el eje horizontal, el cual es de tipo punto silla una de cuyas ramas inestables, termina en $(1, 10)$. De hecho, la variedad inestable del sistema (17) en dicho punto, es la *separatriz* que divide al cuadrante positivo en dos regiones: una compuesta por puntos de los cuales parten trayectorias de (17) que terminan en $(1, 10)$ y otra compuesta por puntos, de los cuales parten trayectorias de este sistema, que se alejan de P_e . La figura 3 ilustra la dinámica aquí descrita.

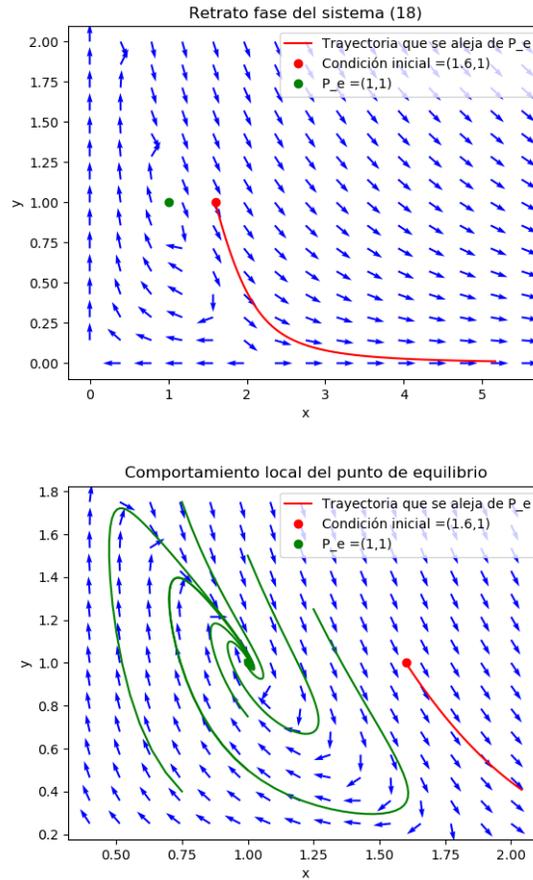


Figura 4. Al equilibrio a.e.l. se le «escapan» trayectorias del sistema (18):
a) Dinámica del sistema (18), b) Un acercamiento. Véase el texto.

Ejemplo 2.15. En el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (-2 + x_1 + x_2)x_1 \\ \dot{x}_2 &= (5 - 3x_1 - 2x_2)x_2,\end{aligned}\tag{18}$$

el punto de equilibrio positivo $P_e = (1, 1)$ es a.e.l., pues los valores propios de la matriz de Jacobi del campo vectorial que define al sistema lineal que aproxima (18) en P_e , son: $\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$ y $\lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$, cuya parte real es negativa. Sin embargo, la solución del sistema (18) que parte de la condición inicial $(x_1^0, x_2^0) = (1.6, 1)$, tiende a $(\infty, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$. El retrato fase de la figura 4 ilustra este comportamiento.

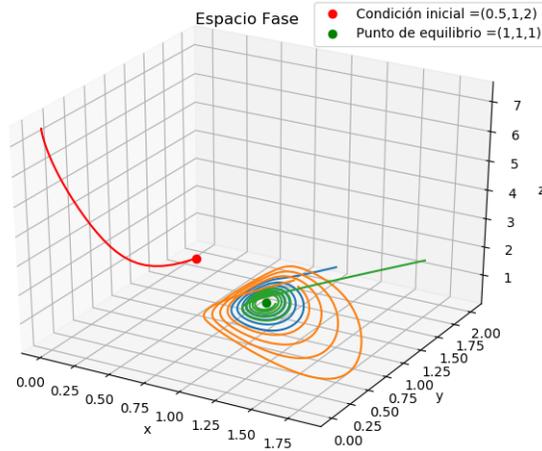


Figura 5. Espacio fase del sistema (19) en el que se ve el comportamiento de la trayectoria que parte del punto $(0.5, 1, 2)$ para valores de t «grandes». Esta se «escapa» del punto de equilibrio a.e.l. $P_e = (1, 1, 1)$. Las otras tres trayectorias de (19) al estar en la cuenca de atracción de $(1, 1, 1)$, tienden asintóticamente a este equilibrio.

Ejemplo 2.16. Para el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (2 - 0.8x_1 - 0.7x_2 - 0.5x_3)x_1 \\ \dot{x}_2 &= (2.1 - 0.2x_1 - 0.9x_2 - x_3)x_2 \\ \dot{x}_3 &= (1.5 - x_1 - 0.3x_2 - 0.2x_3)x_3,\end{aligned}\tag{19}$$

el punto de equilibrio positivo $P_e = (1, 1, 1)$ es a.e.l., pues los valores propios de la matriz de Jacobi que define su aproximación lineal alrededor de P_e , son aproximadamente: $\lambda_1 = -1.88$, $\lambda_2 = -0.00985 + 0.288i$ y $\lambda_3 = -0.00985 - 0.288i$, cuya parte real es negativa. Pero si se considera la trayectoria de (19) que parte del punto $(0.5, 1, 2)$, puede verse que esta tiende al punto de equilibrio $(0, 0, 7.5)$ al aumentar t más allá de toda cota. En la figura 5 se ve el espacio fase de (19) que acabamos de describir.

Los ejemplos discutidos en esta subsección son más que elocuentes y lo son en dos sentidos: i)¿Qué tan local es el análisis lineal local? y ii)Estabilidad asintótica local no implica estabilidad en «regiones grandes» del espacio fase del sistema en estudio. A fin de subsanar estas limitaciones del método propuesto por Lyapunov, en la década de los años sesenta del siglo pasado se le hicieron extensiones para lo cual se introdujeron términos como *estabilidad en el todo* o *estabilidad global* tratando de capturar la idea de que la cuenca de atracción sea «grande». Aquí presentaremos en forma resumida, las aportaciones realizadas por Joseph La Salle y Solomon Lefschetz (véanse [18] y [19]).

2.5 Extensiones al método directo de Lyapunov

Continuando con la tónica de este escrito y siguiendo el desarrollo histórico, enseguida se enuncian los resultados que vienen al caso. La demostración de ellos pueden consultarse en [18] y [19] o en la monografía [25]. También en [4] el lector encontrará una versión bastante didáctica.

Definición 2.17. Se dice que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es *conjunto invariante* del sistema (2) siempre que toda solución, $\vec{\varphi}(t)$, de (2) que ingrese a Ω , en $t = t_0$, permanece en Ω para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ahora bien, un conjunto invariante puede ser **positiva** o **negativamente invariante**, según si todas las soluciones del sistema que, en $t = t_0$, ingresen a Ω , permanezcan en Ω para $t \geq t_0$ o para $t \leq t_0$, respectivamente.

Teorema 2.18. *Sea Ω un conjunto cerrado y acotado (compacto) tal que toda solución del problema*

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= \vec{F}(\vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) &= \vec{x}_0,\end{aligned}\tag{20}$$

con \vec{x}_0 en Ω permanece en Ω para todo $t \geq t_0$. Supóngase que hay una función escalar $V(\vec{x})$ con primeras derivadas parciales continuas en Ω tal que $\dot{V}(\vec{x}) \leq 0$ en Ω . Sea \tilde{E} el conjunto

$$\tilde{E} = \left\{ \vec{x} \in \Omega \mid \dot{V}(\vec{x}) = 0 \right\},\tag{21}$$

contenido en Ω . Sea M el más grande conjunto invariante del sistema (20) contenido en \tilde{E} , entonces toda solución a (20) con \vec{x}_0 en Ω , tiende a M cuando $t \rightarrow \infty$.

El siguiente teorema precisa el conjunto Ω al que se refiere el teorema 2.18.

Teorema 2.19. *Sea Ω una región cerrada definida por $V(\vec{x}) \leq l$ y supóngase que V tiene primeras derivadas parciales continuas en Ω . Si además Ω es acotada y $\dot{V}(\vec{x}) \leq 0$ en Ω entonces toda solución que parta de Ω tiende a M cuando $t \rightarrow \infty$ (el conjunto M es el definido en el teorema 2.18).*

En [18] y [19] se dan ejemplos donde estos dos últimos teoremas se aplican. El siguiente es un concepto central en el presente trabajo en el que lo hemos utilizado como estabilidad global.

Definición 2.20. Cuando todo el espacio es la región de estabilidad asintótica, entonces se dirá que se tiene *estabilidad completa*. También es usual decir que el sistema (20) es *completamente estable* (o del todo

estable) si el origen es estable y si toda solución tiende al origen cuando t tiende a infinito.

Los siguientes dos teoremas son básicos para las aplicaciones.

Teorema 2.21. *Sea $V(\vec{x})$ una función escalar con primeras derivadas parciales continuas para toda \vec{x} . Supóngase que*

1. $V(\vec{x}) > 0$ para todo $\vec{x} \neq \vec{0}$,
2. $\dot{V}(\vec{x}) \leq 0$ para todo \vec{x} .

Sea \tilde{E} el conjunto de todos los puntos donde $\dot{V}(\vec{x}) = 0$ sea M el más grande conjunto invariante del sistema contenido en \tilde{E} . Entonces toda solución del sistema (20) acotada para $t \geq t_0$, tiende a M cuando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 2.22. *Sea $V(\vec{x})$ una función escalar con primeras derivadas parciales continuas que satisfice*

1. $V(\vec{x}) > 0$ para todo $\vec{x} \neq \vec{0}$,
2. $\dot{V}(\vec{x}) \leq 0$ para todo \vec{x} ,
3. $V(\vec{x}) \rightarrow \infty$ cuando $\|\vec{x}\| \rightarrow \infty$.

Si \dot{V} no es idénticamente cero a lo largo de cualquier otra solución que no sea el origen, entonces el sistema (20) es completamente estable.

En las referencias [15], [18] y [19] se dan ejemplos de cómo determinar la extensión de la región de atracción. En particular, en [15] se construye un método para tales fines. Esto, como en algún otro lugar lo mencionamos, puede ser muy útil pues si la cuenca de atracción de un equilibrio es «suficientemente grande» quizás eso fuese suficiente para asegurar estabilidad global de este.

Cerramos esta subsección mencionando que el método de Lyapunov se ha extendido para hacer análisis de estabilidad entre otros en: sistemas no autónomos, sistemas con retardo y sistemas de ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico. Un ejemplo de estas son las ecuaciones de reacción-difusión en las que la parte reactiva (interacción) es como en las ecuaciones generalizadas de Lotka-Volterra (véase la siguiente subsección). Para tales sistemas se puede construir una *funcional de Lyapunov* siempre que se conozca una función de Lyapunov fuerte, V , para el sistema homogéneo. En efecto, la funcional de Lyapunov, W , para el sistema de reacción-difusión resulta de «extender» V al espacio e integrarla en toda la región. Para esta y otras extensiones, véase la referencia [25].

2.6 Vito Volterra y sus destellos II

El propio Vito Volterra generalizó su propuesta para presa-depredador con el fin de incorporar tanto a un número mayor de poblaciones, como

una mayor diversidad en los tipos de interacción entre ellas. La historia registra que debido a una diferencia entre la fecha de sus respectivas publicaciones y que Volterra no citó a Lotka, originó que este le reclamara airadamente dando origen a una relación tensa entre estos personajes (véase [17]). No obstante, la historia dejó unidos para la posteridad sus nombres y ahora tales modelos matemáticos llevan el nombre genérico de *sistemas de Lotka-Volterra*. A más de cinco décadas de la publicación de los trabajos de Volterra en los que concluye estabilidad del equilibrio positivo para el sistema de presa-depredador, se publicaron trabajos que extienden sus ideas originales y en los cuales se dan condiciones para que el equilibrio positivo de sistemas generalizados de Lotka-Volterra sea globalmente estable es decir, atraiga a todas las trayectorias que empiecen en el octante positivo (véanse [9] y [10]). El siguiente teorema debido a Bean-San Goh [10], es la síntesis de dichos estudios.

Teorema 2.23 (citado de [10]). *Sea $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ punto de equilibrio positivo del sistema de Lotka-Volterra generalizado*

$$\dot{x}_i = \left(b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) x_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (22)$$

Si existe una matriz $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ diagonal positiva, tal que $CA + A^t C$ es negativa definida, entonces $(x_1^, x_2^*, \dots, x_n^*)$ es atractor global del sistema (22) en \mathbb{R}_+^n . Aquí $A = a_{ij}$.*

Demostración. Supóngase que existe C como dice el enunciado. Se prueba que la función

$$V(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i \left(x_i - x_i^* - x_i^* \ln \frac{x_i}{x_i^*} \right),$$

es función de Lyapunov fuerte para (22) y para $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ y dado que este punto es el máximo conjunto invariante del sistema (22) contenido en $\dot{V}(\vec{x}) = 0$ entonces, por el teorema 2.21 se concluye estabilidad global del equilibrio positivo. \square

Nótese que la función de Lyapunov fuerte, base de la demostración del teorema 2.21, es una generalización de la constante de movimiento usada por Vito Volterra. Véase la subsección 2.3.

La estabilidad global del equilibrio positivo es una de las conductas dinámicas de interés en los modelos matemáticos para describir la interacción de tipo presa-depredador. De hecho, cuando se considera que la razón de consumo de presas por unidad de depredador en vez de ser proporcional a la densidad de presas (como lo es en 9), es una función que exhibe saturación (respuesta funcional de Holling tipo II)

el correspondiente sistema para presa-depredador exhibe un *ciclo límite* atractor que proviene de una *bifurcación de Hopf*. Para este y otros aspectos, véase la referencia [12].

Con este comentario cerramos la presentación de la estabilidad en el sentido de Lyapunov para dar lugar a la exposición del segundo sentido de estabilidad que nos propusimos.

3. Estabilidad estructural

El concepto de estabilidad que presentamos en esta sección se aparta y difiere cualitativamente del concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov introducido y discutido en la sección anterior. A diferencia de aquel, este va en pos de algo genérico a conjuntos de sistemas de ecuaciones diferenciales. Ya no se trata de caracterizar a una solución de un sistema de EDO en particular atendiendo a la forma como se comporten otras soluciones de él en su vecindad. No, ahora este concepto se fija en el conjunto de sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos, \mathcal{S} , por ejemplo de $n \times n$ de manera que un punto en \mathcal{S} , es un sistema de ecuaciones diferenciales y una vecindad de él, la forman sistemas de ecuaciones diferenciales.

En la referencia [26], a propósito de la introducción de un concepto de estabilidad nuevo para sistemas dinámicos definidos en variedades, se hace una reseña de la evolución del concepto de estabilidad estructural y de los teoremas que enuncian condiciones para que este se dé. Por ello, lo que exponemos en esta introducción y en las subsecciones 3.2 y 3.3, es una versión resumida y apenas retocada de la que aparece en [26].

Empezamos diciendo que dado un campo vectorial \vec{F} , uno querría que los campos vectoriales «ceranos» a este, compartieran las mismas propiedades cualitativas... es decir, le fueran equivalentes. La primera parte de este buen deseo, involucra alguna noción de distancia entre campos vectoriales; mientras que la segunda quedaría precisada si respondieramos la pregunta: ¿Qué significa que dos campos vectoriales «sean equivalentes»? Vamos por partes.

Dotar de una «distancia» (de una topología) al conjunto de campos vectoriales, es posible ya que el conjunto de campos vectoriales tiene estructura de espacio vectorial. Una distancia —quizás la más primitiva— entre dos campos vectoriales, \vec{F} y \vec{G} , es la que proviene de la norma euclidiana. En efecto, se define la d_0 -distancia entre \vec{F} y \vec{G} así: $d_0 \equiv \sup \|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{G}(\vec{x})\|$ donde el supremo, *sup*, se toma sobre el conjunto en el que \vec{x} varía, por ejemplo la bola unitaria. Con esta

distancia se asocia la topología C^0 . Otra distancia entre campos vectoriales es la que proviene de la «distancia matricial», dando lugar a la d_1 -distancia entre \vec{F} y \vec{G} , definida como $d_1 \equiv \sup \|J[\vec{F}] - J[\vec{G}]\|$, donde J es la matriz de Jacobi del campo vectorial correspondiente. A esta distancia se le asocia la topología C^1 . Toda vez que campos vectoriales que, según alguna topología, sean «cercaos», pueden no serlo respecto a otra, por lo que no todas las distancias entre campos vectoriales son igualmente «buenas». Más todavía, campos vectoriales que de acuerdo a alguna topología sean «cercaos», pueden dar lugar a dinámicas diferentes. En la siguiente subsección presentamos unos ejemplos en los que esto ocurre.

3.1 Motivando un concepto

Considérese el siguiente par de EDO de primer orden

$$\dot{x} = x^3 \quad \text{y} \quad \dot{x} = x(x^2 - \mu), \quad (23)$$

donde $\mu > 0$ es un parámetro cuyos valores son pequeños. El hecho de que la primera ecuación tenga un solo punto de equilibrio ($x = 0$), mientras que la segunda tenga tres ($x = 0, \pm\sqrt{\mu}$) hace que, no obstante que las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x(x^2 - \mu)$ sean C^0 -cercaos en una vecindad del origen, las respectivas dinámicas que ellas definen sean cualitativamente diferentes y por lo tanto estas ecuaciones diferenciales no son equivalentes. Notemos que la función $g(x)$ para $\mu > 0$ pequeña, puede verse como una perturbación de $f(x)$ la cual, no obstante su pequeñez, su introducción destruye la dinámica asociada a f . Véase la figura 6.

Algo similar ocurre en el siguiente par de sistemas de EDO en los que $x(t)$ y $y(t)$ denotan la densidad de una población de presas y de depredadores al tiempo t , respectivamente. La dinámica del sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy, \end{aligned} \quad (24)$$

donde a, b, c y d son parámetros positivos, fue expuesta en la subsección 2.3. Mientras que la correspondiente al sistema C^0 -cercao a (24)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - \varepsilon x^2 - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy, \end{aligned} \quad (25)$$

donde $\varepsilon > 0$ es una medida de la intensidad de la competencia intraespecífica entre los individuos de la población de presas, para $c/d < a/\varepsilon$ está resumida en la figura 7. En esta se ve que **todas** las trayectorias

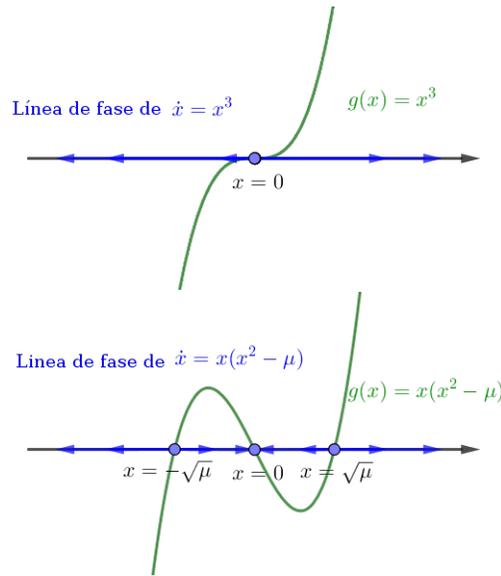


Figura 6. A pesar de que las ecuaciones $\dot{x} = x^3$ y $\dot{x} = x(x^2 - \mu)$ son C^0 -cercanas, sus dinámicas son esencialmente diferentes. a) Dinámica de $\dot{x} = x^3$. b) Dinámica de $\dot{x} = x(x^2 - \mu)$.

de (25) que partan de cualquier condición inicial (x_0, y_0) en el cuadrante positivo del plano xy , terminan en el equilibrio $P_2 = \left(\frac{c}{d}, \frac{ad-c\varepsilon}{bd}\right)$ es decir, P_2 es **atractor global** del sistema (25) siendo su **cuenca de atracción** el primer cuadrante positivo del plano xy . De hecho, no importando cuán pequeña sea ε con tal que sea positiva, la dinámica de los sistemas (24) y (25) es cualitativamente diferente lo que hace que no obstante su C^0 -cercanía, no sean equivalentes.

Los ejemplos anteriores además de ponernos en alerta, nos conducen a precisar la frase «campos vectoriales equivalentes». Luego, introduzcamos el siguiente definición.

Definición 3.1. Dos campos vectoriales, \vec{F} y \vec{G} , se dice que son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo (una función que tanto ella, como su inversa, son funciones continuas) que lleve trayectorias de \vec{F} en trayectorias de \vec{G} .

3.2 La definición y resultados: su evolución

El concepto de estabilidad estructural para una clase (*systemes grossieres*) de sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales definidos en el plano, fue introducido en 1937 por los matemáticos soviéticos Alexander Andronóv y Lev Seminovic Pontriagin (véase [1]). Dicho de forma intuitiva, los estructuralmente estables son sistemas para los que una

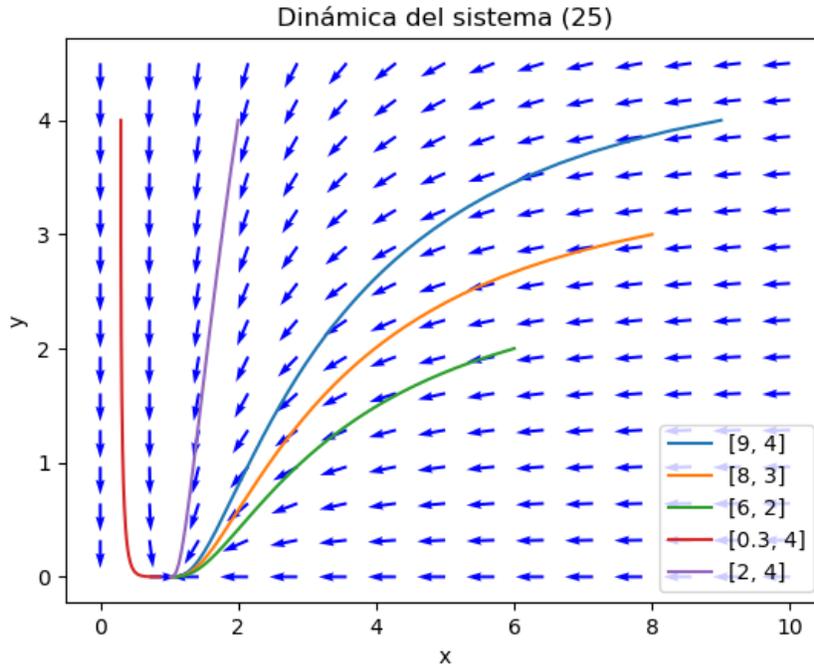


Figura 7. Dinámica del sistema (25) para $c/d < a/\varepsilon$. El equilibrio P_2 es atractor global.

pequeña perturbación no lineal del campo vectorial, no altera las características cualitativas de su espacio fase.

Originalmente pensado para campos vectoriales definidos en una región contenida en \mathbb{R}^n , este es el concepto de estabilidad estructural de Andronóv:

Definición 3.2. Un sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ con $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ definido en una región $D \subset \mathbb{R}^n$ es llamado *estructuralmente estable* en una región $D_0 \subset D$ si para cualquier C^1 -cercano $\dot{\vec{x}} = \vec{G}(\vec{x})$ en D , existen regiones U y V contenidas en D y $D_0 \subset U$ tal que $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ es topológicamente equivalente en U a $\dot{\vec{x}} = \vec{G}(\vec{x})$ en V .

El concepto de estabilidad estructural contenido en la definición anterior, va en pos de algo genérico, algo que compartan campos vectoriales C^1 -cercanos. Por esta razón, dicho concepto habrá de distinguirse del de la **dependencia continua de las soluciones respecto a parámetros**. Precisemos. Considérese el problema de condiciones iniciales

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}; \vec{\lambda}), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0,$$

donde $\vec{\lambda} \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$ es un vector de parámetros. Bajo condiciones apropiadas de \vec{F} respecto a \vec{x} y a $\vec{\lambda}$, la solución de este problema correspondiente a un valor, $\vec{\lambda}_0$, de $\vec{\lambda}$ depende continuamente respecto a \vec{x}_0 y respecto a $\vec{\lambda}$ en una vecindad de t_0 y de $\vec{\lambda}_0$. Luego, si $\vec{\varphi}_0(t)$ y $\vec{\varphi}_1(t)$ son solución del problema

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}; \vec{\lambda}_0), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

y

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}; \vec{\lambda}_1), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}'_0,$$

respectivamente con $\|\vec{x}'_0 - \vec{x}_0\| < \delta_0$ y $\|\vec{\lambda}_1 - \vec{\lambda}_0\| < \delta_1$, entonces existe $T > 0$ tal que

$$\|\vec{\varphi}_1(t) - \vec{\varphi}_0(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Ahora, dado un campo vectorial, investigar las condiciones necesarias y suficientes para que este sea estructuralmente estable, fue un problema fundamental en sistemas dinámicos. Por ello, este atrajo la atención de varios matemáticos quienes fueron abordando el problema de forma paulatina: primero para campos vectoriales de clase C^1 definidos en \mathbb{R}^2 , luego para los definidos en \mathbb{R}^n , para finalmente, abordar el problema con mayor grado de generalidad: los campos vectoriales definidos en variedades. Las variedades pueden ser planas (como la recta real, el plano o en general \mathbb{R}^n) o curvas (como el círculo, la esfera, la superficie de una dona, etc.). De igual manera, el concepto estabilidad estructural fue adaptándose dependiendo del tipo de conjunto en el que los campos vectoriales están definidos. Casi a la par de la búsqueda de condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial fuese estructuralmente estable, otro problema que también fue empezando a estudiarse fue el de averiguar si el conjunto de los campos vectoriales estructuralmente estables, es abierto denso.

En el artículo pionero de Andronóv y Pontriagin de 1937, sus autores enuncian las condiciones necesarias y suficientes para que sistemas autónomos y analíticos bidimensionales sean estructuralmente estables, pero no dan la demostración. Quince años después Henry F. de Baggis dio condiciones menos restrictivas (solo basta que los campos vectoriales fueran de clase C^1). Este es su teorema:

Teorema 3.3 (tomado de [2]). *El sistema*

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}), \tag{26}$$

donde $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de clase C^1 , es estructuralmente estable en una región $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ si y solo si:

1. Tiene un número finito de puntos de equilibrio en D_0 y todos ellos son hiperbólicos,

2. Tiene un número finito de trayectorias cerradas en D_0 y todas son, o bien atractoras o bien repulsoras,
3. No tiene trayectorias en D_0 que conecten a dos puntos de equilibrio siendo ambos puntos silla (trayectorias silla-silla).

Ejemplo 3.4. El sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \lambda(1 - x^2)y - x,\end{aligned}\tag{27}$$

que proviene de la ecuación del **oscilador de van der Pol** sin forzamiento $\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$ deducida por el ingeniero y físico holandés Balthazar van der Pol a propósito del estudio de un circuito no lineal, es estructuralmente estable para $\lambda > 0$. Esto es consecuencia del teorema 3.3, pues:

1. El campo vectorial que define a (27) es de clase C^1 en todo el plano,
2. Para $\lambda > 0$ (27) tiene un único punto de equilibrio que es repulsor y por tanto hiperbólico,
3. Para cada $\lambda > 0$ el sistema (27) tiene un ciclo límite atractor de las trayectorias de dicho sistema,
4. El sistema (27) no tiene trayectorias que conecten pares de puntos de equilibrio, en particular no tiene trayectorias silla-silla.

Más aun, dado un miembro de la familia de campos vectoriales (27) (para un valor de $\lambda > 0$), este tiene una infinidad de campos vectoriales C^0 -cercaños (para otros valores de $\lambda > 0$ o para perturbaciones no lineales pequeñas) que le son topológicamente equivalentes.

El matemático brasileño Maurício Peixoto fue de los primeros en estudiar sistemáticamente ambos problemas: el de estabilidad estructural y el de la densidad. En [24] Peixoto primero considera campos vectoriales de clase C^1 definidos sobre la bola unitaria $\mathcal{B}^1 : (x_1^2 + x_2^2) \leq 1$ introduce su concepto de estabilidad estructural según el cual:

Definición 3.5. El sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ se dice que es estructuralmente estable si, dada $\varepsilon > 0$ arbitraria, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que cualquier sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{G}$ con $d(\vec{F}, \vec{G}) < \delta$, podamos asociar un homeomorfismo h de \mathcal{B}^1 en sí misma, tal que:

1. h mapea trayectorias de \vec{F} en trayectorias de \vec{G} ,
2. h es un ε -homeomorfismo, i.e., para todo punto $p \in \mathcal{B}^1$, $d(p, h(p)) < \varepsilon$, donde d es la distancia euclidiana usual.

Para después dar condiciones necesarias y suficientes para que aquellos sean estructuralmente estables. Esta idea la extiende para campos vectoriales definidos en la bola unitaria n -dimensional $\mathcal{B}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1$;

mientras que en [11] el propio Peixoto adoptó la siguiente definición de estabilidad estructural para campos vectoriales definidos en variedades de dimensión dos.

Definición 3.6. Un campo vectorial \vec{F} definido en una variedad, M_2 , de dimensión dos se dice que es estructuralmente estable si dada ε se puede hallar una vecindad, V_ε , de \vec{F} tal que siempre que $\vec{G} \in V_\varepsilon$ exista un ε -homeomorfismo de M_2 en sí misma que transforme trayectorias de \vec{F} en trayectorias de \vec{G} .

Después se dio cuenta que la finura de la ε -dependencia del homeomorfismo se podía obviar dando por resultado que la definición anterior fuese equivalente a esta:

Definición 3.7. Un campo vectorial \vec{F} definido en M_2 se dice que es estructuralmente estable si existe una vecindad, V , de \vec{F} tal que siempre que $\vec{G} \in V$, exista un homeomorfismo de M_2 en sí misma que transforme trayectorias de \vec{F} en trayectorias de \vec{G} .

En el siguiente teorema, Peixoto dio condiciones necesarias y suficientes para que campos vectoriales definidos en una variedad de dimensión dos, sean estructuralmente estables.

Teorema 3.8 (tomado de [24]). *A fin de que el campo vectorial \vec{F} sea estructuralmente estable en M_2 , es necesario y suficiente que las siguientes condiciones se satisfagan:*

1. *Que solo tenga un número finito de puntos de equilibrio y todos sean hiperbólicos,*
2. *Que los conjuntos α y ω límite⁷ de cada trayectoria pueden ser solamente puntos de equilibrio o trayectorias cerradas.*
3. *Que no haya trayectorias silla-silla.*
4. *Que haya solamente un número finito de trayectorias cerradas y todas sean simples (atractoras o repulsoras).*

Una pregunta que uno puede plantearse es si para dimensiones mayor o igual a tres existe un teorema análogo al de Andronóv-Pontriagin que dé condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial sea estructuralmente estable. Planteado así de general, la respuesta es: no. Sin embargo, existe una familia de campos vectoriales para los que se dan condiciones suficientes a fin de que sean estructuralmente estables. Estos los definió el matemático estadounidense Stephen Smale quien, a

⁷Un punto $\vec{y} \in \Omega$ se dice que es punto ω -límite de la solución del problema $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$, $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ donde $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, si existe una sucesión, $\{t_n\} \rightarrow \infty$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(\vec{x}_0) = \vec{y}$, siendo Φ es el flujo asociado al campo vectorial \vec{F} . Al conjunto de puntos ω -límite se le llama conjunto ω -límite. Si donde aparece $\{t_n\} \rightarrow \infty$, se sustituye por $\{t_n\} \rightarrow -\infty$, entonces al correspondiente punto se le llama punto α -límite y al conjunto de todos los puntos α -límite, se le llama conjunto α -límite.

finales de la década de los años cincuenta del siglo pasado, introdujo el enfoque topológico en los sistemas dinámicos. Al extender el trabajo de Peixoto sobre estabilidad estructural para sistemas de dimensión $n > 2$, Smale definió como sigue los que ahora se llaman sistemas Morse-Smale:

Definición 3.9. Un *sistema Morse-Smale* es aquel que:

1. Tiene un número finito de puntos de equilibrio y todos son hiperbólicos.
2. Tiene un número finito de ciclos límite y todos son atractores o repulsores —todos ellos hiperbólicos— y cuyas variedades estable e inestable se tocan transversalmente,
3. No tiene otros puntos no errantes o recurrentes⁸.

Smale conjeturó que un campo vectorial es estructuralmente estable si y solo si es Morse-Smale. Sin embargo, estando de visita en el Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) en Río de Janeiro, Smale recibió una carta de Norman Levinson en la que le anunciaba haber encontrado un contraejemplo a su conjetura (véase [29]). El campo vectorial al que se refería Levinson, provenía del oscilador de van der Pol con forzamiento periódico de la forma $F_0 \cos \omega t$. En un contexto algo diferente (la versión inglesa del radar), este sistema había sido estudiado durante la década de los años cuarenta por los británicos Mary Lucy Cartwright y Edderson Littlewood. Cuando el concepto de caos determinista aún no se había introducido, Cartwright y Littlewood —adelantándose unos veinte años— lo vislumbraron en sus análisis del oscilador de van der Pol con forzamiento al que el propio Levinson también había hecho contribuciones al entendimiento de su dinámica.

Una vez que Smale tradujo a términos geométricos los análisis de la pareja de ingleses y de Levinson, construyó un sistema dinámico caótico ahora llamado **herradura de Smale** y lo usó como un contraejemplo de su propia conjetura. De hecho, construyó un ejemplo de sistema que tiene un número infinito numerable de órbitas periódicas y un conjunto de Cantor no numerable no errante (véase [29]). Esto ocurrió en 1960 mientras Smale visitaba a Peixoto en el IMPA.

Siguiendo esta vena de desarrollo, diremos que a principios de la década de los años sesenta del siglo pasado, Stephen Smale formuló lo que llamó *el problema de estabilidad estructural*. Lo enunció como la siguiente pregunta:

⁸Para campos vectoriales $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, un punto $p \in \Omega$ se dice que es **errante** si tiene una vecindad, $U(p)$, y un tiempo T tal que para todo $t > T$, la imagen $\Phi_t(U(p))$, de $U(p)$ bajo el flujo asociado al campo vectorial, no tiene puntos en común con $U(p)$. Es decir, a partir del tiempo T en adelante, todos los puntos de $U(p)$ bajo el flujo, abandonan la vecindad $U(p)$. Un punto p para el que no existe tal vecindad, se le llama punto **no errante**

Pregunta: ¿Forman las ecuaciones diferenciales estructuralmente estables un conjunto denso en la topología C^1 dentro de todas las ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas o de primer orden?

Una respuesta afirmativa a esta pregunta, fue dada por matemáticos soviéticos y por Peixoto para el caso de sistemas bidimensionales definidos sobre un disco y para variedades compactas de dimensión dos. El siguiente teorema sintetiza los estudios realizados por estos matemáticos.

Teorema 3.10 (Andronóv-Pontriagin y De Baggis-Peixoto, citado de [20]). *El conjunto de los flujos estructuralmente estables es denso (y abierto) en el conjunto de campos vectoriales, $\chi^r(M_2)$, de clase C^r para cualquier variedad compacta bidimensional M_2 .*

Para dimensiones mayores, Smale también dio una respuesta afirmativa para ciertos sistemas que poseen una infinidad de soluciones periódicas; mientras que para dimensión mayor o igual a tres, el propio Smale en su artículo: «Structurally stable systems are not dense» (véase [28]), dio una respuesta negativa al problema general que enunció. Por ello, la mayoría de los campos vectoriales que tienen atractores extraños y comportamientos caóticos, no son estructuralmente estables.

3.3 Un pos de un concepto de estabilidad

El matemático británico Christopher Zeeman encontró dos características que hacen de la definición de estabilidad estructural un concepto poco práctico y no elegante (Zeeman *dixit*). En efecto:

1. La definición de estabilidad estructural se da en términos de un homeomorfismo —para el que basta que él y su inverso sean funciones continuas—, no necesariamente diferenciables, no necesariamente suaves. Por ello, según Zeeman (véase [31]):

...decir que algún modelo en la matemática aplicada es topológicamente equivalente a un modelo estándar, no asegura [la existencia de] un cambio suave de coordenadas con respecto al cual el modelo aplicado es estándar.
2. El conjunto de los campos vectoriales estructuralmente estables definidos sobre variedades de dimensión mayor o igual a tres, no es denso dentro del conjunto de todos los campos vectoriales. Esto es delicado pues aunque hay campos vectoriales —como los Morse-Smale con atractores extraños hiperbólicos— que son estructuralmente estables, no dejan de ser casos muy especiales. Sin embargo, campos vectoriales que aparecen en modelación matemática como

el sistema de Lorenz, tienen atractores extraños y exhiben comportamientos caóticos, no son estructuralmente estables.

En 1987 Zeeman introdujo el concepto *estabilidad estocástica* ([30]), esto con la finalidad de tener un concepto de estabilidad que superara las dos deficiencias anteriores y así, hacer una clasificación de los sistemas dinámicos definidos en variedades. De acuerdo a este nuevo concepto, se buscaba que los sistemas dinámicos estables formaran además, un conjunto denso. Al proyecto de clasificación de sistemas dinámicos usando el concepto de Zeeman, se sumó el matemático mexicano Santiago López de Medrano quien contribuyó de forma destacada. En [26] el lector encontrará una reseña de parte de esta historia.

3.4 Conclusiones

En este artículo hemos presentado una visión del desarrollo de dos conceptos fundamentales en sistemas dinámicos: estabilidad de Lyapunov y estabilidad estructural. El primero, aborda la cuestión de estabilidad de puntos de equilibrio de un sistema autónomo de EDO, es decir, la estabilidad de aquel ante perturbaciones temporales como también suele llamársele; mientras que el segundo, se interna en el conjunto de sistemas dinámicos definidos por campos vectoriales y dependiendo de si un campo vectorial tiene una vecindad formada de campos vectoriales que le sean topológicamente equivalentes, lo caracterizamos como estructuralmente estable. Para ambos conceptos hicimos un seguimiento histórico: desde los primeros balbuceos, hasta resultados recientes. Con ello pretendimos ofrecer al lector interesado en estos temas, un material que prácticamente lo ponga al día y le ahorre la necesaria revisión con la que se inicia todo trabajo que se pretenda hacer sobre un tema. También, al presentar en un mismo escrito este desarrollo histórico, el material aquí contenido puede ser de utilidad para estudiantes que cursen asignaturas de ecuaciones diferenciales ordinarias o sistemas dinámicos de la segunda mitad de las licenciaturas de matemáticas, física o áreas cercanas. También puede servir como material de apoyo para cursos de posgrado de estas áreas y de dinámica no lineal. Por el carácter de la exposición, seguramente también resultará de interés y utilidad para docentes de estas asignaturas. Ya que estos conceptos también son de uso en otras disciplinas, no descartamos que este material fuese de utilidad para profesionistas con un perfil distinto al del llamado «ciencias duras». Si todo lo anterior fuese así, nuestro escrito habría cumplido su cometido.

El artículo que el lector tiene ante sus ojos, aborda temas de sistemas dinámicos que pudieran calificarse de clásicos. Sin embargo, estas son solo unas de las tantas expresiones de la *dinámica no lineal* cuyo auge

en las más diversas áreas del conocimiento empezó en la década de los años setenta del siglo pasado. En la referencia [27] nuestro amable lector encontrará una visión panorámica y moderna de esta rama del conocimiento tan fundamental y actual. La prosa con la cual este libro está escrito atraparará a todo aquel que se le acerque.

Apéndice A. Ecuación de movimiento y una ley de conservación

Sea $\vec{r} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva que representa la trayectoria seguida por una masa m en movimiento. Sea $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial que representa a un campo de fuerzas, es decir $\vec{F}(\vec{r}(t))$ es la fuerza que se ejerce sobre la masa cuando esta se encuentra en el punto $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$. Usando la segunda ley de Newton se obtiene la ecuación de movimiento

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)), \quad (28)$$

la que escrita explícitamente es

$$(m\ddot{x}, m\ddot{y}) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) \iff \begin{cases} m\ddot{x} = F_1(x, y) \\ m\ddot{y} = F_2(x, y) \end{cases},$$

donde $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$. Si introducimos v_1 y v_2 tales que $\dot{x} = v_1$ y $\dot{y} = v_2$ y para simplificar la escritura suponemos masa unitaria ($m = 1$), entonces el par de EDO de segundo orden que aparecen del lado derecho de la igualdad anterior, se escriben como el sistema autónomo

$$\begin{cases} \dot{x} = v_1 \\ \dot{v}_1 = F_1(x, y) \\ \dot{y} = v_2 \\ \dot{v}_2 = F_2(x, y), \end{cases} \quad (29)$$

el cual, despojándolo de la notación, es un caso particular de un sistema autónomo cuya forma genérica es

$$\dot{\vec{x}} = \vec{G}(\vec{x}), \quad (30)$$

donde $\vec{G} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es un campo vectorial. Hecha esta caracterización que proviene de reescribir la ecuación de movimiento (28), avancemos hacia lo que queremos presentar.

Al multiplicar escalarmente ambos lados de (28) por $\dot{\vec{r}}(t)$ e integrar respecto a t desde a hasta b lo que resulte, se obtiene

$$m \int_a^b \ddot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt,$$

igualdad que al notar

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{\vec{r}}(t)\|^2 = \ddot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t),$$

se transforma en

$$\frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \|\dot{\vec{r}}(t)\|^2 dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt,$$

o bien

$$\frac{1}{2} m \|\dot{\vec{r}}(b)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\dot{\vec{r}}(a)\|^2 = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt. \quad (31)$$

Reconociendo a la parte izquierda como la diferencia de la **energía cinética** de la masa m (entre los tiempos $t = a$ y $t = b$) y a la parte derecha como el **trabajo**, $W[\vec{F}]$, efectuado por el campo de fuerzas a lo largo de la trayectoria $\vec{r}(t)$, entonces la igualdad anterior nos dice: el trabajo efectuado por la fuerza, se «invierte» en cambiar la energía cinética de la masa en movimiento.

Si en el integrando de la parte derecha de (31) escribimos $\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, efectuamos el producto escalar indicado y usamos el teorema de integración por cambio de variable, obtenemos

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_{\vec{r}(a)}^{\vec{r}(b)} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy. \quad (32)$$

Con ayuda de esta igualdad tenemos que (31) se transforma en

$$\frac{1}{2} m \|\dot{\vec{r}}(b)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\dot{\vec{r}}(a)\|^2 = \int_{\vec{r}(a)}^{\vec{r}(b)} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy. \quad (33)$$

Ahora, si el campo \vec{F} es **gradiente** es decir, si existe $U : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ función de clase C_Ω^1 , llamado **potencial** o **energía potencial**, tal que para todo $(x, y) \in \Omega$

$$\vec{F}(x, y) = -\nabla U(x, y),$$

entonces la *uno-forma* que aparece en el integrando de la parte derecha de (33) se reescribe y con ello se tiene

$$\int_{\vec{r}(a)}^{\vec{r}(b)} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = - \int_{\vec{r}(a)}^{\vec{r}(b)} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = - \int_{\vec{r}(a)}^{\vec{r}(b)} dU = -[U(\vec{r}(b)) - U(\vec{r}(a))].$$

Por lo tanto, al usar (32) se concluye una celebrada ley: la **ley de conservación de la energía mecánica**

$$\frac{1}{2} m \|\dot{\vec{r}}(b)\|^2 + U(\vec{r}(b)) = \frac{1}{2} m \|\dot{\vec{r}}(a)\|^2 + U(\vec{r}(a)), \quad (34)$$

en cuya deducción la hipótesis: el campo de fuerzas es gradiente, jugó un papel fundamental.

Nótese que siendo el campo \vec{F} gradiente, de existir una posición, $\vec{r}^* \in \Omega$, del objeto en movimiento para la que $\vec{F}(\vec{r}^*) = \vec{0}$, entonces al satisfacerse la igualdad $\vec{F}(\vec{r}^*) = -\nabla U(\vec{r}^*) = \vec{0}$, resulta que \vec{r}^* es punto crítico de U . Más aun, si en el espacio posiciones-velocidades, $(\vec{r}^*, \vec{0})$ es punto de equilibrio, entonces en una vecindad de este las propiedades geométricas del hamiltoniano

$$H(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \equiv \frac{1}{2} \|\dot{\vec{r}}\|^2 + U(\vec{r}),$$

las define las propiedades geométricas del potencial $U(\vec{r})$ esto es así pues el hamiltoniano es una función cuadrática de la rapidez $\|\dot{\vec{r}}\|$. En consecuencia, si U tiene un mínimo en \vec{r}^* , entonces en una vecindad del equilibrio $(\vec{r}^*, \vec{0})$, el hamiltoniano también tendrá un mínimo y, de acuerdo al teorema de estabilidad de Lyapunov, tal equilibrio es estable.

Agradecimientos. Le agradezco a mi colega José Guerrero Grajeda, la cuidadosa lectura del manuscrito y sus atinadas observaciones. También agradezco la lectura que hicieron los árbitros. Sus sugerencias y observaciones —debidamente atendidas— sumadas a las referencias proporcionadas, en mucho contribuyeron a mejorar el contenido y la presentación de este trabajo. Varias de las figuras (resultado de simulaciones numéricas) que acompañan a este texto, se las debo a mi ayudante estrella Luis Alberto Hernández Pérez. Mi gratitud a él por su profesional apoyo.

Bibliografía

- [1] A. Andronóv y L. S. Pontriagin, «Sistemas grossieres», *Doklady Akademi Nauk, SSSR*, vol. 5, 1937, 247–250.
- [2] H. D. Baggis, «Dynamical systems with stable structures», en *Contributions to the theory os nonlinear oscillations*, ed. S. Lefschetz, vol. 2, 1952, 37–59.
- [3] J. Barrow-Green, *Poincaré and the three body problem*, American Mathematical Society, London Mathematical Society, 1997.
- [4] F. Brauer y J. A. Nohel, *The qualitative theory of ordinary differential equations. an introduction*, Benjamin W. A., Inc. Wisconsin, 1969.
- [5] S. Bromberg y E. Pérez-Chavela, «El error que cambió la mecánica celeste. las vicisitudes de Poincaré», *Miscelánea Matemática, SMM*, núm. 58, 2014, 137–152.
- [6] J. L. de Lagrange, «Mécanique analytique», 1963, versión facsímil de la tercera edición revisada, corregida y aumentada editada por J.M. Bertrand en París en 1853. Ediciones Oásis. Asociación Mexicana “Clásicos de la Ciencia”, No. 2, colección Francia. El genio físico-matemático francés de los siglos XVIII y XIX. México.
- [7] J. B. de Oyarzábal, «Gracia y desgracia de la palanca», *Naturaleza*, vol. 5, núm. 5, 1974, 210–223.
- [8] ———, *Ensayos sobre mecánica clásica*, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1984, Programa del libro de texto universitario.
- [9] B. S. Goh, «Global sability in two species interaction», *J. Math. Biol.*, vol. 3, 1976, 313–318, <https://doi.org/10.1007/BF00275063>.

- [10] ———, «Global stability in many-species systems», *The American Naturalist*, vol. 111, núm. 977, 1977, 135–143, <https://doi.org/10.1086/283144>.
- [11] V. Grimm y C. Wissel, «Babel, or the ecological stability discussions: an inventory and analysis of terminology and a guide for avoiding confusion», *Oecologia*, vol. 109, 1997, 323–334, <https://doi.org/10.1007/s004420050090>.
- [12] S. Guruprasad y R. Gómez Aíza, «Modelos dinámicos de poblaciones simples y de sistemas depredador-presa», *Miscelánea Matemática, Sociedad Matemática Mexicana*, núm. 58, 2014, 77–110.
- [13] J. L. Gutiérrez Sánchez y F. Sánchez Garduño, *Matemáticas para la ciencias naturales*, Sociedad Matemática Mexicana, 1998, Número 11 de la serie Aportaciones Matemáticas.
- [14] C. S. Holling, «Resilience and stability of ecological systems», *Annu. Rev. Ecol. Syst.*, vol. 4, 1973, 1–23, <https://doi.org/10.1146/ANNUREV.ES.04.110173.000245>.
- [15] E. F. Infante y L. G. Clark, «A method for determination of the domain of stability of second-order nonlinear autonomous systems», *Journal of Applied Mechanics*, June, 1964, 315–320, <https://doi.org/10.1115/1.3629603>.
- [16] A. Inselberg y G. Dula, «The geometry of Lyapunov functions», *Amer. Math. Monthly*, vol. 81, 1974, 1102–1104, <https://doi.org/10.1080/00029890.1974.11993745>.
- [17] G. Israel y A. Millán, *The biology of numbers. The correspondence of Vito Volterra on Mathematical Biology*, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2002.
- [18] J. P. La Salle, «Some extensions of Lyapunov's second method», *IRE Transactions on Circuit Theory*, vol. 7, 1960, 520–527, <https://doi.org/10.1109/TCT.1960.1086720>.
- [19] J. P. La Salle y S. Lefschetz, *Stability by Lyapunov's Direct Method, with Applications*, Academic Press, New York, 1961.
- [20] K. Lee, *Lectures on dynamical systems. structural stability and their applications*, World Scientific Publishing Company. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1992.
- [21] R. I. Leine, «The historical development of classical stability concepts: Lagrange, Poisson and Lyapunov stability», *Nonlinear Dyn.*, vol. 59, 2010, 173–182, <https://doi.org/10.1007/s11071-009-9530-z>.
- [22] R. C. Lewontin, «The meaning of stability. diversity and stability in ecological systems», *Brookhaven Symposia in Biology*, núm. 22, 1969, <https://doi.org/10.2307/j.ctt1wvwd9.84>.
- [23] R. May, *Stability and complexity in model ecosystems*, Princeton University Press, 2001.
- [24] M. M. Peixoto, «Structural stability on two-dimensional manifolds», *Topology*, vol. 1, 1962, 101–120, [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(65\)90018-2](https://doi.org/10.1016/0040-9383(65)90018-2).
- [25] F. Sánchez Garduño, *Estabilidad Global en Sistemas de Lotka-Volterra*, Serie monografías, Vínculos Matemáticos, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, 1985.
- [26] ———, «La Conferencia Waddington en Oaxtepec y Santiago López de Medrano», *Miscelánea Matemática, Sociedad Matemática Mexicana*, núm. 69, 2020, 67–108.
- [27] A. C. Scott, *The nonlinear universe. chaos, emergence, life*, The frontiers collection, Springer, 2007.
- [28] S. Smale, «Structurally stable systems are not dense», *Am Jour. Math*, vol. 58, 1966, 491–496, <https://doi.org/10.2307/2373203>.
- [29] ———, «Finding a horseshoe in the beaches of Rio», *The Mathematical Intelligencer*, vol. 20, núm. 1, 1998, 39–44, <https://doi.org/10.1007/BF03024399>.
- [30] E. C. Zeeman, «On the clasification of dynamical systems», *Bull. London. Math. Soc.*, vol. 20, 1988, 545–557, <https://doi.org/10.1112/BLMS/20.6.545>.
- [31] ———, *A new concept of stability*, En: *Theoretical Biology, Epigenetic and evolutionary order from complex systems*. B Goodwin and P Saunders (Eds). The John Hopkins University Press, 1992, 8-15.