Miscelánea Matemática **79** (2024) 23-39 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7904

Estudio GIT de la conjugación de matrices

Graciela Reyes-Ahumada
Unidad Académica de Matemáticas
CONAHCyT- Universidad Autónoma de Zacatecas
grace@cimat.mx,
Juan Vásquez Aquino
Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas
juan.vasquez@cimat.mx
y
Kenia Zarate Badillo
Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas
35166934@uaz.edu.mx

1. Introducción

En este escrito introducimos al lector a las primeras construcciones y preguntas de interés del área de investigación conocida como Teoría de Invariantes Geométricos (GIT por sus siglas en inglés: *Geometric Invariant Theory*), cuyas bases valieron la medalla Fields a D. Mumford en 1974. La GIT estudia la geometría de las acciones de grupos en variedades y ha sido un tema muy productivo en las últimas décadas, principalmente por su relevancia para la construcción de *Espacios Moduli*. Iniciamos este escrito recordando la definición de una acción.

Definición 1.1. Una acción (izquierda) de un grupo G en un conjunto S es una función

$$\sigma : G \times S \to S, \quad (g, s) \mapsto g \cdot s,$$

que satisface las propiedades:

1. Si $e \in G$ es la identidad entonces $e \cdot s = s$ para todo $s \in S$.
2. $g \cdot (h \cdot s) = (gh) \cdot s$, para todos $g, h \in G$ y $s \in S$.

Dada una acción definimos,

Palabras clave: Teoría de invariantes geométricos, Cocientes de acciones, Conjugación de matrices.

- La órbita de $s \in S$ es $O(s) = \{t \in S | \exists g \in G$ tal que $g \cdot s = t\}$.
- El estabilizador de $s \in S$ es el subgrupo $Est(s) = \{g \in G | g \cdot s = s\}$.
- Un elemento $s \in S$ se dice G-invariante si $Est(s) = G$ o equivalentemente si $O(s) = \{s\}$. Denotamos como $S^G = \{s \in S | s$ es $G-$ invariante$\}$.
- Si $s \in S$ su preimagen bajo la función

$$\sigma_s : G \to S, \quad g \mapsto g \cdot s,$$

es $\sigma_s^{-1}(s) = \{g \in G | g \cdot s = s\} = Est(s)$.
- Además si $g \in G$ denotamos la función

$$\sigma_g : S \to S, \quad s \mapsto g \cdot s.$$

La relación definida como $s \sim t$ si y solo si $t \in O(s)$ es una relación de equivalencia en S y sus clases son precisamente las órbitas, por lo que el conjunto de órbitas define una partición de S. Denotamos al conjunto de órbitas de la acción como $S/G = \{O(s) | s \in S\}$.

Ejemplo 1.2. El grupo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con la multiplicación, actúa en el conjunto $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mediante el producto escalar,

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^* \times S &\to S \\ (\lambda, (a,b)) &\mapsto (\lambda a, \lambda b). \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior $G = \mathbb{R}^*$ y $S/G = \mathbb{RP}^1$ son ambos son espacios topológicos (variedades con la métrica euclidiana), σ es una función continua (morfismo de variedades) y la asignación $\pi : S \to S/G,\ s \mapsto O(s)$ es nuevamente continua (morfismo). Lamentablemente esto no siempre sucede para una acción de un grupo en un espacio topológico. La GIT estudia la geometría de los conjuntos de órbitas de acciones de grupos en variedades (analíticas o algebraicas) e intenta dar condiciones suficientes para que S/G sea nuevamente una variedad. Notemos que si π es una función continua entonces la preimagen de un punto $\pi^{-1}(O(s)) \supset O(s)$ debe ser un conjunto cerrado, por lo que estaremos particularmente interesados en estudiar las órbitas cerradas, así como en estudiar acciones con la mayor cantidad posible de órbitas cerradas.

Con el fin de ilustrar los primeros resultados de la GIT, en este escrito utilizaremos resultados de álgebra lineal, análisis complejo y topología, para hacer un estudio detallado de la acción dada por conjugación de matrices, el cual es un ejemplo clásico que no se encuentra estudiado a detalle en la literatura estándar del tema, este ejemplo puede ser analizado tomando ventaja de herramientas de álgebra lineal como diagonalización y formas canónicas, así como resultados de análisis complejo, lo que nos permite introducir las primeras preguntas de interés de la GIT sin recurrir a geometría algebraica, es por ello que a lo largo de casi todo este escrito trabajamos en la topología euclidiana a excepción de la última sección donde introducimos las nociones de variedades algebraicas afines y sus morfismos para poder enunciar uno de los principales teoremas de la GIT (véase el teorema 5.17) en el lenguaje de variedades algebraicas.

A continuación definimos la acción por conjugación de matrices: Sea $M_n(\mathbb{C})$ el conjunto de matrices cuadradas de $n \times n$ con entradas complejas y consideremos el grupo general lineal $GL_n(\mathbb{C})$ que consiste de las matrices invertibles. La conjugación de matrices es la acción definida como

$$\sigma : GL_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), \quad (A, M) \mapsto AMA^{-1}.$$

2. Primeros ejemplos de acciones

Ejemplo 2.1. Consideremos al grupo $(\mathbb{C}, +)$ y la función

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ (\lambda, (a, b)) &\mapsto \lambda \cdot (a, b) = (a, b + \lambda a). \end{aligned}$$

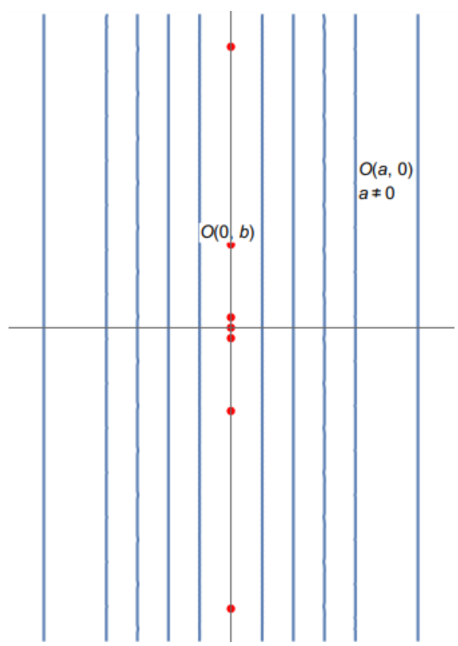

Figura 1. $\mathbb{C}$-órbitas.

Para el elemento identidad del grupo $0 \in \mathbb{C}$, se tiene $0 \cdot (a, b) = (a, b + 0a) = (a, b)$. Además si $a, b \in \mathbb{C}$ entonces se cumple $(a, b + (\lambda_1 + \lambda_2)a) = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot (a, b))$, por lo que σ es una acción.

Ahora describamos las órbitas de esta acción. Si $b \in \mathbb{C}$, entonces $O(0, b) = \{(0, b)\}$ y este tipo de puntos son $\mathbb{C}$-invariantes. Si $a \neq 0$

entonces
$O(a,0) = \{\lambda \cdot (a,0) : \lambda \in \mathbb{C}\} = \{(a, \lambda a) : \lambda \in \mathbb{C}\} = \{(a,k) : k \in \mathbb{C}\}$, coincide con la recta que pasa por $(a,0)$ y $(a,1)$, la cual es cerrada en $\mathbb{C}^2$; resumimos la descripción de las órbitas en la figura 1. Los estabilizadores son,
$Est(0,b) = \mathbb{C}$,
$Est(a,0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (a, 0+\lambda a) = (a,0)\} = \{0\}$, para todo $a \neq 0$. Además los elementos invariantes son $(\mathbb{C}^2)^{\mathbb{C}} = \{(0,b) | b \in \mathbb{C}\}$.

Ejemplo 2.2. Consideremos ahora la función

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ (\lambda, (a,b)) &\mapsto \lambda \cdot (a,b) = (\lambda a, \lambda^{-1} b). \end{aligned}$$

donde $\mathbb{C}^*$ es el grupo $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ con el producto complejo.

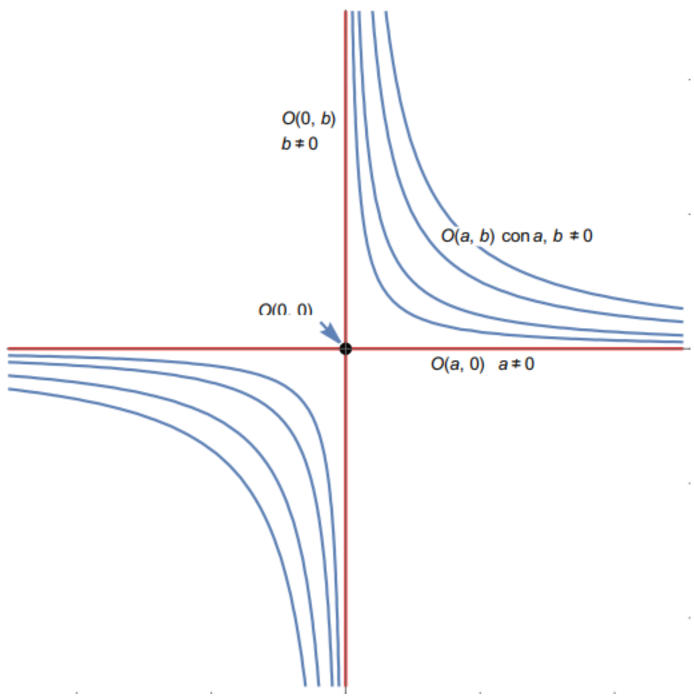

Figura 2. $\mathbb{C}^*$-órbitas.

Para la identidad de este grupo, $1 \cdot (a,b) = (1a, 1^{-1}b) = (a,b)$, y si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ se sigue que $(\lambda_1\lambda_2) \cdot (a,b) = ((\lambda_1\lambda_2)a, (\lambda_1\lambda_2)^{-1}b) = (\lambda_1\lambda_2 a, \lambda_2^{-1}\lambda_1^{-1}b) = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot (a,b))$, por lo que σ es una acción.

Ahora describiremos las órbitas:

$O(0,0) = \{(0,0)\}$. Si $a \neq 0$ entonces la órbita del punto $(a,0)$,

$$O(a,0) = \{\lambda \cdot (a,0) : \lambda \in \mathbb{C}^*\} = \{(\lambda a, 0) : \lambda \in \mathbb{C}^*\} = \{(x,0) : x \in \mathbb{C}^*\},$$

es el eje x sin el origen, el cual no es un cerrado. Si $b \neq 0$ la órbita de $(0, b)$ es el eje y sin el origen, que tampoco es cerrado

$$O(0, b) = \{\lambda\cdot(0, b) : \lambda \in \mathbb{C}^*\} = \{(0, \lambda^{-1}b) : \lambda \in \mathbb{C}^*\} = \{(0, y) : y \in \mathbb{C}^*\}.$$

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ se tiene que

$$O(a, b) = \{\lambda \cdot (a, b) : \lambda \in \mathbb{C}^*\} = \{(\lambda a, \lambda^{-1}b)\},$$

es la hipérbola definida por el polinomio $xy - ab = 0$, por lo que es una órbita cerrada. En resumen, hay 4 tipos de órbitas de las cuales dos son cerradas, como se muestra en la figura 2. Los estabilizadores en este caso son: si $(a, b) \neq (0, 0)$,

$$Est(a, b) = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : (a, b) = (\lambda a, \lambda^{-1}b)\} = \{1\} \text{ y } Est(0, 0) = \mathbb{C}^*.$$

Además los elementos invariantes son $(\mathbb{C}^2)^{\mathbb{C}^*} = \{(0, 0)\}$.

Ejemplo 2.3. Consideremos el grupo $\mathbb{C}^*$ y la función

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ (\lambda, (a, b)) &\mapsto \lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b). \end{aligned}$$

Se puede verificar que σ define una acción de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^2$. Las órbitas

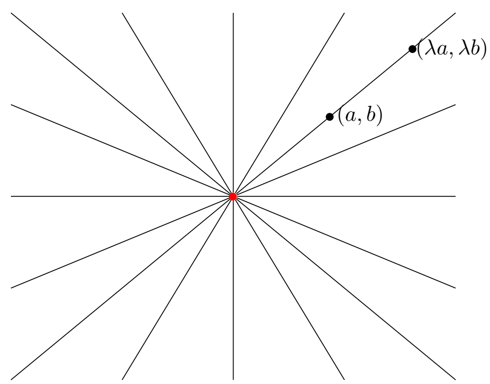

Figura 3. $\mathbb{C}^*$-órbitas.

de esta acción son:
$O(0, 0) = \{(0, 0)\}$ y si $(a, b) \neq (0, 0)$ entonces $O(a, b) = \{\lambda \cdot (a, b) : \lambda \in \mathbb{C}^*\} = \{(\lambda a, \lambda b) : \lambda \in \mathbb{C}^*\}$, este conjunto es la línea compleja que pasa por el origen y (a, b) sin el origen, lo cual no es un cerrado de $\mathbb{C}^2$. En resumen, para esta acción hay dos tipos de órbitas y solo existe una única órbita cerrada $O(0, 0)$, como se resume en la figura 3. Los estabilizadores en este caso son, si $(a, b) \neq (0, 0)$,

$$Est(a, b) = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : (a, b) = (\lambda a, \lambda b)\} = \{1\} \text{ y } Est(0, 0) = \mathbb{C}^*.$$

Además los elementos invariantes son $(\mathbb{C}^2)^{\mathbb{C}^*} = \{(0, 0)\}$. En esta acción la cerradura de una órbita $O(a, b)$ con $a \neq 0$ contiene a la única órbita cerrada $O(0,0)$. Sin embargo, si restringimos la acción σ al abierto denso $U = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ de $\mathbb{C}^2$, las órbitas de esta nueva acción $\sigma|_U : \mathbb{C}^* \times U \to U$ son todas cerradas y $U/\mathbb{C}^* = \mathbb{CP}^1$ es la esfera de Riemann.

Ejemplo 2.4. Consideremos el grupo simétrico S_n que consiste de las permutaciones de n elementos. Podemos definir una acción (derecha) de S_n en el anillo de polinomios en n variables $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, como

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \times S_n &\to \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \\ (f(x_1, \ldots, x_n), \sigma) &\mapsto f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}), \end{aligned}$$

en este caso los elementos invariantes son el anillo de polinomios simétricos (véase [4, teo. 2.20]), el cual es generado por los polinomios simétricos elementales, $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n} = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$, donde

$$f_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i,\ f_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j,\ f_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n} x_i x_j x_k,\ \ldots\ , f_n = x_1 \cdots x_n.$$

3. Preliminares de álgebra lineal

Ahora recordaremos algunos resultados de álgebra lineal, los resultados de esta sección pueden consultarse en [3] y [4]. Recordemos que dos matrices $M, N \in M_n(\mathbb{C})$ se dicen ser semejantes si existe una matriz $A \in GL_n(\mathbb{C})$ tal que $M = ANA^{-1}$.

Proposición 3.1. *El polinomio característico de una matriz $M \in M_n(\mathbb{C})$ definido como $P_M(x) = det(xI - M)$, es un polinomio mónico de grado n. Si M y N son semejantes entonces $P_M = P_N$. Además las raíces de P_M son llamados los valores propios de M.*

Lema 3.2. *Si $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ es triangular superior entonces $P_M(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$ donde $a_i = m_{ii}$.*

Teorema 3.3 (Forma canónica de Jordan)**.** *Toda matriz $M \in M_n(\mathbb{C})$ es semejante a una matriz triangular superior de la forma*

$$J_M = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix},\ donde\ B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix},$$

y donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son los valores propios (posiblemente repetidos) de M. Además J_M es única hasta cambio de orden de los bloques B_i y es llamada la forma canónica de Jordan de M. Además $J_M = D + N$ donde D es una matriz diagonal cuyas entradas son los valores propios de M y N es una matriz nilpotente.

Una matriz $M \in M_n(\mathbb{C})$ se dice ser diagonalizable si su forma de Jordan J_M es una matriz diagonal.

4. Estudio GIT de la conjugación de matrices

Ahora iniciaremos nuestro análisis de la acción dada por la conjugación

$$\begin{aligned} \sigma : GL_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) &\to M_n(\mathbb{C}) \\ (A, M) &\mapsto AMA^{-1}, \end{aligned}$$

Notemos que la relación de equivalencia que define esta acción es $M \sim N$ si y solo si M y N son semejantes.

Observación 4.1. Si $f \in \mathbb{C}[x_{ij}]$ es un polinomio en n^2 variables y $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ es una matriz, denotaremos como $f(M) = f(m_{ij}) \in \mathbb{C}$ la evaluación del polinomio en las entradas de la matriz. Notemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x_{ij}] &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(M), \end{aligned}$$

es un homomorfismo de anillos. Por otro lado, la conjugación induce una acción (derecha) en los polinomios en n^2 variables mediante

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C}[x_{ij}] \times GL_n(\mathbb{C}) &\to \mathbb{C}[x_{ij}] \\ (f(x_{ij}), A) &\mapsto f(A^{-1} \cdot (x_{ij})) = f(A^{-1}(x_{ij})A). \end{aligned}$$

Lema 4.2. *Sea $f \in \mathbb{C}[x_{ij}]^{GL_n(\mathbb{C})}$ y $M \in M_n(\mathbb{C})$, entonces $f(M) = f(J_M)$.*

Demostración. Si $f \in \mathbb{C}[x_{ij}]^{GL_n(\mathbb{C})}$ entonces $f(A^{-1}(x_{ij})A) = f(x_{ij})$ para toda $A \in GL_n(\mathbb{C})$, como $J_M \in O(M)$ se tiene $f(J_M) = f(M)$. □

Proposición 4.3. *Las matrices diagonalizables*

$$\mathfrak{D} = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid M \text{ es diagonalizable}\},$$

forman un conjunto denso en $M_n(\mathbb{C})$.

Demostración. Demostraremos que toda matriz $M \in M_n(\mathbb{C})$ es el límite de una sucesión de elementos en el conjunto

$$\mathfrak{B} = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid M \text{ tiene todos sus valores propios distintos}\}.$$

Notemos que una matriz en $\mathfrak{B}$ tiene forma de Jordan con n bloques $B_1, \ldots, B_n$ donde B_i es una matriz de 1×1 por lo que $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{D}$. Sea

$M \in M_n(\mathbb{C})$ entonces $M = A(J_M)A^{-1}$ para alguna $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Para $k \in \mathbb{N}$ definimos la matriz

$$M_k = M + \frac{1}{k}ABA^{-1} = A(J_M + \frac{1}{k}B)A^{-1}, \text{ donde } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

Como $J_M + \frac{1}{k}B$ es triangular superior entonces sus valores propios son los valores en su diagonal, y si $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ son los valores propios de M (posiblemente repetidos) entonces los valores propios de M_k son

$$\{\lambda_1 + \frac{1}{k}, \lambda_2 + \frac{2}{k}, \lambda_3 + \frac{3}{k}, \ldots, \lambda_n + \frac{n}{k}\},$$

los cuales son diferentes entre sí para k suficientemente grande. Claramante $\lim_{k\to\infty} M_k = M$. $\square$

Corolario 4.4. *Sean $f, g \in \mathbb{C}[x_{ij}]$ tales que $f(M) = g(M)$ para toda matriz diagonalizable $M \in \mathfrak{D}$, entonces $f = g$.*

Demostración. Por hipótesis $(f-g)(M) = 0$ para toda M en el conjunto denso $\mathfrak{D}$, como los polinomios definen funciones continuas en $\mathbb{C}^n$ y toda $N \in M_n(\mathbb{C})$ se aproxima por matrices en $\mathfrak{D}$, se sigue que $(f-g)(N) = 0$ para toda $N \in M_n(\mathbb{C})$. $\square$

Corolario 4.5. *Sean $f, g \in \mathbb{C}[x_{ij}]^{GL_n(\mathbb{C})}$ tales que $f(D) = g(D)$ para toda matriz diagonal $D \in M_n(\mathbb{C})$, entonces $f = g$.*

Demostración. Si M es una matriz diagonalizable entonces $M = A^{-1}DA$ para alguna matriz diagonal D y como f, g son $GL_n(\mathbb{C})$-invariantes $f(M) = f(A^{-1}DA) = f(D) = g(D) = g(A^{-1}DA) = g(M)$ por lo que el resultado se sigue del corolario anterior. $\square$

Consideremos ahora el homomorfismo de anillos definido como

$$F : \mathbb{C}[x_{ij}] \to \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$$

$$f(x_{ij}) \mapsto f(X), \qquad \text{donde } X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

Notemos que si $f, g \in \mathbb{C}[x_{ij}]^{GL_n(\mathbb{C})}$ son tales que $F(f) = F(g)$ entonces $f(D) = g(D)$ para toda matriz diagonal D y por el corolario anterior $f = g$, por lo que la restricción de F a $\mathbb{C}[x_{ij}]^{GL_n(\mathbb{C})}$ es inyectiva. Ahora mostraremos que la función F da un isomorfismo de $\mathbb{C}[x_{ij}]^{GL_n(\mathbb{C})}$ con $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$, veremos esto en varios pasos, iniciando por la siguiente,

Proposición 4.6. *Sea $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ entonces su polinomio característico es de la forma*

$$P_M(x) = x^n - f_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

donde $f_1, \dots, f_n$ son los polinomios simétricos elementales y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de M (contando multiplicidad).

Demostración. Sea $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ entonces su polinomio característico es

$$P_M(x) = \det(xI - M) = \det \begin{pmatrix} x - m_{11} & -m_{12} & \cdots & -m_{1n} \\ -m_{21} & x - m_{22} & \cdots & -m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \cdots & x - m_{nn} \end{pmatrix}.$$

Que es un polinomio mónico de grado n, es decir,

$$P_M(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n,$$

por lo que podemos ver a los coeficientes a_k como funciones polinomiales en las entradas (m_{ij}), es decir, existe un único polinomio $g_k(x_{ij}) \in \mathbb{C}[x_{ij}]$ que satisface $g_k(M) = a_k$ para toda $M \in M_n(\mathbb{C})$. Por otro lado, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de una matriz M entonces

$$P_M(x) = x^n - g_1(M)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n g_n(M) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i),$$

y por inducción en el tamaño de la matriz n (véase [9]), se deduce que

$$g_1(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \; g_2(M) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j, \; \dots, g_n(M) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

es decir, $g_k(M) = f_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ es el polinomio simétrico elemental de grado k evaluado en los valores propios. □

Observación 4.7. En la demostración anterior, los polinomios $g_k(x_{ij})$ son $GL_n(\mathbb{C})$-invariantes, ya que si $A \in GL_n(\mathbb{C})$ entonces M y $A^{-1}MA$ tienen los mismos valores propios y $g_k(M) = g_k(A^{-1}MA)$.

Finalmente demostraremos que el morfismo F que restringe a toda función invariante a las matrices diagonales, induce un isomorfismo entre el anillo de invariantes de la acción por conjugación y el anillo de funciones simétricas:

Teorema 4.8. $\mathbb{C}[x_{ij}]^{GL_n(\mathbb{C})} \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{S_n} = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$, *donde $f_1, \dots, f_n$ son los polinomios simétricos elementales.*

Demostración. Sea $f \in \mathbb{C}[x_{ij}]^{GL_n(\mathbb{C})}$ y $\sigma \in S_n$. En la notación anterior,

$$F(f) \cdot \sigma = f(X) \cdot \sigma = f(x_1, \dots, x_n) \cdot \sigma = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Notemos que $f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) = f(Y)$ donde

$$Y = \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_{\sigma(n)} \end{pmatrix},$$

es decir, Y se obtiene permutando los elementos de la diagonal de X. Como permutar los elementos de la diagonal de la matriz X puede expresarse como conjugar por una matriz, entonces existe $A \in GL_n(\mathbb{C})$ tal que $Y = A^{-1}XA$ y como f es $GL_n(\mathbb{C})$-invariante tenemos

$$F(f)\cdot\sigma = f(Y) = f(A^{-1}XA) = f(X) = F(f),$$

es decir, $F(f) \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{S_n}$ y $F(\mathbb{C}[x_{ij}]^{GL_n(\mathbb{C})}) \subset \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{S_n}$. Deseamos ver que esta contención es de hecho una igualdad de conjuntos, para esto notemos que por la observación 4.7 tenemos $g_k(x_{ij}) \in \mathbb{C}[x_{ij}]^{GL_n(\mathbb{C})}$ y claramente $F(g_k) = g_k(X) = f_k(x_1,\ldots,x_n)$, por lo que los generadores de $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{S_n}$ están en la imagen y se sigue el isomorfismo. □

Ahora estudiaremos las órbitas de la conjugación, para ello estudiaremos la siguiente función polinomial, la cual es continua con la topología euclidiana

$$\begin{aligned} \varphi : M_n(\mathbb{C}) &\to \mathbb{C}^n \\ M &\mapsto (g_1(M),\ldots,g_n(M)), \end{aligned}$$

donde los $\{g_k\}$ son los polinomios de la observación 4.7, notemos que $\varphi(A\cdot M) = \varphi(M)$, para todo $A \in GL_n(\mathbb{C})$, o bien $\varphi(O(M)) = \varphi(M)$.

Proposición 4.9. *φ es sobreyectiva*

Demostración. Si $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{C}^n$ la matriz:

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1}a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-2}a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_1 \end{pmatrix},$$

tiene $P_{M_a}(x) = x^n + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j a_j x^{n-j}$ y $\varphi(M_a) = (a_1,\ldots,a_n)$. □

Observación 4.10. $O(M) \subset \varphi^{-1}(\varphi(M))$, además $\varphi^{-1}(\varphi(M))$ es la preimagen de un punto por lo que es un cerrado y $\overline{O(M)} \subset \varphi^{-1}(\varphi(M))$. En particular si $N \in \overline{O(M)}$, entonces $P_N = P_M$.

Lema 4.11. *Siempre existe una matriz diagonal en $\overline{O(M)}$.*

Demostración. Sea $J_M = D+N$ donde D es la matriz diagonal formada por los valores propios de M y N es una matriz nilpotente. Sea $a \in \mathbb{C}^*$ y sea $A = (a_{ij})$ la matriz diagonal con $a_{ii} = a^{i-1}$. Notemos que $A^{-1}DA = D$ y $A^{-1}NA = aN$, luego $M_a = A^{-1}J_M A = D + aN \in O(M)$ para $a \in \mathbb{C}^*$ y $D = \lim_{a\to 0} M_a \in \overline{O(M)}$. □

Observación 4.12. De la demostración anterior podemos concluir que si $J_M = D + N$ donde D es la matriz diagonal de valores propios y N nilpotente, entonces $D \in \overline{O(M)}$.

Lema 4.13. *Si $O(M)$ es una órbita que no es cerrada y $B \in \overline{O(M)} \setminus O(M)$, entonces $O(B) \subset \overline{O(M)} \setminus O(M)$*

Demostración. Consideremos la función $\sigma_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}),\ M \mapsto AMA^{-1}$, que es claramente polinomial (y continua), entonces

$$\sigma_A(\overline{O(M)}) \subset \overline{\sigma_A(O(M))} \subset \overline{O(M)}.$$

Si $B \in \overline{O(M)} \setminus O(M)$, por lo anterior $A \cdot B \in \overline{O(M)}$ para todo $A \in GL_n(\mathbb{C})$, es decir, $O(B) \subset \overline{O(M)}$. Como $B \notin O(M)$ y cualesquiera dos órbitas son iguales o disjuntas, se sigue que $O(B) \cap O(M) = \emptyset$, entonces $O(B) \subset \overline{O(M)} \setminus O(M)$. □

Proposición 4.14. *$M \in \mathfrak{D}$ si y solo si $O(M)$ es cerrada.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $M \in \mathfrak{D}$ y supongamos que la órbita $O(M)$ no es cerrada, entonces existe $B \in \overline{O(M)} \setminus O(M)$ y por la observación 4.10, $P_B = P_M$. Como $B \not\sim M$, entonces $J_B = J_M + N$ donde $N \neq 0$ es una matriz nilpotente, por la observación 4.12 $J_M \in \overline{O(B)}$ y por el lema anterior $O(M) = O(J_M) \subset \overline{O(B)} \setminus O(B)$, como $O(M)$ es unión de órbitas de dimensión más pequeña (véase (4) de lema 5.11), se sigue que $\dim(O(M)) \leq \dim(\overline{O(B)}) < \dim(\overline{O(M)}) = \dim(O(M))$ lo cual es una contradicción.

($\Leftarrow$) Para la otra implicación, si $M \notin \mathfrak{D}$ por el lema 4.11 existe una matriz diagonal $D \in \overline{O(M)} \setminus O(M)$ por lo que $O(M)$ no es cerrada. □

El resultado anterior caracteriza las órbitas cerradas de la conjugación, las cuales se corresponden con elementos del conjunto denso $\mathfrak{D}$. Ahora estudiaremos las dimensiones de las órbitas.

Proposición 4.15. *Toda órbita tiene dimensión $dim(O(M)) \leq n^2 - n$. Además la igualdad se alcanza en las matrices $M \in \mathfrak{B}$.*

Demostración. Sea $M \in M_n(\mathbb{C})$, y considere la función polinomial

$$\begin{aligned} \sigma_M : GL_n(\mathbb{C}) &\to \overline{O(M)} \\ A &\mapsto A \cdot M. \end{aligned}$$

Como la fibras de σ_M se identifican con el estabilizador, por el teorema de la dimensión de la fibra [8, cap. 2, teo. 6.4], se sigue que $\dim(O(M)) \leq \dim(GL_n(\mathbb{C})) - \dim(Est(M)) = n^2 - \dim(Est(M))$. Sea $D \in \mathfrak{B}$ una matriz diagonal cuya diagonal es $(d_1, \ldots, d_n)$ si $A = (a_{ij}) \in Est(D) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) | AD = DA\}$ sus entradas satisfacen $a_{ij}d_i = a_{ij}d_j$, como $d_i \neq d_j$ para $i \neq j$ entonces A es diagonal y

$$Est(D) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) | A \text{ es diagonal}\} \cong (\mathbb{C}^*)^n.$$

Si $M \in \mathfrak{B}$, $M = ADA^{-1}$ para alguna matriz diagonal D y $A \in GL_n(\mathbb{C})$, entonces

$$\begin{aligned} Est(M) = Est(ADA^{-1}) &= \{B \in GL_n(\mathbb{C}) | B(ADA^{-1})B^{-1} = ADA^{-1}\} \\ &= \{B \in GL_n(\mathbb{C}) | (A^{-1}BA)D(A^{-1}B^{-1}A) = D\} \\ &= \{C \in GL_n(\mathbb{C}) | CDC^{-1} = D\} = AEst(D)A^{-1} \cong (\mathbb{C}^*)^n, \end{aligned}$$

así $\dim(O(M)) = n^2 - \dim(Est(M)) = n^2 - n$ se cumple en el denso $\mathfrak{B}$ y esta es la dimensión máxima que puede tener una órbita. □

5. Introducción a la GIT

En este escrito hemos analizado diversos ejemplos de grupos actuando en variedades $\sigma : G \times X \to X$ en los que los conjuntos de órbitas X/G no siempre son variedades y en que las órbitas no siempre son cerradas. Uno de los principales teoremas de la GIT, llamado el *teorema de la existencia del cociente afín*, enuncia que imponiendo algunas condiciones en la acción $\sigma : G \times X \to X$ siempre podemos asegurar que existe una variedad Y que de alguna forma *soluciona* estos problemas. Las condiciones a las que nos referimos son: X es una variedad afín, G es un grupo algebraico reductivo y σ es una acción algebraica lineal. Ahora analizaremos estas nociones con el fin de enunciar de manera precisa el *teorema de la existencia del cociente afín* (teorema 5.17). Las demostraciones que se omiten en esta sección pueden ser consultadas en [5, 7, 8] y [9].

Sea K un campo y sea $K[x_1, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables. K es algebraicamente cerrado si para todo polinomio no constante $f(x) \in K[x]$, existe $p \in K$ tal que $f(p) = 0$. De aquí en adelante K denotará un campo algebraicamente cerrado. Sea $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal, definimos el conjunto de ceros de I como

$$\mathcal{V}(I) = \{p \in K^n | f(p) = 0 \text{ para todo } f \in I\}.$$

Definición 5.1. Un elemento a en un anillo R se dice nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. Una variedad afín es un conjunto de la forma $X = \mathcal{V}(I)$ donde el anillo cociente $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$, no tiene elementos nilpotentes no cero.

Ejemplo 5.2. 1. Las hipérbolas y parábolas son ejemplos de variedades afines: por ejemplo $\mathcal{V}(xy - 1)$ y $\mathcal{V}(y - x^2)$ en $\mathbb{C}^2$.

2. $K^n = \mathcal{V}(0) \subset K^n$ es variedad afín y $\mathcal{O}(K^n) = K[x_1, \ldots, x_n]$. Similarmente $M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{V}(0) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ es una variedad afín, ya que $\mathcal{O}(M_n(\mathbb{C})) = \mathbb{C}[x_{ij}]$ es dominio entero.
3. $GL_n(\mathbb{C})$ es una variedad afín, ya que $GL_n(\mathbb{C}) = \mathcal{V}(\langle det \cdot y - 1\rangle) \subset \mathbb{C}^{n^2+1}$, donde $det = det(x_{11}, \ldots, x_{nn}) \in \mathbb{C}[x_{11}, \ldots, x_{nn}, y]$ es el polinomio determinante, además no hay elementos nilpotentes no cero en $\mathcal{O}(GL_n(\mathbb{C})) = \mathbb{C}[x_{11}, \ldots, x_{nn}, y]/\langle det \cdot y - 1\rangle \cong \mathbb{C}[x_{11}, \ldots, x_{nn}, \frac{1}{det}]$.

Definición 5.3. Sean $X \subset K^n$ y $Y \subset K^m$ variedades afines. Un morfismo variedades afines es una función $f : X \to Y$ tal que existen elementos $f_1, \ldots, f_m$ del anillo $\mathcal{O}(X)$ que satisfacen $f(p) = (f_1(p), \ldots, f_m(p))$ para todo $p = (a_1, \ldots, a_n) \in X$. Notemos que $f \in \mathcal{O}(X)$ define un morfismo $f : X \to K$.

Ejemplo 5.4. El producto de variedades afines es nuevamente una variedad afín y en particular la multiplicación de matrices $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), (A, B) \mapsto AB$, y la inversa $M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}), A \mapsto A^{-1}$, son morfismos de variedades afines (véase [2]).

Una variedad afín X sobre un campo K puede dotarse con estructura de espacio topológico considerando sus subvariedades afines como los conjuntos cerrados y se puede demostrar que los morfismos de variedades afines son funciones continuas en esta topología (véase [2]). Si $U \subset X$ es un abierto de esta topología definimos el anillo

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \to K | \exists g, h \in \mathcal{O}(X) \text{ con } f = \frac{g}{h} \text{ y } h(x) \neq 0 \ \forall x \in U\}.$$

Definición 5.5. Sea $\{*\}$ la variedad afín que consiste de un solo punto. Un grupo algebraico afín sobre K es una variedad afín G junto con tres morfismos de variedades afines $e : \{*\} \to G,\ m : G \times G \to G,\ i : G \to G$, tal que los siguientes diagramas conmutan,

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "id \times m"] \arrow[d, "m \times id"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"'] & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] & \\
\{*\} \times G \arrow[r, "e \times id"] \arrow[dr, "\cong"'] & G \times G \arrow[d, "m"] & G \times \{*\} \arrow[l, "id \times e"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
 & G &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] & \\
G \arrow[r, "(i,id)"'] \arrow[d] & G \times G \arrow[d, "m"] & G \arrow[l, "(id,i)"] \arrow[d] \\
\{*\} \arrow[r, "e"'] & G & \{*\} \arrow[l, "e"]
\end{tikzcd}$$

La conmutatividad del primer diagrama implica que m es una operación asociativa; el segundo diagrama implica que $e(\{*\})$ es la identidad de G; el tercer diagrama implica que $i(a)$ es el inverso de a respecto a m. Entonces un grupo algebraico afín es una variedad afín con estructura de grupo tal que sus operaciones producto e inversos son morfismos.

Definición 5.6. Sean $(G, m_G), (H, m_H)$ grupos algebraicos afines. Un morfismo de grupos algebraicos afines es un morfismo de variedades $f : G \to H$, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "m_G"] \arrow[d, "f\times f"'] & G \arrow[d, "f"] \\
H \times H \arrow[r, "m_H"] & H,
\end{tikzcd}$$

en particular f es un homomorfismo de grupos. Un isomorfismo de grupos algebraicos afines es un morfismo de grupos algebraicos biyectivo cuya inversa es morfismo de grupos algebraicos. Un subgrupo algebraico de un grupo algebraico G es una subvariedad cerrada H tal que la inclusión $H \hookrightarrow G$ es un morfismo de grupos algebraicos.

Teorema 5.7 (Véase [9])**.** *Todo grupo algebraico afín G sobre un campo K es isomorfo a un subgrupo algebraico afín de $GL_n(K)$.*

El resultado anterior nos dice que estudiar grupos algebraicos afines es, hasta isomorfismo, estudiar subgrupos de $GL_n(K)$.

Definición 5.8. Un grupo algebraico afín se dice reductivo si no contiene ningún subgrupo normal cerrado isomorfo a $(K^n, +)$ donde $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 5.9. $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}^*$, S_n son reductivos (véase [8]).

Definición 5.10. Sea G un grupo algebraico afín y X una variedad afín. Un morfismo de variedades $\sigma : G \times X \to X$ se dice una *acción algebraica* si hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \times X \arrow[r, "e\times id_X"] \arrow[dr, "\cong"'] & G \times X \arrow[d, "\sigma"] \\
 & X
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
G \times G \times X \arrow[r, "id_G\times\sigma"] \arrow[d, "m_G\times id_X"'] & G \times X \arrow[d, "\sigma"] \\
G \times X \arrow[r, "\sigma"'] & X.
\end{tikzcd}$$

Notemos que una acción algebraica es en particular una acción, por lo que podemos hablar de sus órbitas, estabilizadores y de su conjunto de órbitas. Si G es un grupo algebraico afín, la acción se dice ser *acción lineal*, este término se utiliza más generalmente cuando la acción viene dada por una representación de G, es decir, actúa como multiplicar matrices. En adelante, solamente consideraremos grupos algebraicos afines y acciones lineales.

Sean $\sigma_X : G \times X \to X$ y $\sigma_Y : G \times Y \to Y$ acciones algebraicas, un morfismo $f : X \to Y$ se dice G-*equivariante* si el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "id_G \times f"] \arrow[d, "\sigma_X"'] & G \times Y \arrow[d, "\sigma_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y, \end{tikzcd}$$

conmuta. Además f es llamado G-*invariante* si es equivariante respecto a la acción $\sigma_Y : G \times Y \to Y$ proyección a la segunda coordenada.

El siguiente resultado resume la geometría de las órbitas de una acción.

Lema 5.11 ([6, lema 3.7])**.** *Sea G un grupo algebraico afín actuando algebraicamente en una variedad algebraica X y sea $x \in X$.*

1. *La órbita $O(x)$ es abierta en su cerradura $\overline{O(x)}$.*
2. *La órbita $O(x)$ es una variedad algebraica suave.*
3. *La dimensión de la órbita $dimO(x) = dim(G) - dim(Est(x))$.*
4. *$\overline{O(x)} \setminus O(x)$ es unión de órbitas de dimensión más pequeña que la de $O(x)$.*
5. *Existe una órbita cerrada en $\overline{O(x)}$.*

Ejemplo 5.12. La conjugación de matrices es una acción algebraica. En el estudio GIT que hicimos en la sección 4, mostramos que las órbitas cerradas son las de matrices en $\mathfrak{D}$, las órbitas cerradas de dimensión máxima $n^2 - n$ se alcanza en $\mathfrak{B}$ y definimos el morfismo $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^n,\ M \mapsto (g_1(M), \ldots, g_n(M))$ el cual es $GL_n(\mathbb{C})$-invariante.

Observación 5.13. Una acción algebraica de G en X induce una acción (derecha) en el anillo $\mathcal{O}(X)$ mediante

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(X) \times G &\to \mathcal{O}(X) \\ (f(x), g) &\mapsto g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x). \end{aligned}$$

Los elementos G-invariantes son el anillo $\mathcal{O}(X)^G := \{f \in \mathcal{O}(X) \mid g \cdot f = f \text{ para todo } g \in G\}$. Similarmente, si $U \subset X$ es un abierto tal que $G \cdot U \subset U$, entonces G actúa en $\mathcal{O}_X(U)$ y denotamos como $\mathcal{O}_X(U)^G$ al conjunto de elementos invariantes de $\mathcal{O}(U)$.

Ejemplo 5.14. Para la conjugación de matrices mostramos que el anillo de invariantes es $\mathbb{C}[x_{ij}]^{GL_n(\mathbb{C})} = \mathbb{C}[g_1, \ldots, g_n] \cong \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n} = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$, donde los $g_i \in \mathbb{C}[x_{ij}]$ son los polinomios de grado i que definen los coeficientes del polinomio característico de una matriz y los f_i's son los polinomios simétricos elementales (teorema 4.8).

Definición 5.15. Un *cociente categórico* para una acción de G en X es un morfismo G-invariante $\varphi : X \to Y$ de variedades tal que para todo morfismo G-invariante $f : X \to Z$ existe un único morfismo $h : Y \to Z$ que satisface $\varphi = h \circ f$. Si además la preimagen de cada punto en Y consiste de una sola órbita diremos que φ es un espacio de órbitas.

Definición 5.16. Un morfismo $\varphi : X \to Y$ es un *cociente bueno* para la acción de G en X si satisface,

1. φ es G-invariante.
2. φ es sobreyectivo.
3. Si $U \subset Y$ es un subconjunto abierto, entonces el morfismo $\mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$ es un isomorfismo sobre las funciones G-invariantes $\mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))^G$.
4. Si $W \subset X$ es un subconjunto cerrado G-invariante de X, su imagen $\varphi(W)$ es cerrada en Y.
5. Si W_1 y W_2 son dos subconjuntos cerrados G-invariantes y disjuntos, entonces $\varphi(W_1)$ y $\varphi(W_2)$ son disjuntos.
6. La preimagen mediante φ de todo abierto afín es un abierto afín.

Al par (φ, Y) se le llama *Cociente GIT*, y a la variedad Y se le denota como $X//G$. Si además, la preimagen de cada punto es una sola órbita, entonces decimos que φ es un *cociente geométrico*.

Estamos listos para enunciar el teorema de la existencia de cociente bueno para variedades afines:

Teorema 5.17 (Existencia del cociente afín [6, teo. 3.5])**.** *Sea G un grupo reductivo actuando linealmente sobre una variedad afín X. Entonces existe una variedad afín Y y un morfismo $\varphi : X \to Y$ tal que el par (φ, Y) es un cociente bueno.*

Idea de la demostración. Sea $G \times X \to X$ la acción de G en X y consideramos la acción inducida en $\mathcal{O}(X)$. Como G es reductivo $\mathcal{O}(X)^G$ es finitamente generado ([1, cap. 4]) y existen polinomios $h_1 \ldots, h_n \in \mathcal{O}(X)$ tales que $\mathcal{O}(X)^G = \mathbb{C}[h_1, \ldots, h_n]$. Consideremos I como el ideal de relaciones polinomiales del conjunto $\{h_1, \ldots, h_n\}$, $I = \{s \in \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n] \mid s(h_1, \ldots, h_n) = 0\}$ entonces se puede mostrar que $Y = \mathcal{V}(I)$ y $\varphi : X \to Y$, $x \mapsto (h_1(x), \ldots, h_n(x))$ definen un cociente bueno. □

Ejemplo 5.18. 1. El ejemplo 2.1 es un caso de un grupo algebraico no reductivo actuando en una variedad afín. Su anillo de invariantes es $\mathbb{C}[x, y]^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}[x]$ y se puede definir un morfismo $\mathbb{C}$-invariante sobreyectivo $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x$, pero no existe un cociente bueno (véase [9, ej. 4.3.4]), por lo que en particular la reductividad es una hipótesis necesaria.

2. En el ejemplo 2.2 tenemos un grupo reductivo actuando en una variedad afín. Su anillo de invariantes es $\mathbb{C}[x, y]^{\mathbb{C}^*} = \mathbb{C}[xy]$ y el cociente GIT está dado por $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto xy$ (véase [9, ej. 4.3.3]).

Finalmente, de nuestro análisis GIT de la conjugación de matrices (sección 4), se tiene que el anillo de invariantes de esta acción está dado por $\mathbb{C}[x_{ij}]^{GL_n(\mathbb{C})} = \mathbb{C}[g_1, \dots, g_n]$ donde los polinomios $g_1, \dots, g_n$ definen los coeficientes del polinomio característico de una matriz en $M_n(\mathbb{C})$. Ahora definimos el siguente morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : M_n(\mathbb{C}) &\to \mathbb{C}^n = M_n(\mathbb{C})//GL_n(\mathbb{C}) \\ A &\mapsto (g_1(A), \dots, g_n(A)), \end{aligned}$$

donde $\mathbb{C}^n$ es el cociente GIT. Se puede verificar que este morfismo es $GL_n(\mathbb{C})$-invariante y es sobreyectivo. Las fibras de φ son uniones de órbitas, es decir, de clases de conjugación de matrices que tienen los mismos valores propios. Del teorema 5.17, podemos concluir que el par $(\varphi, \mathbb{C}^n)$ es un cociente bueno para esta acción.

Bibliografía

[1] I. Dolgachev, *Lectures on invariant theory*, núm. 296, Cambridge University Press, 2003.

[2] W. Fulton y R. Weiss, *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry*, vol. 3, Addison-Wesley Redwood City California, 1989.

[3] K. Hoffman y R. Kunze, *Álgebra lineal*, Prentice Hall, 2006.

[4] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, Courier Dover Publications, 2012.

[5] D. Mumford, F. Kirwan y J. Fogarty, *Geometric invariant theory*, Springer Verlag, 1994.

[6] P. E. Newstead, *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978.

[7] C. Reynoso, *Introducción a la teoría de invariantes geométricos*, Notas de curso, 2010.

[8] W. F. Santos y A. Rittatore, *Actions and invariants of algebraic groups*, CRC Press, 2005.

[9] K. Zarate-Badillo, *Clasificación de grupos algebraicos afines y estudio git de la conjugación de matrices*, Tesis de Licenciatura. U. Autónoma de Zacatecas, 2023 (por aparecer).