Miscelánea Matemática **47** (2008) 87–106 SMM

El Problema del Intercambio de Regalos

Fabián M. Hernández Arellano

Millward Brown América Latina

Av. Tamaulipas 150-1202

06140 México, D. F.

México.

Fabian.Hernandez@mx.millwardbrown.com

Luis Felipe González

Departamento de Estadística

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Río Hondo No. 1

01000 México, D. F.

México.

lfpg0528@itam.mx

Introducción Un intercambio de regalos entre n personas, n un número natural, se lleva a cabo de la siguiente manera. Cada una de las n personas escribe su nombre en un papel que es doblado (para que no se pueda leer el nombre) y colocado en una urna. Los pedazos de papel son revueltos en la urna y cada participante selecciona un pedazo de papel. Si una persona selecciona su propio nombre, el papel se vuelve a doblar, se coloca en la urna, los papeles son revueltos y la persona hace otra extracción. El proceso se repite hasta que seleccione el nombre de otra persona. Si por azar la última persona sólo puede seleccionar su propio nombre, el proceso se repite desde el principio. El día del intercambio de regalos se selecciona al azar a una persona y ésta le da un regalo a la persona cuyo nombre había seleccionado. La segunda persona, a su vez, le da un regalo a la persona cuyo nombre había seleccionado. De esta manera se forma una *cadena* de entrega de regalos. Decimos que *la cadena se rompe* cuando una persona, que no es la última en dar un regalo, da un regalo a una persona que ya había dado uno. Por ejemplo, en un intercambio con cinco personas, la cadena se rompe si la persona uno le regala a la persona dos, la dos a la tres y la tres a la dos. Si la cadena se rompe, se elige al azar a una persona que no haya dado un regalo en la cadena original. Esta nueva persona iniciará una segunda cadena. El proceso se repite hasta que las n personas reciban un regalo.

Pregunta 1 Si n personas participan en un intercambio de regalos, donde $n = 2, 3, \ldots$, ¿cuál es la probabilidad de que no se rompa la cadena?, esto es, ¿cuál es la probabilidad de que se forme una sola cadena?

Respuesta. Para contestar la pregunta, primero especificaremos el experimento aleatorio $\mathcal{E}$. El experimento aleatorio $\mathcal{E}$ consiste en asignar aleatoriamente a cada persona el nombre de otra persona de tal manera que a personas distintas les son asignados nombres de personas distintas. Si numeramos a las personas del 1 al n, $\mathcal{E}$ puede ser conceptualizado como una asignación $1 \to i_1, 2 \to i_2, \ldots, n \to i_n$, de manera que $i_1, i_2, \ldots, i_n$ son los naturales $1, 2, \ldots, n$ en algún orden. Esta asignación se interpreta como sigue: la persona 1 le regala a la persona i_1, la persona 2 le regala a la persona i_2, y así sucesivamente. Sea (Ω_n, S, P) el espacio de probabilidad asociado a $\mathcal{E}$. El espacio muestral Ω_n que acabamos de describir puede ser escrito como

$$\Omega_n = \{(i_1, \ldots, i_n) : 1 \leq i_j \leq n \text{ para toda } j, i_j \neq i_k \text{ cuando } i_k \neq k, i_j \neq j\}.$$

El espacio Ω_n es entonces el conjunto de las permutaciones de los n primeros números naturales donde ningún número está en su lugar. Es claro que Ω_n es un subconjunto del conjunto de las permutaciones de n objetos distintos, que denotaremos con Π_n. La sigma álgebra S es el conjunto potencia de Ω_n y la medida de probabilidad, P, está definida para todo subconjunto A de Ω_n como

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega_n},$$

donde $\#$ significa cardinalidad. En el contexto del problema del intercambio de regalos, interpretamos a la permutación $(i_1, \ldots, i_n)$ como sigue: la persona numerada con 1 le regala a la persona numerada con i_1, la persona 2 le regala a la persona i_2, y así sucesivamente.

Para convencernos de que una permutación donde ningún número está en su lugar refleja un intercambio de regalos analizaremos la permutación $(4, 1, 2, 3)$. La permutación indica que hay cuatro personas involucradas. La persona uno, la primera coordenada, da un regalo a la persona cuatro. La persona cuatro, la cuarta coordenada, da un regalo a la persona tres, la persona tres, la tercera coordenada, a la dos y la dos a la uno.

Para hallar $\#\Omega_n$, definimos $B_k \subset \Pi_n$ como el conjunto de las permutaciones donde el número k ocupa la posición k. En consecuencia, el conjunto $\cap_{k=1}^n B_k^c = \Pi_n - \cup_{k=1}^n B_k$ contiene exactamente a las permutaciones en las que ningún número se encuentra en su lugar. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\#\Omega_n &= \#\left(\bigcap_{k=1}^n B_k^c\right) = \#\Pi_n - \#\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right)\\ &= n! - \left[\sum_{k=1}^n \#B_k + \sum_{i<k}^n \#(B_i \cap B_j) + \cdots + (-1)^{n+1}\#\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right)\right].\end{aligned}$$

Como $\#B_k = (n-1)!$ para toda k, $\#(B_i \cap B_k) = (n-2)!$ para todo par i, k con $i < k$, $\#(B_i \cap B_j \cap B_k) = (n-3)!$ para toda terna j, i, k con $j < i < k$, etc., obtenemos que

$$\begin{aligned}\#\Omega_n &= n! - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^{k+1}(n-k)!\\ &= n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \qquad (1)\end{aligned}$$

que obviamente es un número natural. Para n entero no negativo, definamos $S(n)$ como

$$S(n) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!},$$

de manera que

$$\#\Omega_n = n!S(n). \qquad (2)$$

Pierre Reymond de Montmort se dio cuenta de que si n es grande tendremos que

$$\#\Omega_n \approx n! \exp(-1) \qquad (3)$$

ya que

$$\exp(-1) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \approx S(n).$$

Con el fin de determinar qué tan precisa es la aproximación, obsérvese que

$$\left|\#\Omega_n - n!e^{-1}\right| = n!\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\right|$$

que reescribimos como

$$n!\left|\frac{1}{(n+1)!} - \left(\frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!}\right) - \left(\frac{1}{(n+4)!} - \frac{1}{(n+5)!}\right) - \cdots\right|,$$

y notamos que esta expresión está acotada por $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$. Como n es un número natural, nos damos cuenta que el valor absoluto del error es menor que una unidad. Definamos $N(n) = \#\Omega_n$, en la siguiente tabla mostramos algunos valores que muestran que la aproximación es excelente.

n	$N(n)$	$N(n) - n!e^{-1}$
2	1	0.264
3	2	-0.207
4	9	0.171
5	44	-0.146
6	265	0.127
7	1,854	-0.112
8	14,833	0.101
9	133,496	-0.092
10	1,334,961	0.084
11	14,684,570	-0.077
12	176,214,841	0.072
13	2,290,792,932	-0.067
14	32,071,101,049	0.063
15	481,066,515,734	-0.059

Confirmamos que el error de la aproximación es cuestión de decimales y que la aproximación es muy buena aún para valores pequeños de n. Notamos que (3) nos informa que del total de permutaciones, $n!$, el 36.8 % $\approx [100 * \exp(-1)]$ % pertenece a Ω_n. Es sencillo verificar que $N(n)$ satisface la siguiente recurrencia

$$N(n+1) = (n+1)N(n) + (-1)^{n+1}$$

para $n \geq 2$ con $N(2) = 1$.

Mediante la tabla 1, nos damos también cuenta de que $N(n)$ crece rápidamente. La magnitud de $N(n)$, aún para valores pequeños de n, sugiere que atacar la Pregunta 1 a fuerza bruta no es una buena estrategia.

Ya estamos en posición de contestar nuestra primera pregunta. Definamos A_n como el evento en que se forma una sola cadena en un intercambio de regalos que involucra n personas. Queremos calcular $P(A_n)$ para $n \geq 2$. Antes de seguir con el caso general veamos los tres casos particulares $n = 2, 3, 4$.

- Para $n = 2$, sólo existe una permutación válida $(2, 1)$ donde la persona 1 le regala a la 2 y la 2 a la 1. Por lo que para $n = 2$ existe una $(= (2-1)!)$ cadena.

- Para $n = 3$, existen dos permutaciones válidas $(2, 3, 1)$ y $(3, 1, 2)$. En la primera, $(2, 3, 1)$, la persona 1 le regala a la 2, la 2 a la 3 y la 3 a la 1; por lo que se forma una sola cadena. En la segunda, la persona 1 le regala a la 3, la 3 a la 2 y la 2 a la 1; por lo que también se forma una sola cadena. En consecuencia, para $n = 3$ las dos $(= (3-1)!)$ cadenas válidas siempre forman una sola cadena.

- Para $n = 4$, existen nueve permutaciones válidas:

  $(2, 1, 4, 3)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(2, 4, 1, 3)$, $(3, 1, 4, 2)$, $(3, 4, 1, 2)$, $(3, 4, 2, 1)$, $(4, 1, 2, 3)$, $(4, 3, 1, 2)$ y $(4, 3, 2, 1)$.

  Observe lector que existen 3 permutaciones válidas por cada primer dígito 2,3 y 4. Es claro que las permutaciones que inician con 1 no son válidas. De esas nueve existen seis $(= (4-1)!)$ donde se produce una sola cadena. Por ejemplo, para la permutación $(4, 3, 2, 1)$ tenemos $1 \rightleftarrows 4$ $2 \rightleftarrows 3$, que nos muestra que se forman dos cadenas ya que la persona 1 le regala a la 4 y la 4 a la 1 mientras que la persona 2 le regala a la 3 y la 3 a la 2. Las flechas significan: u regala a v, que representamos como $u \to v$. Así la probabilidad de que forme una sola cadena es =6/9=2/3 y la probabilidad de que se formen dos cadenas es 3/9=1/3.

Los casos particulares anteriores sugieren que $\#A_n = (n-1)!$. Una manera de ratificar la respuesta general es notar que $(n-1)!$ es el número de maneras distintas de sentar a n personas distintas en una mesa redonda (una persona es fijada a un lugar y el resto, $n-1$, son permutadas). Observemos que sentar a n personas en una mesa redonda es equivalente a que la primera persona que da un regalo sea la última en recibir uno. Sin embargo, el argumento inductivo es el más contundente: $\#A_{n+1} = n\#A_n$, ya que por cada intercambio de regalos de n personas donde se forma una sola cadena, existen n maneras distintas de insertar a la persona $n+1$. Por tanto, $\#A_n = (n-1)!$, y usando la ecuación (2) obtenemos la probabilidad de que se forme una sola cadena:

$$P(A_n) = \frac{(n-1)!}{n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)} = \frac{1}{nS(n)},$$

para $n \geq 2$. Al notar que $S(n+1) = S(n) + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ y considerar para $n \geq 3$ la diferencia

$$\frac{1}{P(A_{n+1})} - \frac{1}{P(A_n)} = (n+1)S(n+1) - nS(n) = S(n-1) > 0,$$

constatamos que $P(A_{n+1}) < P(A_n)$ por lo que la sucesión $P(A_3)$, $P(A_4)$, ... es decreciente. Y como está acotada inferiormente por cero la sucesión converge. Es más, la sucesión converge a cero. Para n grande tenemos la siguiente aproximación,

$$P(A_n) \approx \frac{1}{ne^{-1}} = \frac{e}{n}.$$

Enseguida encontraremos una cota para el error de la aproximación. Consideremos la diferencia

$$\left| P(A_n) - \frac{e}{n} \right| = \frac{e}{n} \left| \frac{R(n)}{S(n)} \right|.$$

Como vimos arriba $|R(n)| < \frac{1}{(n+1)!}$. Ahora, para $n \geq 7$,

$$|S(n)| = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \geq \\ \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{4!}(1 - \frac{1}{5}) + \frac{1}{6!}(1 - \frac{1}{7}) = \frac{103}{280}$$

Por lo que

$$\left| P(A_n) - \frac{1}{ne^{-1}} \right| < \frac{280e}{103n(n+1)!} < \frac{7.39}{n(n+1)!}.$$

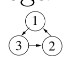
Adicionalmente,

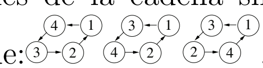
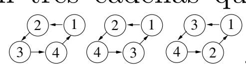
$$\left| \frac{P(A_n)}{e/n} - 1 \right| < \frac{2.72}{(n+1)!},$$

que nos dice que $P(A_n)/(e/n)$ converge a uno cuando n tiende a infinito. Para $n \geq 7$ la aproximación tendrá una precisión alta. De hecho, para $n = 7$, $|P(A_7) - \frac{e}{7}| < 0.0000299$. Por lo tanto, si n es grande la probabilidad de que se formen dos o más cadenas es alta. Por ejemplo, para $n = 50$ la aproximación produce $P(A_{50}) \approx 0.054$. La tabla 2 compara el valor real de $P(A_n)$ con la aproximación e/n.

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P(A_n)$	0.38835	0.33978	0.30203	0.27183	0.24712	0.22652	0.20909	0.19146	0.18121
e/n	0.38833	0.33979	0.30203	0.27183	0.24712	0.22652	0.20909	0.19146	0.18121

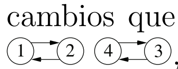
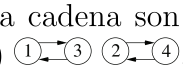
Podemos constatar que la aproximación es excelente; a 6 decimales la aproximación es exacta para $n > 10$. Con 20 personas, la probabilidad de que se forme una sola cadena es aproximadamente 13.6 %. Podemos afirmar que $P(A_n)$ será menor o igual a 0.05 cuando n sea mayor o igual a 55.

Observación La demostración por inducción de $\#A_{n+1} = n\#A_n$ nos provee también de un método para generar todos los intercambios de regalos donde se forma una cadena. Por ejemplo, para $n = 3$, existen dos intercambios de regalos donde se forma una sola cadena: $(2, 3, 1)$ y $(3, 1, 2)$. El diagrama  ilustra el segundo.

Al considerar a una cuarta persona, ésta puede ser insertada en 3 posiciones de la cadena sin romper la cadena de cuatro personas, como sigue:  , que corresponden a las permutaciones $(4, 1, 2, 3)$, $(3, 1, 4, 2)$ y $(3, 4, 2, 1)$ respectivamente. Es claro que la cadena $(2, 3, 1)$ producirá también tres cadenas que no se romperán al insertar a una cuarta persona:  . Así los 6 intercambios de regalos que producen una sola cadena con cuatro personas son: $(4, 1, 2, 3)$, $(3, 1, 4, 2)$, $(3, 4, 2, 1)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(2, 4, 1, 3)$ y $(4, 3, 1, 2)$. Por cada uno de los seis intercambios de regalos de cuatro personas que no rompen la cadena generaremos 4 nuevos al insertar a una quinta persona.

Pregunta 2 Para k natural ¿cuál es la probabilidad $p(k|n)$ de que en un intercambio de regalos en el que participan n personas se formen exactamente k cadenas?

Respuesta. Primero notamos que $p(1|n) = P(A_n)$ y que $p(k|n) = 0$ para $k > [n/2]$ (la parte entera de $n/2$), ya que dos es el menor número de personas que pueden formar una cadena. En consecuencia, $p(k|n)$ será positiva cuando $1 \leq k \leq [n/2]$.

A manera de ejemplo, para $n = 4$, existen nueve intercambios de regalos de los cuales seis no rompen la cadena y tres sí. Los tres intercambios que rompen la cadena son $(2, 1, 4, 3)$ que se representa como , $(3, 4, 1, 2)$ , y $(4, 3, 2, 1)$ . Por tanto, $p(1|4) = 2/3$, $p(2|4) = 1/3$ y $p(k|4) = 0$ para $k \geq 3$.

En la tabla 1 exhibimos $p(k|n)$ para $k = 1, 2, \ldots, 5$ y $n = 2, 3, \ldots, 10$.

Para esos valores de k y n observamos que la moda, el valor de k que tiene mayor probabilidad, es dos cuando $n \geq 6$. Esto es, si el

Tabla 1:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N(n)$	1	2	9	44	265	1,854	14,833	133,496	1,334,961
$p(1\|n)$	1.0000	1.0000	0.6667	0.5455	0.4528	0.3883	0.3398	0.3020	0.2718
$p(2\|n)$	0.0000	0.0000	0.3333	0.4545	0.4906	0.4984	0.4927	0.4811	0.4670
$p(3\|n)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0566	0.1133	0.1605	0.1980	0.2275
$p(4\|n)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0071	0.0189	0.0330
$p(5\|n)$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0007

número de personas varía entre 6 y 10, lo más probable es que se formen dos cadenas. También notamos que las distribuciones de probabilidades resultan asimétricas a la derecha. Con el fin de ilustrar cómo calculamos las probabilidades detallamos el caso particular $n = 9$ en la tabla 2.

Tabla 2:

Cadenas, k	Nmero de personas en cada cadena	Nmero de maneras de producir k cadenas con nmero dado de personas en cada cadena	Total	$p(k\|9)$
1	9	$8!$	40,320	0.30203
2	2 y 7	$9!\#A_2\#A_7/(2!7!)$ = 25,920	64,224	0.48108
	3 y 6	$9!\#A_3\#A_6/(3!6!)$ = 20,160		
	4 y 5	$9!\#A_4\#A_5/(4!5!)$ = 18,144		
3	2, 2 y 5	$9![\#A_2]^2\#A_5/(2!2!5!2!)$=9,072	26,432	0.19800
	2, 3 y 4	$9!\#A_2\#A_3\#A_4/(2!3!4!)$= 15,120		
	3, 3 y 3	$9![\#A_3]^3/(3!3!3!3!)$ = 2,240		
4	2, 2, 2 y 3	$9![\#A_2]^3\#A_3/(2!2!2!3!3!)$=2,520	2,520	0.01888
		Suma	**133,496**	**1**

La tabla 2 está basada en la observación de que para que se formen k cadenas debemos dividir a las n personas en k grupos ajenos y distintos de tal manera que en cada grupo no se rompa la cadena. Además, utiliza los siguientes dos resultados:

- El número de maneras en que r personas pueden formar un intercambio de regalos en el que no se rompa la cadena es $(r-1)!$. Esto es, $\#A_r = (r-1)!$,
- el Lema 1, que generaliza un resultado de Montmort muy conocido.

Lema 1 (Montmort.)

1. *Un conjunto de m elementos distintos puede ser dividido en g grupos distinguibles, $g \leq m$, de tal manera que el grupo i tenga r_i elementos donde $0 \leq r_i \leq m$ y $\sum_{i=1}^{g} r_i = m$, de*

$$M(r_1, \ldots, r_g; m) = \frac{m!}{r_1!r_2!\cdots r_g!}$$

*maneras distintas (*el coeficiente multinomial*).*

2. *Bajo las condiciones del inciso anterior, si no nos interesa hacer distinguibles a los grupos que tienen un mismo número de elementos entonces,*

$$M(s_1,\dots s_d;m)=\frac{m!}{\prod_{k=1}^{d}(s_k!)^{F_k}\prod_{j=1}^{d}F_j!}$$

donde $1\le d\le g$ *es el número de* r_k *que son distintas,* $s_1,s_2,\dots,s_d$ *son los valores distintos de las* r_k *y* $F_1,F_2,\dots,F_d$ *son el número de veces que se repite cada una de las* s_j *de tal manera que* $m=\sum_{j=1}^{d}F_js_j$ *y* $g=\sum_{j=1}^{d}F_j$.

Demostración: Demostraremos el primer inciso del lema y después presentaremos un esbozo de demostración del segundo. Para la primera parte, el número de maneras en las que podemos seleccionar los r_1 objetos del grupo 1 es $\binom{m}{r_1}$. Quedan $m-r_1$ objetos para ser asignados, así que para cada una de estas selecciones del primer grupo hay $\binom{m-r_1}{r_2}$ maneras de seleccionar los r_2 objetos del grupo 2. Por el principio de la multiplicación, el número de maneras en que podemos formar los primeros dos grupos es

$$\binom{m}{r_1}\binom{m-r_1}{r_2}=\frac{m!}{r_1!r_2!(m-r_1-r_2)!}.$$

Para cada una de estas selecciones del grupo 1 y 2 existen $\binom{m-r_1-r_2}{r_3}$ selecciones para el tercer grupo, de modo que hay

$$\binom{m}{r_1}\binom{m-r_1}{r_2}\binom{m-r_1-r_2}{r_3}=\frac{m!}{r_1!r_2!r_3!(m-r_1-r_2-r_3)!}$$

de formar los primeros tres grupos. Continuamos de esta manera hasta formar los primeros $g-1$ grupos, y encontramos que éstos pueden ser formados de

$$\binom{m}{r_1}\binom{m-r_1}{r_2}\cdots\binom{m-r_1-r_2-\cdots-r_{g-2}}{r_{g-1}}$$

maneras, y esta cantidad es igual a

$$\frac{m!}{r_1!r_2!\cdots r_{g-1}!(m-r_1-r_2-\cdots-r_{g-1})!}=\frac{m!}{r_1!r_2!\cdots r_{g-1}!(r_g)!},$$

pues $m=\sum_{k=1}^{g}r_k$. Sólo hay una manera de escoger los últimos r_g elementos del último grupo ($\binom{r_g}{r_g}$=1), así que esta última cantidad es la que buscábamos.

Ahora presentaremos un esbozo de la demostración de la segunda parte del lema. Para entender su dificultad presentamos un ejemplo: si $m = 4$, $g = 2$ y $r_1 = r_2 = 2$, el número de maneras de dividir los cuatro elementos en dos grupos de dos elementos cada uno es, de acuerdo al primer inciso del lema, $4!/(2!2!) = 6$. En la siguiente tabla enumeramos las maneras de dividir un conjunto de 4 elementos en dos grupos de dos elementos cada uno:

	Elementos grupo 1	Elementos grupo 2
1	1,2	3,4
2	1,3	2,4
3	1,4	2,3
4	2,3	1,4
5	2,4	1,3
6	3,4	1,2

En la primera parte del lema, las divisiones 1 y 6 son distintas. Eso quiere decir hacer los grupos distinguibles. Si queremos eliminar esos casos, esto es, si consideramos que es lo mismo asignar 1 y 2 al grupo 1 y 3 y 4 al grupo 2 que 3 y 4 al grupo 1 y 1 y 2 al grupo 2, debemos dividir a 6 entre el factorial del número de grupos $(6/2! = 3)$. De la misma manera, al dividir 9 elementos en tres grupos *distinguibles* cada uno con tres elementos, existen $9!/(3!3!3!)$ maneras distintas. Pero si consideramos a los grupos *indistinguibles* entonces debemos dividir $9!/(3!3!3!)$ entre $3!$. La situación se presenta cuando al menos dos de las r_i son iguales. Note el lector que si todas las r_k son distintas, entonces $d = g$, $R_i = s_i$ y $F_j = 1$ para toda j y obtenemos la fórmula de Montmort. Procedemos ahora con la demostración.

Si $d = 1$, el resultado es obvio ya que todos los grupos tienen el mismo número de elementos, y es claro que debemos dividir entre el factorial del número de grupos $(= F_1 = g)$. Si $d = 2$, tenemos F_1 grupos con s_1 elementos cada uno y F_2 grupos con s_2 elementos cada uno. Para eliminar la distinción de los grupos con el mismo número de elementos dividimos entre $F_1!F_2!$ de acuerdo al principio de la multiplicación. Haciendo inducción sobre d nos permite establecer el resultado. $\square$

En general, supongamos que tenemos un intercambio de regalos entre n personas que consiste de k cadenas con $2 \leq k \leq [n/2]$. Denotemos por $x_1, x_2, \ldots, x_k$ el número de personas en cada una de las k cadenas, donde $2 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \leq n - 2$ y $n = \sum_{j=1}^{k} x_j$. Supongamos que hay d x_i distintas, $1 \leq d \leq k$. Denotaremos a estas x_i distintas por $y_1, y_2, \ldots, y_d$. Tendremos:

- $y_1 < y_2 < \cdots < y_d$,

- $n = \sum_{\nu=1}^{d} y_\nu f_\nu$, donde f_ν es el número de cadenas con y_ν personas

y

- $\sum_{\nu=1}^{d} f_\nu = k$.

Por ejemplo, si $n = 9$ y $k = 3$ podemos escribir

1. $9 = 2 + 2 + 5 = 2(2) + 5$ por lo que $d = 2$, $y_1 = 2$, $f_1 = 2$, $y_2 = 5$, $f_2 = 1$ y $f_1 + f_2 = 3$.
2. $9 = 3 + 3 + 3$, por lo que $d = 1$, $y_1 = 3$, $f_1 = 3$.
3. $9 = 2 + 3 + 4$, por lo que $d = 3$, $y_1 = 2$, $f_1 = 2$, $y_2 = 3$, $f_2 = 1$, $y_3 = 4$, $f_3 = 1$ y $f_1 + f_2 + f_3 = 3$.

Definamos $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_d)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$, entonces $n = \langle \mathbf{f}, \mathbf{y} \rangle$ y $k = \langle \mathbf{f}, \mathbf{1} \rangle$, donde $\langle , \rangle$ significa el producto escalar euclidiano y $\mathbf{1}$ es el vector que tiene 1 en cada una de sus entradas.

Lema 2 *Bajo las condiciones dadas arriba, sea $N(k|\mathbf{y}, \mathbf{f}, d, n)$ el número de maneras de producir k cadenas de tal manera que haya f_j cadenas que no se rompen con y_j personas cada una, para $j = 1, \ldots, d$. Entonces*

$$N(k|\mathbf{y}, \mathbf{f}, d, n) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{d} (y_j!)^{f_j} \prod_{i=1}^{d} f_i!} \prod_{h=1}^{d} \# A_{y_h}^{f_h} = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{d} (f_j! y_j^{f_j})}.$$

Por ejemplo, si $n = 9$ y escribimos $n = 2 + 2 + 2 + 3$ (lo que significa que se forman cuatro cadenas; tres de dos personas y una de tres personas), tendremos

- $k = 4$,
- $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 2$ y $x_4 = 3$,
- $d = 2$,
- $\mathbf{y} = (2, 3) = (y_1, y_2)$,
- $\mathbf{f} = (3, 1) = (f_1, f_2)$ y
- $N(4|\mathbf{y}, \mathbf{f}, 2, 9) = \dfrac{9!}{3! 2^3 3} = 2520$.

Por tanto, existen 2,520 intercambios de regalos en los que se forman cuatro cadenas; tres de dos personas y una de tres personas.

Definamos ahora $N(k|n)$ como la suma de $N(k|\mathbf{y}, \mathbf{f}, d, n)$ sobre todas las descomposiciones de n en k sumandos donde cada sumando es mayor o igual a dos y menor o igual a $n-2$. Recordamos que $N(1|n) = (n-1)!$. Así, para $2 \leq k \leq [n/2]$,

$$N(k|n) = \sum_{(\mathbf{f},\mathbf{y},d)\in D} N(k|\mathbf{f}, \mathbf{y}, d, n),$$

donde la suma se realiza sobre $D = \{(\mathbf{f}, \mathbf{y}, d) | \langle \mathbf{f}, \mathbf{y} \rangle = n, \langle \mathbf{f}, \mathbf{1} \rangle = k\}$, y $N(k|n)$ es el número de maneras de producir k cadenas en un intercambio de regalos que involucra a n personas. La Tabla 2 muestra $N(1|9) = 40,320$, $N(2|9) = 64,224$, $N(3|9) = 26,432$ y $N(4|9) = 2,520$, y $N(k|9) = 0$ para $k > 4$. Además tenemos que

$$N(n) = \sum_{k=1}^{[n/2]} N(k|n). \tag{4}$$

La probabilidad se calcula mediante la fórmula

$$p(k|n) = \frac{N(k|n)}{N(n)}.$$

Observaciones

1. La igualdad (4) produce

$$n! \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} = N(1|n) + N(2|n) + \cdots + N([n/2]|n)$$

o equivalentemente

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} = \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{[n/2]} \sum_{\langle \mathbf{f},\mathbf{y}\rangle=n, \langle \mathbf{f},\mathbf{1}\rangle=k} \frac{1}{\prod_{j=1}^{d}(f_j! y_j^{f_j})}.$$

2. Para n grande resulta engorroso encontrar todas las descomposiciones de n en dos, tres, cuatro, etc. sumandos. En el apéndice demostramos una recursión para el número de distintas descomposiciones que proporciona también un método recursivo para calcular estas descomposiciones. Sin embargo, nos podemos deshacer

de la dificultad ya que la siguiente recursión, similar a una recursión de los números de Stirling (consulte la tercera referencia) se cumple

$$N(k|n+1) = n[N(k|n) + N(k-1|n-1)]. \qquad (5)$$

La fórmula (5) dice que el número de maneras de producir k cadenas en un intercambio de regalos entre $n+1$ personas se puede obtener como la suma de dos términos: El primero, $nN(k|n)$, es el número de maneras de insertar a la persona $n+1$ en cada una de las k cadenas de n personas sin producir que la persona $n+1$ se regale a si misma. El segundo término, $nN(k-1|n-1)$, representa el número de maneras en las que podemos generar una cadena adicional a un intercambio de regalos que tuvo $k-1$ cadenas con $n-1$ personas. Para generar una cadena adicional es necesario y suficiente que alguna de las personas $1, 2, \ldots n$ intercambie regalos con la persona $n+1$. Inicialmente las personas n y $n+1$ forman la cadena adicional, las demás cadenas se obtienen al intercambiar a la persona n con las personas $1, 2, \ldots, n-1$ en las k cadenas.

3. El lector puede verificar (5) con los datos de la Tabla 1 y extenderla tanto como quiera. También puede verificar que la siguiente recurrencia se cumple $N(n+1) = n[N(n) + N(n-1)]$ al utilizar la igualdad $(n+1)S(n+1) - nS(n) = S(n-1)$.

Pregunta 3 En un intercambio de regalos que involucra a n personas, ¿cuál es el valor esperado del número cadenas?

Respuesta. Definamos la variable aleatoria X_n como el número de cadenas en un intercambio de regalos entre n personas. Entonces, X_n puede tomar los valores $1, \ldots, [n/2]$ y $P(X_n = k) = p(k|n)$. En el siguiente lema encontramos una expresión para $E(X_n)$.

Lema 3 *Sea X_n la variable aleatoria que cuenta el número de cadenas en un intercambio de regalos donde participan n personas. Entonces,*

$$E(X_n) = \frac{1}{S(n)} \sum_{k=2}^{n} \frac{S(n-k)}{k} \qquad (6)$$

donde $S(n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$, como se definió antes.

Demostración. Definamos para $k = 2, \ldots, n$, la variable aleatoria $Y_{k,n}$ como el número de cadenas con k personas en un intercambio de regalos. Esto es,

$$Y_{k,n} : \Omega_n \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

de tal manera que si $\omega \in \Omega_n$ es un intercambio de regalos involucrando n personas, entonces $Y_{n,k}(\omega)$ = número de cadenas en ω con k personas. Por definición de $Y_{k,n}$ tenemos que

$$X_n(\omega) = \sum_{k=2}^{n} Y_{k,n}(\omega). \tag{7}$$

Por ejemplo, si $n = 7$ y $\omega_0 = (3, 1, 2, 5, 4, 7, 6)$ podemos visualizar el intercambio de regalos como $1 \to 3 \to 2$ $5 \rightleftarrows 4$ $7 \rightleftarrows 6$, y es claro que $X_7(\omega_0) = 3$ ya que hay tres cadenas. Pero por otra parte, $Y_{2,7}(\omega_0) = 2$, $Y_{3,7}(\omega_0) = 1$ y $Y_{k,7}(\omega_0) = 0$ cuando $4 \leq k \leq 7$ y constatamos que (7) es verdadera en este caso particular. Para $2 \leq k \leq n$, definamos $\Gamma_{k,n}$ como el conjunto de todas las cadenas de k personas que no se rompen que se pueden formar a partir de un conjunto de n personas. Entonces,

$$\#\Gamma_{k,n} = \binom{n}{k}(k-1)! = \frac{n!}{(n-k)!k}$$

para $2 \leq k \leq n$, ya que existen $\binom{n}{k}$ maneras de escoger a las k personas que pertenecerán a las cadenas y existen $(k-1)!$ maneras de generar una cadena de tamaño k sin que se rompa. Sea g un elemento arbitrario de $\Gamma_{k,n}$. Definimos la variable aleatoria indicadora de g como

$$I_g(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \text{ está en } \omega \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que podemos expresar a $Y_{k,n}$ en términos de las variables aleatorias indicadoras definidas arriba, y que para toda $\omega \in \Omega_n$,

$$Y_{k,n}(\omega) = \sum_{g \in \Gamma_{k,n}} I_g(\omega),$$

por tanto,

$$\mathrm{E}(Y_{k,n}) = \sum_{g \in \Gamma_{k,n}} \mathrm{E}(I_g) = \sum_{g \in \Gamma_{k,n}} P(I_g = 1).$$

Pero si g está en $\omega \in \Omega_n$, podemos completar el intercambio de regalos a n personas de tantas maneras como elementos tenga Ω_{n-k}. Así que

$$P(I_g = 1) = \frac{\#\Omega_{n-k}}{\#\Omega_n} = \frac{(n-k)!S(n-k)}{n!S(n)}$$

que no depende de g. En consecuencia

$$\mathrm{E}(Y_{k,n}) = \frac{(n-k)!S(n-k)}{n!S(n)} \frac{n!}{(n-k)!k} = \frac{S(n-k)}{kS(n)}$$

y finalmente

$$\mathrm{E}(X_n) = \frac{1}{S(n)} \sum_{k=2}^{n} \frac{S(n-k)}{k}.\square$$

$\square$

Esta fórmula puede ser verificada numéricamente a partir de los valores de la Tabla 1.

Observaciones

1. El Lema 3 requiere que asignemos valores a $\#\Omega_0$ y $\#\Omega_1$ que en el contexto del problema no tienen significado. Sin embargo, al utilizar la recurrencia sobre $N(n)$ podemos establecer que: $\#\Omega_0 = 1$ y $\#\Omega_1 = 0$.

2. En el lema 3 también mostramos que $\mathrm{E}(Y_{k,n}) = \frac{S(n-k)}{kS(n)}$ el cual se comporta para n grande y k fija como $1/k$. De hecho, para $k < n$ tendremos que

$$\begin{aligned}\left| E(Y_{k,n}) - \frac{1}{k} \right| &= \frac{1}{kS(n)} \left| \sum_{\nu=n-k+1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \right| \\ &\leq \frac{1}{S(n)k(n-k+1)(n-k+1)!}\end{aligned}$$

y la cota puede hacerse pequeña siempre y cuando n sea grande. Así, si $k = n-2$ con n grande, la cota será aproximadamente $e/[4(n-2)]$, que es menor a $1/(n-2)$.

Pregunta 4 ¿Podemos decir algo acerca de los otros momentos de X_n?

Respuesta. Contestamos la pregunta al encontrar recurrencias de los momentos. De hecho, la recurrencia (5) nos permite encontrar otras recurrencias que concentramos en el siguiente lema.

Lema 4 *Sea* $\alpha_n = \dfrac{nN(n)}{N(n+1)}$. *Entonces*

1. $p(k|n+1) = \alpha_n p(k|n) + (1-\alpha_n)p(k-1|n-1)$.

2. *Si* $P_n(t) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X_n = x)t^x$ *es la función generatriz de probabilidades (fgp) de* X_n,

$$P_{n+1}(t) = \alpha_n P_n(t) + (1-\alpha_n)tP_{n-1}(t)$$

3. *Si $P_n^{(k)}(t)$ es la derivada de orden k de $P_n(t)$ entonces*

$$P_{n+1}^{(k)}(t) = \alpha_n P_n^{(k)}(t) + (1-\alpha_n)tP_{n-1}^{(k)}(t) + kP_{n-1}^{(k-1)}(t).$$

4. *Si $\mu_{n,[k]}$ es el momento factorial de orden k de X_n entonces*

$$\mu_{n+1,[k]} = \alpha_n \mu_{n,[k]} + (1-\alpha_n)\left\{\mu_{n-1,[k]} + k\mu_{n-1,[k-1]}\right\}$$

Estos resultados son consecuencia directa de la recurrencia (5) y de las definiciones de los conceptos. Su demostración la dejamos como un ejercicio para el lector. Nótese que del cuarto inciso del lema, si $\mathrm{E}(S_n) = \mu_n$ y $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma_n^2$, tenemos, para $n \geq 3$, que

$$\mu_{n+1} = \alpha_n \mu_n + (1-\alpha_n)[\mu_{n-1} + 1]$$

y

$$\sigma_{n+1}^2 = \alpha_n \sigma_n^2 + (1-\alpha_n)\sigma_{n-1}^2 + \alpha_n(1-\alpha_n)[\mu_n - \mu_{n-1} - 1]^2.$$

Observaciones

1. Se puede demostrar que $\alpha_n \in (0,1)$ (lo dejamos como ejercicio para el lector: conviene usar las relaciones de recurrencia para $N(n)$ que hemos mostrado arriba). Así, para n fija la probabilidad $p(k|n+1)$ es una *combinación convexa* de $p(k|n)$ y $p(k-1|n-1)$.

2. También es fácil demostrar que $\{\alpha_n\}$ es una sucesión creciente, acotada y que converge a uno cuando n tiende a infinito. Además,

$$\alpha_n = \frac{n}{n+1+\frac{(-1)^{n+1}}{N(n)}} \approx \frac{n}{n+1}$$

   (el lector puede verificar que para n mayor o igual a 8 la aproximación es excelente) las recurrencias pueden simplificarse. Nos damos cuenta que conforme n crece tanto la media como la varianza de X_{n+1} dependen cada vez más de la media y la varianza de X_n. La recurrencia sobre la media nos permite afirmar que

$$\mu_{n+1} - \mu_n = (1-\alpha_n)[1 - (\mu_n - \mu_{n-1})]$$

   y al utilizar la aproximación de $\alpha_n \approx n/(n+1)$, obtenemos que $\mu_{n+1} - \mu_n \approx [1 - (\mu_n - \mu_{n-1})]/(n+1)$. Esta aproximación nos permite evaluar μ_n con alta precisión para valores grandes de n.

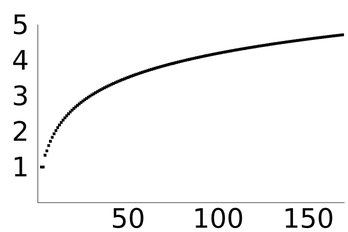
En la tabla siguiente presentamos valores de $\mathrm{E}(X_n)$, $\mathrm{Var}(X_n)$ y el coeficiente de variación de X_n (denotado por CV_n) para algunos valores de n.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
μ_n	1	1	1.33	1.45	1.60	1.72	1.83	1.93	1.02	1.11	1.18	1.25	1.32	1.38
σ_n^2	0	0	0.22	0.25	0.35	0.43	0.50	0.57	0.64	0.70	076	0.81	0.87	0.92
CV_n			1.41	1.10	0.98	0.90	0.85	0.81	0.78	0.76	0.74	0.72	0.71	0.69

Esta tabla sugiere que:

- La sucesión de las medias es creciente y que la tasa de crecimiento es baja.
- La sucesión de las varianzas es creciente y que la tasa de crecimiento es baja.
- Para cada n la media es mayor a la varianza.
- Que el coeficiente de variación es una función decreciente de n.

En el siguiente lema mostramos que en efecto la sucesión de las medias es creciente. La figura muestra μ_n hasta $n = 150$, sugiere además que μ_n se comporta como una función logarítmica.



Lema 5 *La sucesión* $\{\mu_n\}_{n\geq 3}$ *es creciente.*

Si definimos $u_{\nu+1} = \mu_{\nu+1} - \mu_\nu$ para ν natural obtenemos que $u_{n+1} = (1-\alpha_n)(1-u_n)$. Ahora, $u_3 = 0$, $u_4 = 1-\alpha_3 \in (0,1)$, $u_5 = (1-\alpha_4)\alpha_3 \in (0,1)$, etc. Una inducción sobre n nos permite mostrar que $0 < u_n < 1$ para toda $n \geq 3$. En consecuencia, la sucesión de las medias $\{\mu_n\}_{n\geq 3}$ es creciente. $\square$

Pregunta 5 ¿Cómo se comporta μ_n para n grande?

Respuesta. Está en el siguiente lema, donde recordamos que la constante de Euler está dada por

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} - \log n\right) \approx 0.577215665$$

Lema 6 *Para n grande, $\mu_n = E(X_n)$ se comporta como $\log n + \gamma - 1$, donde γ es la constante de Euler.*

Demostración. Partimos de la igualdad (6). Por definición $\exp(-1) = S(n-k)+R(n-k)$ para toda n y k enteros no negativos tales que $k \leq n$. Por tanto, al sustituir $S(n-k)$ por $\exp(-1) - R(n-k)$ obtenemos

$$\mu_n = -\frac{e^{-1}}{S(n)} + \frac{e^{-1}}{S(n)} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \frac{1}{S(n)} \sum_{k=2}^{n} \frac{R(n-k)}{k}.$$

El valor absoluto $|\mu_n - \log n - \gamma + 1|$ es menor o igual a

$$\left|1 - \frac{e^{-1}}{S(n)}\right| + \left|\frac{e^{-1}}{S(n)} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \log(n) - \gamma\right| + \frac{1}{S(n)} \left|\sum_{k=2}^{n} \frac{R(n-k)}{k}\right|.$$

Pero como ya vimos, $\exp(-1)$ es una excelente aproximación de $S(n)$ si n es grande y $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}$ es aproximada por $\log(n) + \gamma$ si n es suficientemente grande. En consecuencia, la demostración quedará terminada si podemos mostrar que

$$\sum_{k=2}^{n} \left|\frac{R(n-k)}{k}\right| \tag{8}$$

puede hacerse tan pequeña como queramos si n es grande. Definimos

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{R(n-k)}{k} = \frac{R(0)}{n} + \frac{R(1)}{n-1} + \cdots + \frac{R(n-3)}{3} + \frac{R(n-2)}{2}.$$

Como vimos en el argumento para demostrar la aproximación (3),

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

De manera que para demostrar que (8) tiende a cero cuando n tiende a infinito, basta demostrar que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(n+1-k)!}$$

tiende a cero cuando n tiende a infinito. Si escogemos m tal que $2m \leq$

$n \leq 2m+1$ (o $m = \lfloor n/2 \rfloor$), entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k(n+1-k)!} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k(n+1-k)!} \\
&\leq \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{(n+1-k)!} + \frac{1}{m+1} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{(n+1-k)!} \\
&\leq \frac{m}{(n+1-m)!} + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{n-m} \frac{1}{k!}.
\end{aligned}$$

El primer sumando podemos acotarlo por $\dfrac{m}{(m+1)!}$, que converge a cero cuando n tiende a infinito. Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \infty$, el segundo término igualmente converge a cero si n tiende a infinito.$\square$

Apéndice En este apéndice demostramos la recurrencia mencionada en el texto relacionada con un tipo de descomposiciones de enteros. La demostración ilustra una técnica de conteo muy útil para este tipo de problemas.

Lema 7 *Sean k y n números naturales con $n > 2k$. Si $Q(k,n)$ es el número de maneras de escribir n como la suma de k números naturales $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k$ con $x_j \geq 2$ para toda j, entonces se satisface la recurrencia*

$$Q(k,n) = Q(k-1, n-2) + Q(k, n-k)$$

donde $Q(2,n) = [\frac{n}{2}] - 1$ para $n > 2k$.

Demostración: Definimos los conjuntos A, B y C como

$$\begin{aligned}
A_{k,n} &= \left\{ (x_1, \cdots, x_k) : 2 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k, n = \sum_{j=1}^{k} x_j \right\} \\
B_{k,n} &= \left\{ (x_1, \cdots, x_k) : 2 = x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k, n = \sum_{j=1}^{k} x_j \right\} \\
C_{k,n} &= \left\{ (x_1, \cdots, x_k) : 3 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k, n = \sum_{j=1}^{k} x_j \right\}.
\end{aligned}$$

Es claro que $A_{k,n} = B_{k,n} \cup C_{k,n}$, y $B_{k,n} \cap C_{k,n} = \emptyset$. Cualquier solución $(x_1, \ldots, x_k)$ en B satisface $n-2 = \sum_{j=2}^{k} x_j$, de manera que $(x_2, \ldots, x_k) \in A_{k-1,n-2}$. Recíprocamente, si $(y_1, \ldots, y_{k-1}) \in A_{k-1,n-2}$ entonces $(2, y_1, y_2, \ldots y_{k-1}) \in B_{k,n}$. Así, los elementos de $A_{k-1,n-2}$ y $B_{k,n}$ están en correspondencia uno a uno y por tanto $\#A_{k-1,n-2} = \#B_{k,n}$.

Por otra parte, si $(x_1, \ldots, x_k) \in C_{k,n}$, tenemos que $\sum_{j=1}^{k} x_j$ pero $3 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_k$. En consecuencia, $\sum_{j=1}^{k}(x_j - 1) = n - k$ y esto significa que $(x_1 - 1, \ldots, x_k - 1) \in A_{k,n-k}$ ya que $x_j - 1 \geq 2$ para toda j. Recíprocamente, si $(y_1, \ldots, y_k) \in A_{k,n-k}$ entonces $\sum_{j=1}^{k} y_j = n - k$, por lo que $\sum_{j=1}^{k}(y_j + 1) = n$, y esto implica que $(y_1 + 1, \ldots, y_k + 1) \in C_{k,n}$ ya que $y_j + 1 \geq 3$ para toda j. Así que $\#C_{k,n} = \#A_{k,n-k}$. Concluimos entonces que

$$Q(k,n) = \#A_{k,n} = \#B_{k,n} + \#C_{k,n} = \#A_{k-1,n-2} + \#A_{k,n-k},$$

que termina la demostración del lema.$\square$

Referencias

- MacGuire, K., Mackiw, G. and Morrell, C. (1998), *The Secret Santa Problem*, The Mathematical Gazette, pp. 467-472

- Hernández, F. M. (2003) *Cálculo de Probabilidades*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana.

- Weisstein, Eric W. *Stirling Numbers of the Second Kind.* De Mathworld-A Wolfram, Web Resource:
  `http://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheSecondKind.html`
  (Mayo, 2007)