Miscelánea Matemática 47 (2008) 55–62 SMM

Ecuaciones diferenciales vía secciones cónicas y algo de física

Alfonso García González

Facultad de Matemáticas

Universidad Autónoma de Yucatán

Edwin Meneses Rodríguez

Facultad de Matemáticas

Universidad Autónoma de Yucatán

Eric Ávila Vales

Facultad de Matemáticas

Universidad Autónoma de Yucatán

1. Introducción

Al estudiar ecuaciones diferenciales ordinarias tenemos que considerar aspectos cualitativos, analítico-algebraicos así como sus aplicaciones a fin de tener una visión global de ellas. En este trabajo consideramos los aspectos anteriores para una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias relacionadas con nuestras conocidas, secciones cónicas, con la participación de ciertas propiedades ópticas que las secciones cónicas cumplen.

A cada una de las secciones cónicas le asociaremos una ecuación diferencial, la cual tiene como solución a la sección cónica con la que iniciamos y esto lo lograremos haciendo algunas consideraciones acerca de la refracción y de la reflexión derivadas de la cinemática. A esta ecuación diferencial la tratamos cualitativa y analíticamente. En este trabajo presentamos el caso de la elipse y de la hipérbola, el caso de la parábola se pueden revisar en [3] y en [6] y de una forma vectorial en [4]. También se puede ver [7] para una familia de elipses. En [5] se puede ver el caso de la elipse y la hipérbola a través de una motivación geométrica.

2. Propiedades ópticas y cinemática (ver [1] y [2])

Las secciones cónicas: la parábola, la elipse y la hipérbola, poseen ciertas propiedades ópticas que podemos demostrar a través de varios caminos, en esta sección las demostraremos vía ciertas consideraciones de la cinemática y, mostraremos además, que éstas cónicas son las únicas que poseen estas propiedades. Las figuras (1), (2) y (3) ilustrarían las propiedades ópticas de la elipse, la hipérbola y la parábola respectivamente si $\alpha_1 = \alpha_2$ y esto se probará en esta sección. En el caso particular de la elipse, demostrar que $\alpha_1 = \alpha_2$ significa que si un punto se mueve sobre una elipse entonces los ángulos que forman la tangente en dicho punto con los radios vectores que van desde los focos hasta el punto de la elipse son iguales, por lo tanto, de acuerdo a la ley de la reflexión, si un rayo parte de uno de los focos y es reflejado en la superficie de la elipse, el rayo reflejado pasará por el otro foco.

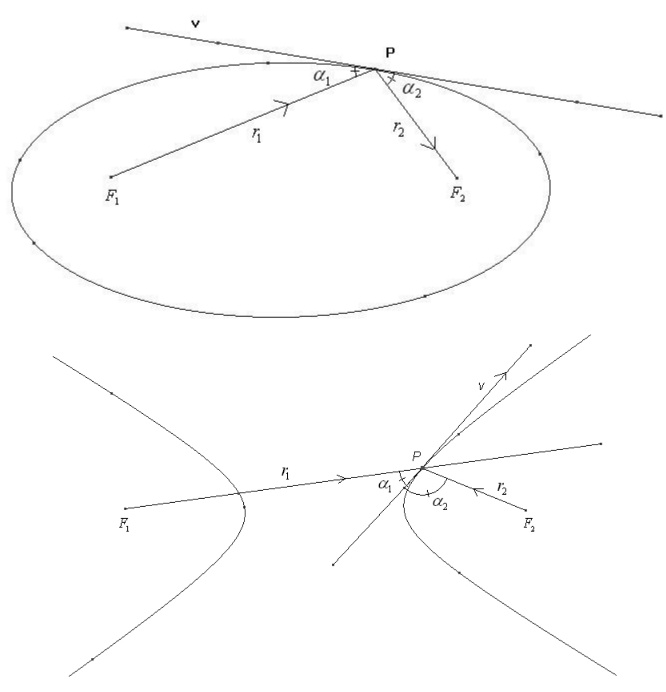

Figura 1: En la elipse y en la hipérbola, un rayo que pasa por un foco cuando se refleja pasa por el otro foco.

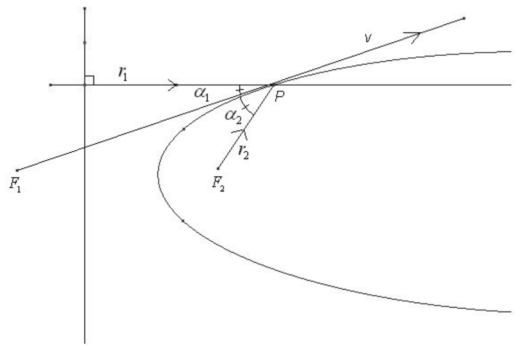

Figura 2: Un rayo que pasa por el foco se refleja perpendicularmente a la directriz y paralelo al eje de la Parábola.

A continuación probaremos que $\alpha_1 = \alpha_2$ haciendo algunas consideraciones de la cinemática ya que es de caracter esencial demostrar que en las figuras (1), (2) y (3) se cumplen las propiedades ópticas para lograr nuestro objetivo.

Para ello, consideremos un punto P moviéndose sobre la cónica a una velocidad constante denotada como v. Las propiedades geométricas que caracterizan a las cónicas de acuerdo a su definición son las siguientes:

La distancia de un punto P al foco F_1 que denotaremos como r_1 (ver figuras 1, 2 y 3) sumado a la distancia de ese mismo punto al foco F_2 denotada como r_2 (ver figuras 1, 2 y 3) en una elipse es una constante, es decir,

$$r_1 + r_2 = k$$

La diferencia de la distancia de un punto P al foco F_1 con la distancia del mismo punto al foco F_2 de una hipérbola es una constante, es decir,

$$|r_1 - r_2| = k$$

La distancia de un punto P a la directriz, digamos r_1, es igual a la distancia del mismo punto al foco, denotada por r_2 en una parábola, es decir,

$$r_1 = r_2$$

Si derivamos las expresiones anteriores respecto al tiempo obtendremos lo siguiente:

$$\frac{dr_1}{dt} + \frac{dr_2}{dt} = 0$$
$$\frac{dr_1}{dt} - \frac{dr_2}{dt} = 0$$
$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{dr_2}{dt}$$

Para la elipse, hipérbola y parábola respectivamente. Pero sabemos que $\frac{dr_1}{dt} = v_1$ y $\frac{dr_2}{dt} = v_2$, por lo tanto lo obtenido equivale a

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= 0 \\ v_1 - v_2 &= 0 \\ v_1 &= v_2, \end{aligned}$$

para la elipse, hipérbola y parábola respectivamente.

Además, v_1 y v_2 son las proyecciones orientadas de v sobre r_1 y r_2 y así,

$$\text{proy}\frac{v}{r_1} = v \cos \alpha,$$

donde α es el ángulo entre los dos vectores.

Considerando primero a la elipse podemos observar de la figura (1) que el ángulo entre v y r_1 es $\pi - \alpha_1$. Entonces,

$$\text{proy}\frac{v}{r_1} = v_1 = -v \cos \alpha$$

El ángulo entre v y r_2 es α_2, entonces,

$$\text{proy}\frac{v}{r_2} = v_2 = v \cos \alpha_2$$

y sabemos además que

$$v_1 = -v_2$$

entonces

$$-v \cos(\alpha_1) = -(v \cos \alpha_2)$$

de donde vemos que $\alpha_1 = \alpha_2$ para la elipse.

De manera similar obtenemos que $\alpha_1 = \alpha_2$ para la hipérbola y la parábola.

3. Elipses e hipérbolas (ver [6])

El objetivo de esta sección es describir a la elipse y a la hipérbola mediante Ecuaciones Diferenciales y para lograrlo consideramos la propiedad óptica que poseen esas cónicas: la refracción, es decir, si tenemos una curva tal que un rayo de luz sale de un punto y es refractado por una superficie, de tal manera que la prolongación del rayo refractado pasa por otro punto para cualquiera que sea el punto de contacto con la curva, entonces esa curva es una cónica, en este caso, una elipse o una hipérbola. De manera que considerando la propiedad de refracción en la elipse y en la hipérbola encontraremos una ecuación diferencial que describa a estas mismas cónicas. Iniciaremos nuestro proceso usando la Ley de Snell de la refracción que en términos del ángulo de incidencia A y el ángulo de refracción B nos dice que

$$\frac{v_1}{\text{sen } A} = \frac{v_2}{\text{sen } B}$$

o bien,

$$\text{sen } A = \frac{v_1}{v_2}\text{sen } B$$

en donde v denota a la velocidad constante a la que se mueve un punto P sobre la cónica y v_1 y v_2 son las proyecciones orientadas de v sobre r_1 y r_2, respectivamente y además, $\frac{dr_1}{dt} = v_1$ y $\frac{dr_2}{dt} = v_2$ (misma notación que en la sección anterior).

Hagamos $k = \frac{v_1}{v_2}$, entonces

$$\text{sen } A = k\text{sen } B.$$

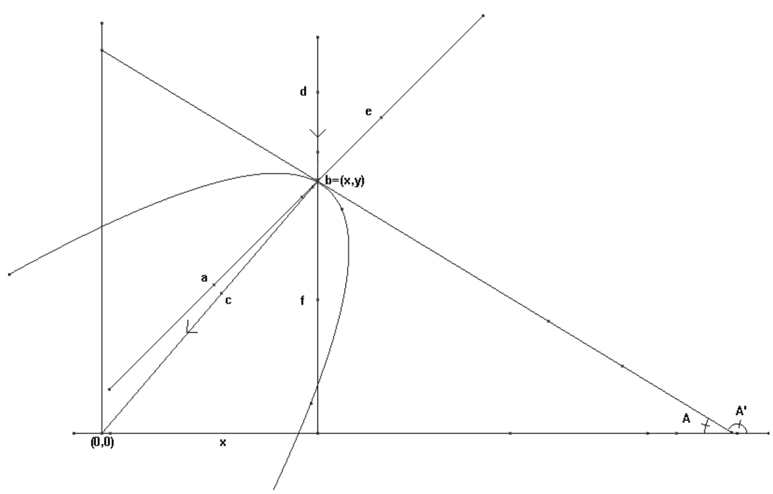

Figura 3:

Observando la figura (4) asociaremos ciertas literales a los ángulos con los que trabajaremos.

$$\begin{aligned} A &= \angle dbe \\ B &= \angle abc \\ C &= \angle cbf \end{aligned}$$

Para convertir sen $A = k$sen B en términos de las variables x, y y de la derivada de y respecto a x consideraremos ciertas relaciones que observamos en la figura (4) que $C = A - B \Rightarrow B = A - C$

Sustituimos el valor hallado de B en sen $A = k$sen B para obtener que sen $A = k$sen$(A - C)$ o bien, $1 = k(\cos C - \frac{\text{sen } C}{\tan A})$.

Además, si el punto b (ver figura 4) tiene coordenadas (x, y), entonces, encontramos las siguientes relaciones:

$$\text{sen } C = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos C = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Entonces, $y\prime = \tan A$.

Sustituimos los resultados anteriores en $1 = k(\cos C - \frac{\text{sen } C}{\tan A})$ y desarrollamos algebraicamente para despejar $y\prime$ obteniendo la siguiente expresión:

$$y' = \frac{kx}{\sqrt{x^2 + y^2} - ky}$$

Esta es la ecuación diferencial asociada a la elipse e hipérbola. ¿Cuál es el campo direccional de esta ecuación diferencial? Usando Dfield5 de MATLAB con $k = 10$ y $k = -10$ obtenemos elipses e hipérbolas.

Procederemos a resolver analíticamente la ecuación (1).

Hacemos el siguiente cambio de variable

$$z = \frac{y}{x}$$

Obtenemos

$$\left(\frac{\sqrt{1 + z^2} - kz}{k(1 + z^2) - z\sqrt{1 + z^2}}\right) dz = \frac{dx}{x}$$

Integraremos usando el siguiente cambio de variable

$$z = \tan\theta$$

Tenemos que

$$\int \left(\frac{\sec^2\theta - k\tan\theta\sec\theta}{k\sec\theta - \tan\theta}\right) d\theta = \int \frac{dx}{x}$$

Hagamos que

$$u = k\sec\theta - \tan\theta$$

Entonces

$$\int \frac{-du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

Así,

$$-\log u = \log x \quad + c$$

Como c es una constante arbitraria entonces obtendremos $u = \frac{c}{x}$. Sustituyendo regresivamente los cambios de variable realizados en la ecuación anterior nos producirá la siguiente ecuación:

$$k^2x^2 + \left(k^2 - 1\right)\left(y^2 - \frac{2cy}{k^2-1}\right) = c^2$$

Sumando $\frac{c^2}{k^2-1}$ a ambos lados de la expresión, obtenemos:

$$k^2x^2 + \left(k^2 - 1\right)\left(y^2 - \left(\frac{c}{k^2-1}\right)\right)^2 = \frac{k^2c^2}{k^2-1}$$

Ahora para simplificar esta ecuación haremos los siguientes cambios

$$D = k^2$$

$$E = k^2 - 1$$

$$F = \frac{c}{k^2-1}$$

$$G = \frac{k^2c^2}{k^2-1}$$

con lo que finalmente nuestra ecuación toma la siguiente forma

$$Dx^2 + E\left(y - F\right)^2 = G^2$$

De aquí vemos que si $E > 0$ ó $k > 1$ la ecuación describe a una elipse pero si $E < 0$ ó $k < 1$ la ecuación describe una hipérbola.

4. Conclusión

Las ecuaciones diferenciales juegan un papel importante en la ciencia y la tecnología, son herramientas fundamentales para representar muchos fenómenos que aparecen en la naturaleza. Consideramos que este trabajo contribuye a la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en el sentido de que los estudiantes aprendan a manejarlas considerando los aspectos cualitativos, cuantitativos y sus aplicaciones.

Referencias

[1] Criado, C. y Alamo, N. Optical Properties of the Conics Derived from an Elementary Kinematic Consideration, The Physics Teacher, 42, 2004.

[2] Sztrajman, J. y Rela, A. Optical Property of the Ellipse Derived from Energy Conservation, The Physics Teacher, 41, 2003.

[3] Munasinghe, R. Using Differential Equations to Describe Conic Sections, The College Mathematics Journal, 33 (2), 2002.

[4] De Young, Gary W. Exploring Reflection: Designing Light Reflectors for Uniform Illumination, Siam, 42, 2000.

[5] Bosch Giral, Carlos e Itza, Benjamin. Un Problema de Dobleces, Miscelánea Matemática, 22, 1995.

[6] Thompson, Richard y Mueller, Bill. Discovering Differential Equations in Optics, The College Mathematics Journal, 28, 1997.

[7] Garibay, Fernando y Vera Mendoza, Rigoberto. Una familia de Elipses, Miscelánea Matemática, 38, 2003.