Miscelánea Matemática **57** (2013) 103–117 SMM

Grados de ciclicidad de los operadores de Cesàro-Hardy

F. Galaz-Fontes
CIMAT
galaz@cimat.mx

R. W. Ruiz-Aguilar
CIMAT
rowenrva@cimat.mx

Introducción

Sea $\mathcal{S}$ el espacio vectorial formado por las sucesiones $\{a_n\} \subset \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} := \mathbb{C}$ y el índice n varía en $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. El *operador de Cesàro* es el operador C que resulta al asignar a cada sucesión de números reales o complejos, la sucesión formada por sus promedios. Así, dada una sucesión $s := \{a_n\} \in \mathcal{S}$, el n-ésimo término de la sucesión Cs es

$$(Cs)_n := \frac{a_0 + \ldots + a_n}{n+1}. \tag{1}$$

Notemos que C es un *operador lineal*, es decir, si s, σ son sucesiones y λ es un escalar, entonces $C(s+\sigma) = C(s) + C(\sigma)$ y $C(\lambda s) = \lambda C(s)$.

Si s es una sucesión acotada entonces la sucesión Cs también lo es. Cuando s es convergente, entonces Cs también es convergente y tiene igual límite que s. Estas propiedades del operador de Cesàro son bien conocidas y su prueba es sencilla, como lo veremos en la proposición 4.

Las sucesiones de promedios fueron estudiadas desde 1821 por Augustin Louis Cauchy (1789–1857), quien demostró que si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es una serie que converge a b, y $\{a_n\}$ es la sucesión de sus sumas parciales, se cumple entonces que $\frac{a_0+\cdots+a_n}{n+1} \to b$ [**1**, p. 102]. Sin embargo, fue Ernesto Cesàro (1859–1906) quien en 1890 les dio relevancia al utilizarlas como punto de partida en su estudio de las series divergentes [**1**, p. 102] y donde la segunda de las propiedades de C que antes mencionamos resulta básica.

Denotemos por ℓ^∞ el espacio formado por las sucesiones acotadas. En ℓ^∞ hay diversos subespacios que son de interés. Además de ℓ^∞ dos de ellos ya aparecieron en relación al operador de Cesàro y son el que consiste de las sucesiones convergentes, el cual se denotará por c, y el constituido por las sucesiones convergentes a cero, el cual se indicará por c_0. Dado $p \in [1, \infty)$, también consideraremos el espacio ℓ^p, cuyos elementos son las sucesiones $s := \{a_n\}$ que son p-sumables, esto es, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p < \infty$.

Un subconjunto $X \subset \mathcal{S}$ es *invariante bajo una función* $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, o T*-invariante*, si $T(X) \subset X$, es decir si $T(s) \in X$ siempre que $s \in X$.

Con la terminología anterior, las propiedades del operador de Cesàro que mencionamos inicialmente (véase la proposición 4) indican simplemente que si $X = \ell^\infty$, $X = c$ o $X = c_0$, entonces X es invariante bajo C. Naturalmente, surge ahora la cuestión de determinar si cada espacio ℓ^p es invariante bajo C.

Ejemplo 1. *Denotemos por* e_0 *la sucesión cuyo primer término es 1 y todos los demás son 0. Entonces* $C\mathrm{e}_0 = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$. *Ya que* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$, *concluimos que* $C\mathrm{e}_0 \notin \ell^1$. *Puesto que* $\mathrm{e}_0 \in \ell^1$, *esto muestra que el espacio* ℓ^1 *no es invariante bajo el operador de Cesàro.*

El caso previo resulta ser excepcional pues en 1920 Godfrey Harold Hardy (1877–1947) demostró que, para $1 < p < \infty$, el espacio ℓ^p es invariante bajo el operador de Cesàro [**5**, p. 240]. Para ello estableció una desigualdad, que hoy lleva su nombre, y que probaremos en la sección 1. La prueba es sencilla de seguir, aunque requiere conocer algunos resultados auxiliares.

El *operador de Hardy* H se obtiene al considerar en (1) en lugar de la suma la integral (de Lebesgue) y cambiar las sucesiones por funciones *localmente integrables*, esto es, funciones que son integrables en cada intervalo $(0, x)$ donde $x \in I$, siendo $I = (0, 1)$ o $I = (0, \infty)$. Esto permite definir

$$Hf(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(s)ds, \ \forall\, x \in I. \tag{2}$$

Así, el operador de Hardy es la versión continua del operador de Cesàro y como era de esperarse, tiene propiedades similares.

Si bien hasta este punto nos hemos referido a los conjuntos ℓ^∞, c, c_0 y ℓ^p, $1 \le p < \infty$, simplemente como espacios (vectoriales), éstos tienen otras propiedades que resultan fundamentales para analizar las cuestiones que estamos tratando y que quedan comprendidas dentro del concepto de espacio de Banach.

Un *espacio de Banach* X es un espacio vectorial provisto de una norma, $\|\cdot\|$, con la propiedad de que cualquier sucesión de Cauchy $\{x_n\} \subset X$ es convergente. En este caso, a partir de su norma quedan definidos conceptos como conjunto cerrado, cerradura y continuidad.

Ejemplo 2. *Observemos que* $\ell^\infty := \{s \in \mathcal{S} : \|s\|_\infty < \infty\}$, *donde*

$$\|s\|_\infty := \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}_0\}, \quad s := \{a_n\}.$$

La función $\|\cdot\|_\infty$ *resulta ser una norma en* ℓ^∞, *llamada* norma del supremo, *y con ella* ℓ^∞ *es un espacio de Banach [**8**, §1.5].*

Los espacios c *y* c_0 *son subconjuntos cerrados en* ℓ^∞. *Lo cual implica que, con la norma del supremo, tanto* c *como* c_0 *también son espacios de Banach.*

Ejemplo 3. *Dado* $p \in [1, \infty)$, *observemos que el espacio* ℓ^p *consiste de aquellas sucesiones* $s := \{a_n\}$ *tales que*

$$\|s\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

La función $\|\cdot\|_p$ *resulta ser una norma en* ℓ^p, *y con ella* ℓ^p *es un espacio de Banach [**8**, §1.5].*

Sea X un espacio de Banach. Si $T : X \to X$ es un operador lineal se acostumbra escribir simplemente Tx en lugar de $T(x)$. Por otra parte, su continuidad equivale a que sea *acotado* [**8**, §2.7], esto es,

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} < \infty.$$

Sean X un espacio de Banach y $T : X \to X$ un operador lineal continuo. La *órbita bajo* T de un punto $x \in X$ es el conjunto

$$\mathrm{Orb}(x, T) := \{T^n x : \ n \in \mathbb{N}_0\}. \tag{3}$$

Las órbitas correspondientes a T están íntimamente relacionadas con la existencia de conjuntos o subespacios T-invariantes. Esto motiva las propiedades de hiperciclicidad, superciclicidad o ciclicidad que el operador T puede tener. En la sección 3 presentamos y discutimos estos conceptos.

La ciclicidad es una noción bien conocida, de hecho se maneja en álgebra lineal y es más débil que la hiperciclicidad. Una razón por la cual el fenómeno de ciclicidad resulta de particular relevancia es su relación con el problema que describimos a continuación.

Dado un operador lineal continuo $T : X \to X$, observemos que X y $\{0\}$ son subespacios vectoriales cerrados de X que son T-invariantes. Surge entonces la cuestión de determinar si hay otros subespacios cerrados que son T-invariantes. Más aún, nos podemos preguntar si otros subconjuntos cerrados no-vacíos son T-invariantes. Al primer problema se le llama el *problema del subespacio invariante para* T y al segundo se le conoce como *problema del subconjunto invariante para* T.

Per Enflo estableció en 1976 la existencia de un espacio de Banach X con un operador lineal acotado cuyos únicos subespacios invariantes cerrados son X y $\{0\}$ [**3**]. Posteriormente, en 1986 Charles J. Read probó que de hecho eso sucede cuando $X := \ell^1$ [**12**]. Sin embargo, hasta hoy no se ha logrado determinar si esto también ocurre en el caso en que $X := \ell^2$. A esta cuestión se le llama *problema del subespacio invariante* y es uno de los problemas abiertos más importantes en análisis funcional.

Para terminar este trabajo, en la sección 4 discutimos si los operadores de Cesàro o de Hardy son hipercíclicos, supercíclicos o cíclicos. En particular, presentamos una prueba sencilla de que, en ciertos casos, los correspondientes operadores de Cesàro y de Hardy no son supercíclicos.

1. Operadores de Cesàro

Como se mencionó en la introducción, en esta sección mostraremos que diversos espacios de sucesiones son invariantes bajo el operador de Cesàro $C : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, definido en (1).

Proposición 4. *Sea* $s \in \mathcal{S}$.

i) *Si* $s \in \ell^\infty$, *entonces* $Cs \in \ell^\infty$ *y* $\|Cs\|_\infty \le \|s\|_\infty$.

ii) *Si* $s \in c$, *entonces* $Cs \in c$ *y además tiene el mismo límite que* s.

iii) $C(c_0) \subset c_0$.

Demostración. i) Sea $s = \{a_n\} \in \ell^\infty$, tomemos $Cs = \{b_n\}$ y fijemos $n \in \mathbb{N}_0$. Luego,

$$|b_n| = \left|\frac{a_0 + \ldots + a_n}{n+1}\right| \le \frac{|a_0| + \ldots + |a_n|}{n+1} \le \|s\|_\infty.$$

Tomando ahora el supremo sobre los índices $n \in \mathbb{N}_0$, resulta que $Cs \in \ell^\infty$ y $\|Cs\|_\infty \le \|s\|_\infty$.

ii) Sea $s = \{a_n\} \in c$ y tomemos $L = \text{lím}\, s := \text{lím}_{n\to\infty} a_n$. Para probar que $\text{lím}\, Cs = L$, observemos que para $n, N \in \mathbb{N}_0$, $n > N$ se cumple

$$\left|\frac{\sum_{j=0}^{n} a_j}{n+1} - L\right| = \left|\frac{\sum_{j=0}^{n}(a_j - L)}{n+1}\right| \leq \sum_{j=0}^{N} \frac{|a_j - L|}{n+1} + \sum_{j=N+1}^{n} \frac{|a_j - L|}{n+1}. \tag{4}$$

Dado $\epsilon > 0$ elijamos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_j - L| \leq \frac{\epsilon}{2},\ \forall\, n \geq N. \tag{5}$$

Una vez fijada N se cumple que $\sum_{j=0}^{N} \frac{|a_j - L|}{n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$ y, por lo tanto, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $N_1 > N$ y

$$\sum_{j=0}^{N} \frac{|a_j - L|}{n+1} \leq \frac{\epsilon}{2},\ \forall\, n \geq N_1. \tag{6}$$

A partir de (4)-(6) resulta entonces que

$$\left|\frac{\sum_{j=0}^{n} a_j}{n+1} - L\right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \left(\frac{n-N}{n+1}\right)\left(\frac{\epsilon}{2}\right) < \epsilon,\ \forall\, n \geq N_1.$$

Esto prueba que $L = \text{lím}\, Cs$.

iii) La conclusión es consecuencia directa de ii). □

Observación 5. *Notemos que la desigualdad que aparece en i) de la proposición anterior indica que*

$$\|C_\infty\| \leq 1,$$

donde $C_\infty := C : \ell^\infty \to \ell^\infty$. *De esto se sigue que*

$$\|C_c\| \leq 1 \quad \text{y} \quad \|C_0\| \leq 1,$$

donde $C_c := C : c \to c$ *y* $C_0 := C : c_0 \to c_0$. *Así, los operadores lineales* C_∞, C_c *y* C_0 *son acotados y por lo tanto, continuos.*

A continuación estableceremos que, para $1 < p < \infty$, el espacio ℓ^p es invariante bajo el operador de Cesàro y $C_p := C : \ell^p \to \ell^p$ es continuo. Esto se obtendrá probando la desigualdad de Hardy. Al respecto, cabe observar que en su demostración Hardy no presentó el valor q que aparece en (7).

Para probar la desigualdad de Hardy necesitaremos del siguiente teorema [**8**, §1.2]. Dado $p \in [1, \infty]$, recordemos que su *exponente conjugado* $q = q(p)$ está definido por la condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Observemos que $q(1) = \infty, q(\infty) = 1$ y $q(p) = \frac{p}{p-1}$, si $1 < p < \infty$.

Teorema 6. *Sean $1 < p < \infty$ y q su exponente conjugado.*

i) Entonces $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q, \ \forall\, x, y \geq 0$.

ii) (Desigualdad de Hölder) Si $x_0, \ldots, x_n; y_0, \ldots, y_n$ son números no-negativos, entonces $\sum_{k=0}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

Teorema 7 (Desigualdad de Hardy, 1920)**.** *Sea $1 < p < \infty$ y q su exponente conjugado. Si $s \in \ell^p$, entonces $Cs \in \ell^p$ y*

$$\|Cs\|_p \leq q\|s\|_p. \tag{7}$$

Demostración. Sean $s = \{a_n\} \in \ell^p$ y $Cs = \{b_n\}$. Tomemos $|s| := \{|a_n|\}$. Entonces $\|Cs\|_p \leq \|C|s|\|_p$. Trabajando directamente con $|s|$, esto nos permitirá suponer que $a_n \geq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}_0$. De acuerdo con i) del teorema anterior se cumple

$$b_{n-1}b_n^{p-1} \leq \frac{1}{p}b_{n-1}^p + \frac{1}{q}b_n^p, \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Empleando primero que $a_n = (n+1)b_n - nb_{n-1}$, usando después (8) y teniendo presente que $\frac{q}{p} = q - 1$, resulta

$$\begin{aligned} qa_nb_n^{p-1} - b_n^p &= q(n+1)b_n^p - qnb_{n-1}b_n^{p-1} - b_n^p \\ &\geq q(n+1)b_n^p - \frac{q}{p}nb_{n-1}^p - nb_n^p - b_n^p \\ &= (q-1)(n+1)b_n^p - (q-1)nb_{n-1}^p, \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sumando ahora y observando que en el miembro derecho aparece una suma telescópica, se sigue que

$$q\sum_{k=0}^{N} a_k b_k^{p-1} - \sum_{k=0}^{N} b_k^p \geq (q-1)(N+1)b_N^p \geq 0, \ \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

Usando lo anterior y la desigualdad de Hölder se obtiene

$$\sum_{k=0}^{N} b_k^p \leq q\sum_{k=0}^{N} a_k b_k^{p-1} \leq q\left(\sum_{k=0}^{N} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{N} b_k^p\right)^{\frac{1}{q}}, \ \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

Ya que (7) se cumple si $Cs = 0$, podemos suponer que N es tal que $\sum_{k=0}^{N} b_k^p \neq 0$. Luego, después de dividir entre $\left(\sum_{k=0}^{N} b_k^p\right)^{\frac{1}{q}}$ resulta

$$\left(\sum_{k=0}^{N} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq q \left(\sum_{k=0}^{N} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq q\|s\|_p.$$

Haciendo finalmente $N \to \infty$ se concluye lo afirmado. □

2. Operadores de Hardy

Sea I el intervalo $(0,1)$ o el intervalo $(0,\infty)$. Dada una función localmente integrable definimos la función Hf como en (2). Notemos que la función Hf obtenida de esta manera siempre es continua.

En lugar de ℓ^p consideraremos ahora el espacio de Banach $L^p(I)$, donde $1 \leq p < \infty$. Este consiste de las (clases de equivalencia de) funciones medibles $f : I \to \mathbb{K}$ tales que $\|f\|_p < \infty$, donde

$$\|f\|_p := \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En $L^p(I)$ trabajamos con la norma $\|\cdot\|_p$.

Al igual que en el caso de las sucesiones, al cual nos referiremos como el *caso discreto*, surge ahora la cuestión de si los espacios $L^p(I)$ son invariantes bajo el operador de Hardy H. Como antes, la respuesta es afirmativa cuando $1 < p < \infty$. La correspondiente desigualdad de Hardy indica que

$$\|Hf\|_p \leq q\|f\|_p, \ \forall\, f \in L^p(I),$$

donde q es el exponente conjugado de p. Esta también fue demostrada por Hardy en el artículo de 1920 antes citado.

Otro espacio de Banach que nos interesa es $C[0,1]$, el cual consiste de las funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{K}$. La norma en $C[0,1]$ está definida por

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|: 0 \leq x \leq 1\},$$

a la cual también se le llama *norma del supremo*.

Cada punto $a \in [0,1]$ define el funcional de evaluación en a mediante la correspondencia

$$\delta_a(f) := f(a), \ \forall\, f \in C[0,1].$$

Ya que $| f(a) |\leq \|f\|_\infty$, $\forall f \in C[0,1]$, cada uno de estos funcionales es continuo. Se sigue entonces que el espacio vectorial $\{h \in C[0,1] : h(0) = 0\}$ es cerrado.

Denotaremos por $C[0,\infty]$ al espacio que consiste de todas las funciones $f : [0,\infty) \to \mathbb{K}$ que son continuas y tales que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe. Asímismo, $C_0[0,\infty)$ indicará el subespacio de $C[0,\infty]$ formado por aquellas funciones tales que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. La norma que consideramos en $C[0,\infty]$ y por lo tanto también en $C_0[0,\infty)$, es la norma del supremo,

$$\|f\|_\infty := \{| f(x)|: 0 \leq x < \infty\}.$$

Estos espacios resultan ser espacios de Banach.

Notemos que dada $f \in X$, donde $X = C[0,1]$, $X = C_0[0,\infty)$ o bien $X = C[0,\infty]$, se satisface que

$$\lim_{x\to 0^+} Hf(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x f(s)ds}{x} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(s)ds\right)\Bigg|_{x=0} = f(0).$$

Esto permite extender continuamente la función Hf, definiendo

$$Hf(0) := f(0),\ \forall f \in X, \quad Hf(1) := \int_0^1 f(s)ds,\ \forall f \in C[0,1].$$

Entonces $Hf \in X$ y además, tomando $H_\infty := H : X \to X$, se cumple que

$$\|H_\infty\| \leq 1.$$

3. Órbita de un punto bajo un operador

En todo lo que sigue X es un espacio de Banach distinto de $\{0\}$, real o complejo y $T : X \to X$ un operador lineal continuo. Dado un conjunto $A \subset X$, $\overline{A}$ denotará su cerradura y span$A$ el espacio vectorial generado por A. En este caso es sencillo verificar que si A es T-invariante, entonces $\overline{A}$ y span$A$ también lo son.

Fijemos $x \in X$ y empecemos observando que su órbita $\mathrm{Orb}(x,T)$ es T-invariante. Luego, $V_x := \mathrm{span}(\mathrm{Orb}(x,T))$ sigue siendo T-invariante y, por lo tanto, también lo es su cerradura. Claramente, $\overline{V_x}$ es un subespacio vectorial cerrado y $x \in \overline{V_x}$.

Supongamos ahora que $V \subset X$ es cualquier subespacio de X que es cerrado, T-invariante y tal que $x \in V$. Entonces $T^n x \in V$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, esto es, $\mathrm{Orb}(x,T) \subset V$. Lo cual implica que $V_x \subset V$. Siendo V un conjunto cerrado, esto lleva a concluir que $\overline{V_x} \subset V$.

Lo anterior muestra que entre los subespacios vectoriales de X a los cuales pertenece x y que son cerrados y T-invariantes, el más pequeño es $\overline{\mathrm{span}(\mathrm{Orb}(x,T))}$.

Supongamos ahora que no se está interesado en que el subconjunto cerrado y T-invariante sea un subespacio vectorial sino simplemente que sea no-vacío. Dado $x \in X$, el desarrollo previo indica que $\overline{\mathrm{Orb}(x,T)}$ es el subconjunto cerrado de X más pequeño al cual x pertenece y que es invariante bajo T.

La discusión anterior motiva las siguientes definiciones.

Definición 8. a) Si existe $x \in X$ cuya órbita $\mathrm{Orb}(x,T)$ es densa en X, al operador T se le llama *hipercíclico* y a x *vector hipercíclico* de T.

b) Si existe $x \in X$ tal que el espacio vectorial $\mathrm{span}(\mathrm{Orb}(x,T))$ es denso en X, al operador T se le llama *cíclico* y a x *vector cíclico* de T.

Observemos que se cumple entonces lo siguiente.

Lema 9. *i) X y $\{0\}$ son los únicos subespacios vectoriales cerrados invariantes bajo T si y solo si, todo vector $x \in X$ que es distinto de cero, es un vector cíclico de T.*

ii) X y $\{0\}$ son los únicos subconjuntos no-vacíos invariantes bajo T si y solo si, todo vector $x \in X$ que es distinto de cero, es un vector hipercíclico de T.

En la introducción mencionamos que Read construyó un operador lineal continuo $T : \ell^1 \to \ell^1$ que solo tiene a $\{0\}$ y ℓ^1 como subespacios cerrados invariantes. En 1988 mejoró este resultado al construir, también en ℓ^1, un operador lineal continuo T que tiene a todos los vectores diferentes de cero como vectores hipercíclicos. Por lo tanto, de acuerdo con ii) del lema anterior, en este caso ℓ^1 y $\{0\}$ son los únicos subconjuntos cerrados y no-vacíos que son invariantes bajo T.

Cabe mencionar que la ciclicidad en un espacio normado X solo se pueden presentar cuando X es *separable*, esto es, existe un conjunto $A \subset X$ que es denso y numerable.

El primer ejemplo de un operador hipercíclico surgió en el contexto de variable compleja. Fue G. D. Birkhoff quien en 1929 demostró que, para cada $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, el operador de «traslación» $T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$, dado por

$$T_a(f)(z) := f(z+a), z \in \mathbb{C}$$

es hipercíclico [**14**]. Aunque en $H(\mathbb{C})$, el espacio formado por las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, la topología no proviene de una norma sino de una métrica, el concepto de hiperciclicidad sigue teniendo sentido.

Por otra parte, en 1969, S. Rolewicz fue el primero en presentar operadores hipercíclicos en un espacio de Banach [**13**]. Éstos fueron aquellos de la forma λB, donde B es el operador de desplazamiento hacia atrás definido en el espacio l^p, $1 \leq p < \infty$, por

$$B(a_0, a_1, \ldots) := (a_1, a_2, \ldots).$$

En 1982 y 1987 aparecieron, respectivamente, la tesis doctoral de Kitai [**7**] y el trabajo de Gethner y Shapiro [**4**], quienes independientemente encontraron un criterio de sencilla aplicación que brinda condiciones suficientes para que un operador sea hipercíclico.

En los últimos años el estudio de la hiperciclicidad ha tenido un desarrollo importante. Entre otros resultados de interés, se encuentra el que la hiperciclicidad es un fenómeno que solo puede ocurrir en espacios de Banach de dimensión infinita [**14**]. Por otra parte, en 2007 Manuel de la Rosa y C. J. Read, quien hizo su doctorado con Read y realizó sus estudios de licenciatura en la UNAM, resolvieron una cuestión muy importante conocida como «el gran problema abierto en hiperciclicidad» [**2**].

Observemos que si T es un operador hipercíclico, entonces T es cíclico. Como una propiedad intermedia entre hiperciclicidad y ciclicidad, Hilden y Wallen introdujeron en 1974 la siguiente propiedad [**6**].

Definición 10. Si existe $x \in X$ tal que el conjunto $\{\lambda T^n x : \lambda \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en X, al operador lineal continuo $T : X \to X$ se le llama *supercíclico* y a x *vector supercíclico* de T.

4. Grados de ciclicidad de los operadores de Cesàro-Hardy

En 2009 F. León Saavedra, A. Piqueras Lerena y J. B. Seoane Sepúlveda establecieron que el operador de Hardy $H_p := H : L^p(0,1) \to L^p(0,1)$, donde $1 < p < \infty$, es hipercíclico y que, por otra parte, el operador de Hardy $H_\infty := H : C[0,1] \to C[0,1]$ no es supercíclico [**11**]. En seguida demostraremos el último resultado siguiendo otras ideas.

En [**11**] también se afirmó que el operador de Cesàro $C_p : \ell^p \to \ell^p$, donde $1 < p < \infty$, no es supercíclico. Aunque esto es cierto, la demostración presentada en dicho trabajo tiene un error, pues el teorema de superciclicidad positiva establecido en [**10**] no se puede aplicar a los operadores de Cesàro C_p. El método que en seguida usaremos nos permitirá dar una prueba correcta.

Introduzcamos el *operador de Cesàro* en $\mathbb{K}^2$, $F : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, definido por

$$F(a_0, a_1) := \left(a_0, \frac{a_0 + a_1}{2}\right).$$

En $\mathbb{K}^2$ tomaremos la norma del supremo, esto es $\|(a,b)\|_\infty := \text{máx}\{|a|, |b|\}$. Se cumple entonces que $\|F\| \leq 1$.

Lema 11. *El operador de Cesàro F no es supercíclico.*

Demostración. Consideremos

$$V := \{(0,c) : c \in \mathbb{K}\}$$

y notemos que V es un subespacio cerrado de $\mathbb{K}^2$ que es F-invariante. Sea $x := (a,b) \in \mathbb{K}^2$. Si $x \in V$, esto es $a = 0$, entonces $\text{Orb}(x,F) \subset V$. De lo cual resulta que $\{\lambda F^n x : \lambda \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_0\} \subset V$. Por consiguiente, en este caso x no es vector supercíclico de F.

Supongamos ahora que $a \neq 0$ y que existen sucesiones $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{K}$ y $\{n(k)\} \subset \mathbb{N}_0$ tales que $\lambda_k F^{n(k)} x \to (0,c)$, donde $c \in \mathbb{K}$. Ya que $(F^n x)_0 = a$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$, esto implica que $\lambda_k a \to 0$ y, por lo tanto, $\lambda_k \to 0$.

Por otra parte, de $\|F\| \leq 1$ se sigue que $\|F^{n(k)} x\| \leq \|x\|$, $\forall\, k \in \mathbb{N}_0$. Puesto que $\lambda_k \to 0$, esto lleva a concluir que $\lambda_k F^{n(k)} x \to (0,0)$ y por lo tanto, $c = 0$. Así, en este caso x tampoco es vector supercíclico de F. $\square$

Proposición 12. *i) El operador de Hardy $H_\infty : X \to X$, donde $X = C[0,1]$, $X = C[0,\infty]$ o $X = C_0[0,\infty)$, no es supercíclico.*

ii) El operador de Cesàro $C_p : \ell^p \to \ell^p$, $1 < p < \infty$, no es supercíclico.

iii) El operador de Cesàro $C : X \to X$, donde $X = c_0$ o $X = c$, no es supercíclico.

Demostración. i) Probaremos el caso en que $X = C[0,1]$, los otros casos se pueden establecer de igual forma. De hecho, la prueba es enteramente análoga a la del lema anterior.

Tomemos

$$V := \{h \in C[0,1] : h(0) = 0\}$$

y notemos que V es un subespacio cerrado que es invariante bajo H_∞. Consideremos $f \in C[0,1]$. Si $f \in V$, entonces $\{\lambda H_\infty^n f : \lambda \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_0\} \subset V$. Por consiguiente, en este caso f no es vector supercíclico de H. Supongamos ahora que $f(0) \neq 0$ y que existen sucesiones $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{K}$ y $\{n(k)\} \subset \mathbb{N}_0$ tales que $\lambda_k H_\infty^{n(k)} f \to g \in C[0,1]$, donde $g(0) = 0$. Puesto que $(H_\infty^n f)(0) = f(0),\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$, esto implica que $\lambda_k f(0) \to 0$ y por lo tanto, $\lambda_k \to 0$. Ya que $\|H_\infty\| \leq 1$, se sigue que $\lambda_k H_\infty^{n(k)} f \to 0$. Así $g = 0$. Esto muestra que en este caso f tampoco es vector supercíclico de H_∞.

ii) Fijemos $p \in (1,\infty)$ y consideremos en $\mathbb{K}^2$ la «norma p», definida por

$$\|(a,b)\|_p := (|\,a|^p + |\,b|^p)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{K}^2$. Es sencillo establecer entonces que

$$\|x_n\|_p \to 0 \text{ si y solo si, } \|x_n\|_\infty \to 0. \tag{9}$$

Sea F el operador de Cesàro en $\mathbb{K}^2$. Si $x = (a,b) \in \mathbb{K}^2$ definamos como $s := \{s_n\}$ la sucesión tal que $s_0 := a,\ s_1 := b$ y $s_m := 0,\ \forall\, m \geq 2$. Entonces

$$(Fx)_m = (Cs)_m,\ m = 0,1. \tag{10}$$

Supongamos que $C_p : \ell^p \to \ell^p$ tiene un vector supercíclico $\sigma := \{\sigma_n\}$. En virtud de (10) y (9), esto implica que $x_0 := (\sigma_0, \sigma_1) \in \mathbb{K}^2$ es un vector supercíclico de F. Sin embargo, de acuerdo al lema 11 esto no es posible.

iii) La demostración es análoga a la de ii). □

Recordemos que $C_p := C : \ell^p \to \ell^p$, $1 < p < \infty$, $C_c := C : c \to c$ y $C_0 := C : c_0 \to c_0$. En 1971 T. L. Kriete y David Trutt [**9**] demostraron que $e_0 \in \ell^2$ es un vector cíclico del operador $T := I - C_2$, definido en el espacio complejo ℓ^p. A partir de este resultado obtuvieron el siguiente teorema.

Teorema 13. *El operador de Cesàro C_2 tiene a e_0 como vector cíclico.*

A continuación usaremos el teorema anterior y la siguiente proposición auxiliar para analizar la ciclicidad de los operadores de Cesàro C_p y C_0.

Proposición 14. *i) El subespacio de sucesiones*

$$c_{00} := \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{S} : \exists k \in \mathbb{N} \ \ \textit{tal que } a_n = 0, \ \forall n \geq k\}$$

es denso en l^p, $1 \leq p < \infty$, y en c_0.

ii) Sean $1 \leq p < r < \infty$. Entonces, $l^p \subset l^r$ y

$$\|s\|_r \leq \|s\|_p, \quad \forall s \in l^p. \tag{11}$$

Además $\ell^p \subset c_0$ y $\|s\|_\infty \leq \|s\|_p, \quad \forall s \in l^p$.

Corolario 15. *i) El operador de Cesàro C_p es cíclico, $\forall p \in [2, \infty)$.*

ii) El operador de Cesàro C_0 es cíclico.

Demostración. i) Sean $p \in [2, \infty)$, $x \in c_{00}$ y $V := \text{Span}\,(\text{Orb}(e_0, C_p))$. Puesto que $e_0 \in l^p$, observemos que $V \subset l^p$. Ya que $c_{00} \subset l^2$, por el teorema 13, existe una sucesión $\{x_n\} \subset V$ tal que $x_n \to x$ en l^2. Luego, usando (11) se sigue que $x_n \to x$ en l^p.

Por lo tanto, $c_{00} \subset \overline{V}$, donde la cerradura se refiere a la norma $\|\cdot\|_p$. Finalmente, por i) de la proposición 14, esto implica que $l^p = \overline{V}$. Así, e_0 es un vector cíclico de C_p.

ii) La demostración es análoga a la de i). □

Antes de continuar hacemos notar que, hasta donde los autores conocen, no se sabe si el operador de Cesàro C_p es cíclico, cuando $1 < p < 2$.

Proposición 16. *El operador de Cesàro C_c no es cíclico.*

Demostración. Supongamos que $w = \{w_n\} \in c$ es un vector cíclico de C_c. Definamos las funciones $L, \pi : c \to \mathbb{K}$ por

$$Lx := \lim_{n\to\infty} x_n \ \text{ y } \ \pi x := x_0, \quad \forall x = \{x_n\} \in c.$$

Observemos que L y π son operadores lineales continuos y además,

$$LC_c x = Lx \ \text{ y } \ \pi C_c x = \pi x, \quad \forall x \in c.$$

Puesto que $e_0 \in c$, existe una sucesión $\{S_n w\} \subset \text{Span}(\text{Orb}(w, C_c))$, donde $S_n = \sum_{k=0}^{m(n)} \lambda_{k,n} C_c^k$, tal que $S_n w \to e_0$. Por la continuidad de L y π esto implica

$$L\,(S_n w) \to Le_0 = 0 \ \text{ y } \ \pi\,(S_n w) \to \pi(e_0) = 1. \tag{12}$$

Por otra parte, notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$L\left(S_n w\right) = \sum_{k=0}^{m(n)} \lambda_{k,n} L\left(C_c^k w\right) = L(w)\left(\sum_{k=0}^{m(n)} \lambda_{k,n}\right) \tag{13}$$

y

$$\pi\left(S_n w\right) = \sum_{k=0}^{m(n)} \lambda_{k,n} \pi\left(C_c^k w\right) = w_0\left(\sum_{k=0}^{m(n)} \lambda_{k,n}\right). \tag{14}$$

De (12) y (14) obtenemos que $w_0 \neq 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m(n)} \lambda_{k,n} = \frac{1}{w_0}. \tag{15}$$

Usando (12), (13) y (15) se sigue que $L(w) = 0$, esto es, $w \in c_0$. Ya que c_0 es invariante bajo C_c, esto implica que $\overline{\operatorname{Span}(\operatorname{Orb}(w, C_c))} \subset c_0 \subsetneq c$. Lo cual contradice que $w \in c$ es un vector cíclico de C_c. Por lo tanto, el operador C_c no es cíclico. $\square$

Agradecimientos

Los autores agradecen la valiosa revisión de los árbitros, cuyos comentarios condujeron a elaborar una presentación más adecuada.

Bibliografía

1. J. L. Bosanquet, «Some aspects of Hardy's mathematical work. (1) Early work on divergent series», *J. London Math. Soc.*, vol. s1-25 (2), 1950, 102–106.
2. M. de la Rosa y C. Read, «A hypercyclic operator whose direct sum $T \oplus T$ is not hypercyclic», *J. Operator Theory*, vol. 61 (2), 2009, 369–380.
3. P. Enflo, «On the invariant subspace problem in Banach spaces, Séminaire Maurey-Schwartz», en *Espaces Lp, applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach, Exp. Nos. 14-15, pp. 7, MR0473871*, Centre Math., École Polytech., Palaiseau, 1975–1976.
4. R. M. Gethner y J. L. Shapiro, «Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions», *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 100 (2), 1987, 281–288.
5. G. H. Hardy, J. E. Littlewood y G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

6. H. M. Hilden y L. J. Wallen, «Some cyclic and non-cyclic vectors od certain operators», *Indiana University Mathematics J.*, vol. 23, 1974, 557–565.
7. C. Kitai, «Invariant closed sets for linear operators», 1982, Ph. D. Thesis, University of Toronto.
8. E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, New York, 1978.
9. T. L. Kriete, III y D. Trutt, «The Cesàro operator in l^2 is subnormal», *Amer. J. Math.*, vol. 93, 1971, 215–225.
10. F. León-Saavedra y V. Müller, «Rotations of Hypercyclic and Supercyclic Operators», *Integral Equations and Operator Theory*, vol. 50 (3), 2004, 385–391.
11. F. León-Saavedra, A. Piqueras-Lerena y J. B. Seoane-Sepúlveda, «Orbits of Cesaro type operators», *Math. Nachrichten*, vol. 282 (5), 2009, 764–773.
12. C. J. Read, «A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ^1'», *Bull. London Math. Soc.*, vol. 17 (4), 1985, 305–317.
13. S. Rolewicz, «On orbits of elements», *Studia Math.*, vol. 32, 1969, 17–22.
14. J. H. Shapiro, «Notes on the Dynamics of Linear Operators», unpublished lecture notes (Disponible en `http://www.math.msu.edu/~shapiro`), 2001.