

DESARROLLO DEL ANALISIS FUNCIONAL

Estas notas fueron elaboradas por los alumnos de la Facultad de Ciencias Antonio Antolín, Begoña Fernández, Hugo Mejía, Luis Montejano, Ricardo Quintero, Enriqueta Rodríguez y Teresa Rojano, tomando como base el material expuesto por el Profesor J. Horvath* en su serie de conferencias del verano de 1972 sobre la Génesis del Análisis Funcional y un curso paralelo sobre Análisis Funcional impartido por el Profesor Alejandro López Yáñez**, quien también participó como corrector en la elaboración del material.

* Profesor visitante del C.I.M.A.S.S. y de la Facultad de Ciencias.

** Investigador del C.I.M.A.S.S.

En las primeras páginas de la mayoría de los textos usuales de Análisis Funcional encontramos la definición y las propiedades más simples de un espacio de Banach. Este procedimiento debido a las existencias de presentación de un libro de texto, no se apega a la realidad histórica y el estudiante puede perder de vista el hecho de que estos conceptos son la síntesis de información y resultados que produjeron muchas de las más importantes investigaciones matemáticas realizadas durante el siglo XIX y las primeras décadas del XX.

Problemas surgidos del cálculo de las variaciones, la teoría de funciones, ecuaciones diferenciales, etc., condujeron de manera natural a conceptos muy manejados hoy en día en el análisis funcional, o bien, pusieron de manifiesto la necesidad de unificar una colosal masa de información proveniente de las más diversas (aparentemente) ramas de la matemática.

Comenzaremos examinando aspectos de la evolución de un problema clásico planteado el siglo pasado y conocido como Problema de Dirichlet. Sea un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^n$, no necesariamente simplemente conexo, y sea f una función continua definida en la frontera $\delta\Omega$ de Ω . Encontrar una función v continua en $\Omega \cup \delta\Omega$ tal que:

$$(a) \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \dots + \frac{\partial^2 V}{\partial X_n^2} = 0 \text{ en } \Omega ,$$

$$(b) \quad V(y) = f(y) \text{ para } y \in \partial\Omega .$$

El problema ya en 1828 lo planteaba Green aproximadamente en los siguientes términos: ¿Es posible encontrar una solución continua de la ecuación homogénea de Laplace que tome valores preasignados en cualquier superficie cerrada dada?

El principio de Dirichlet. Describiremos para el caso en que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un método para atacar el problema de Dirichlet, dado a conocer por Riemann en 1851.

Sea U la familia de funciones definidas en $\Omega \cup \partial\Omega$ tales que:

(a) son continuas en $\Omega \cup \partial\Omega$, (b) coinciden con la función f dada en $\partial\Omega$, (c) poseen primeras y segundas derivadas parciales continuas en Ω .

Para una función $u \in U$ la integral

$$(1) \quad D[u, u] = \int_{\Omega} \int \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy$$

es positiva, ya que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ significa que u es constante, lo que la imposibilitaría para tomar, en caso de que f no sea constante, esos valores prescritos en $\partial\Omega$.

Consideremos la función $v \in U$ que tenga la propiedad de hacer que la integral (1) alcance su valor mínimo y sea $u \in C^2(\Omega)$,

continua en $\Omega \cup \partial\Omega$, tal que $u(\bar{x}) = 0$ para $\bar{x} \in \partial\Omega$, entonces, para toda $t \in \mathbb{R}$, $V + tu \in U$ y además $D[V + tu, V + tu] \geq D[V, V]$. Entonces $D[V, V] + 2tD[V, u] + t^2D[u, u] \geq D[V, V]$, i.e.: $2tD[V, u] + t^2D[u, u] \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, desigualdad que llamaremos (2).

Pero esto implica que $D[V, u] = 0$ pues de otra manera podríamos escoger t con magnitud y signo apropiado para hacer negativo el lado izquierdo de (2).

Además, por el teorema de Green, sabemos que:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \right) dx dy = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial V}{\partial n} ds - \iint_{\Omega} u \Delta V dx dy \quad (3)$$

y como $u=0$ en $\partial\Omega$, la primera integral del miembro derecho de (3) se anula y, como sabemos que la integral de la izquierda es $D[V, u]$, tenemos que:

$$\iint_{\Omega} u \Delta V dx dy = 0 \text{ lo que es posible sólo si } \Delta V = 0$$

en Ω , ya que a u le impusimos la única restricción de anularse en $\partial\Omega$. V es entonces la solución buscada.

A la suposición de que el mínimo de (1) existe, Riemann le dió el nombre de "Principio de Dirichlet" al cual justificaba argumentando razones físicas.

En 1870, Weierstrass (1815-1897) hizo la crítica del método de Riemann, mostrando que es incompleto puesto que no demuestra

la existencia de una función que minimice la integral (1).

Proporcionaremos al lector un ejemplo de una integral de la misma forma que (1), que ilustra la situación que señalaba Weierstrass:

Si consideramos la familia de rectas $V(x,y) = ax+by + C = 0$ y Ω es el disco unitario con centro en el origen, entonces

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \pi(a^2 + b^2).$$
 Claramente $\inf \{ \pi(a^2 + b^2) : a, b \in \mathbb{R} \} = 0$ pero no existe una recta que haga $\pi(a^2 + b^2) = 0$.

El "Principio de Dirichlet" tuvo que esperar hasta 1899 a que Hilbert (1862-1943) lo rehabilitara encontrando restricciones sobre f y $\partial\Omega$ que hacen a U compacto y a $D[u,u]$ continua, permitiendo entonces que el mínimo de la integral (1) sea alcanzado para alguna función V y podamos, en esos casos, resolver el problema de Dirichlet.

La Función de Green

Otro método para atacar el problema de Dirichlet había sido dado a conocer en 1828 por George Green en un ensayo muy famoso sobre electricidad y magnetismo, donde hace consideraciones aproximadamente como las siguientes.

Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y que $\partial\Omega$ es una superficie suficientemente lisa. Utilizando el teorema de Green no es difícil mostrar que, conocidos los valores de V y su derivada normal en $\partial\Omega$, los valores en el interior de la región que limita dicha superficie vienen dados por

$$(4) \quad V(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dx dy \quad \text{donde}$$

$$r = \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \right]^{1/2}$$

Ahora bien, claramente tratar de determinar V utilizando (4) nos exige más condiciones que el problema de Dirichlet, pues tendríamos que conocer los valores de la derivada normal de V . Sin embargo, veremos a continuación como podemos utilizar (4) u una función, conocida como función de Green, que procederemos a definir, para reducir el problema de Dirichlet a un problema de Dirichlet particular.

Sea H una función armónica en Ω y que toma el valor $-\frac{1}{r}$ en $\partial\Omega$, donde r , claro está, denota la distancia a un punto (x_0, y_0, z_0) en Ω . Si definimos $G = \frac{1}{r} + H$, vemos que G se anula en $\partial\Omega$ y es armónica en Ω salvo en (x_0, y_0, z_0) , donde tiene un polo. Tal función G se llama la función de Green para el punto (x_0, y_0, z_0) y la superficie $\partial\Omega$.

Por otra parte, no es difícil mostrar que, si H y V son armónicas en Ω , entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial H}{\partial n} - H \frac{\partial v}{\partial n} \right) dx dy = 0$$

y si sumamos esta integral multiplicada por el factor $-\frac{1}{4\pi}$ al lado derecho de (4), obtenemos:

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \left\{ \left(H + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n} \left(H + \frac{1}{r} \right) \right\} dx dy = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left(G \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial G}{\partial n} \right) dx dy \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial G}{\partial n} \right) dx dy \end{aligned} \quad (5)$$

ya que G se anula en $\partial\Omega$.

Notemos entonces que conocida la función de Green en virtud de (5) podemos encontrar los valores de V en Ω . Esto significa reducir el problema de Dirichlet a la determinación de la función de Green, vale decir, a un problema de Dirichlet particular.

Debemos hacer notar que ya en 1820 Poisson encontró que los valores de una función armónica V en el interior de un círculo quedan determinados por sus valores en la circunferencia.

Supongamos que el círculo tiene centro en el origen y sea (x_0, y_0) un punto en su interior cuyas coordenadas polares son (ρ, θ) . No es difícil ver que la fórmula

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - P^2}{R^2 + P^2 - 2RP \cos(\theta - \psi)} d\psi \quad (6)$$

donde (R, ψ) son las coordenadas polares de un punto en la circunferencia ((6) se conoce con el nombre de integral de Poisson), es la integral (5) en R^2 siendo G la función de Green para la circunferencia, cuya determinación puede encontrar el lector en las páginas 365 a 367 del libro de Tijónov y Samarsky "Ecuaciones de la física-matemática".

Tanto en el caso del método de Riemann como en el método de Green, tenemos ciertas dificultades para resolver el problema de Dirichlet. El primero lo podemos aplicar siempre que podamos asegurar la existencia de la función que minimice (1), y el segundo, cuando podemos determinar la función de Green de la región particular que estemos considerando. Un método posterior, debido al ingenio de Hermann A. Schwarz, permite resolver el problema en el caso general. Procederemos a describirlo para un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

El Método Alternativo de Schwarz

Consideremos una región Ω que podamos descomponer como unión de dos regiones Ω_1 y Ω_2 , cuyas fronteras tienen sólo dos puntos en común. Primero mostraremos que, si en las regiones

Ω_1 y Ω_2 está resuelto el problema de Dirichlet, entonces podemos resolverlo en Ω , $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Llamemos p y q a los dos puntos en que se intersectan $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$. Los puntos p, q dividen (Ver fig. 1) a $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$ en dos arcos distintos α_1, α_2 y β_1, β_2 respectivamente.

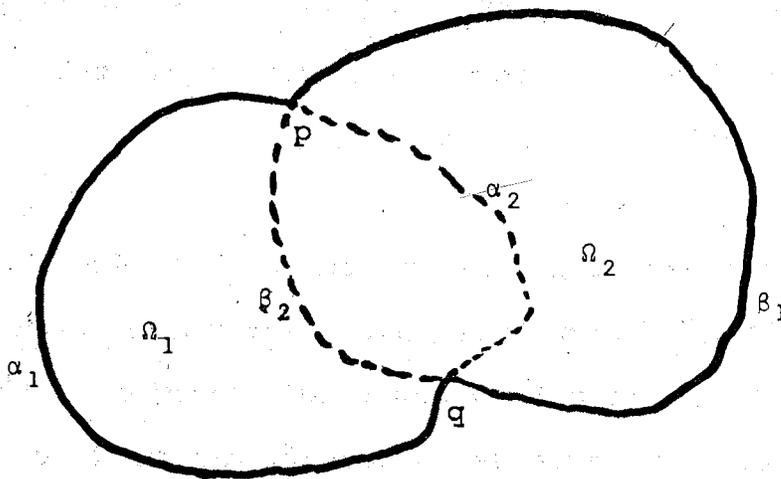


FIG. 1

Sea f una función continua en $\partial\Omega = \alpha_1 \cup \beta_1$ y sea f_1 continua en $\partial\Omega_1$ tal que la restricción de f a α_1 y la restricción de f_1 a α_1 sean idénticas. Consideremos ahora la solución u_1 al problema de Dirichlet para f_1 y Ω_1 y construyamos una función v_1 , armónica en Ω_1 y cuya restricción a β_2 coincida con la restricción de u_1 a β_1 , pero que, sin embargo, en β_1 coincida con f . Construyamos ahora una función u_2 armónica en Ω_1 y que coincida con N_1 sobre el arco α_2 , que está en Ω_2 , y que sobre α_1 coincida con f . Este procedimiento lo podemos repetir alternativamente para obtener dos sucesiones $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y

$\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones armónicas en Ω_1 y Ω_2 , respectivamente tales que la restricción de cada U_n a α_1 coincida con la restricción de f a α_1 y que la restricción de cada V_n a β_1 coincida con la restricción de f a β_1 .

Se puede demostrar que $U_n \rightarrow U_1$ y $V_n \rightarrow U_2$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde U_1 y U_2 son funciones armónicas en Ω_1 y Ω_2 que coinciden con f , la primera en α_1 y la segunda en β_1 . Nótese que U_1 y U_2 toman los mismos valores sobre α_2 y α_2 , ya que $U_n = V_n$ en β_2 y $U_n = V_{n-1}$ en α_2 , por lo cual U_1 y U_2 coinciden en $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Consecuentemente, una función definida en Ω , digamos V , cuya restricción a Ω_1 sea U_1 y cuya restricción a Ω_2 sea U_2 , es armónica en todo $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, coincide con f en $\partial\Omega$ y resuelve, por lo tanto, el problema de Dirichlet para la función f y el dominio Ω .

Los detalles de la construcción que acabamos de describir los puede encontrar el lector en el volumen II del famoso "Cours D'Analyse Mathematique" de Goursat.

Más ingenioso aún, y no menos elegante, resulta el método del "Balayage" (Barrido) desarrollado por Poincaré.

La idea de este método tiene una profunda motivación física que bosquejaremos a continuación:

Una función "lo suficientemente decente", definida en una región (digamos de \mathbb{R}^2) cuya frontera es "lo suficientemente lisa", podemos interpretarla como el potencial debido a una cierta distribución de masa en la cerradura de dicha región. En particular una función armónica describe el caso correspondiente a una distribución de masa concentrada en la frontera de la región. Nótese que las hipótesis del problema de Dirichlet nos proporcionan un dominio Ω y una función continua en $\partial\Omega$. Si se extiende tal función continuamente a $\Omega \cup \partial\Omega$, tal extensión por lo general no resulta armónica (en Ω); de manera que la distribución de masa correspondiente a esa función estará (al menos en parte) en el interior de la región. Para "barrer" la masa hacia la frontera de la región, primero redefinimos la función extendida en algún disco cuya cerradura quede contenida en Ω , "barriendo" la distribución de masa hacia la frontera del disco. Nótese que cualquier región la podemos expresar como la unión de una familia de discos, de manera que podemos tratar de recorrer "barriendo" los discos hasta llevar la distribución de masa hacia la frontera de la región. Para que tal recorrido resulte exitoso debemos imitar a la buena ama de casa: ella barre teniendo el cuidado de que el polvo no vaya a parar a los lugares ya limpios, de manera que al recorrer los discos debemos evitar que la distribución de masa se barra al interior de los discos ya barridos. Si podemos conseguirlo, podremos entonces obtener una sucesión de funciones que converja hacia una función

armónica en todo Ω , y que coincida con f en $\partial\Omega$, resolviendo así el problema de Dirichlet.

Procedamos a decir de manera más rigurosa el argumento anterior, considerando un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^2$ y una función g continua en $\Omega \cup \partial\Omega$ que coincida con una función dada f en $\partial\Omega$.

Supongamos, además que la función g que estamos considerando es también subarmónica en Ω y escojamos una sucesión de discos D_1, \dots, D_R, \dots tales que $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = \Omega$, y consideremos la sucesión anterior renumerando de la siguiente manera: $D_1^1 = D_1$, $D_2^1 = D_2$, $D_3^1 = D_1$, $D_4^1 = D_2$, $D_5^1 = D_3$, $D_6^1 = D_1, \dots$ etc. como g es subarmónica en Ω , definimos en cualquier disco D contenido en Ω una función g^D continua en Ω , tal que $g^D = g$ en $\Omega - D$ y tal que g^D es armónica en D entonces g^D es subarmónica en Ω y además $g \leq g^D$ en Ω .[†]

En virtud de lo anterior si formamos una sucesión de funciones f_n redefiniendo g de la siguiente manera: $f_1 = g$, $f_2 = f_1^{D_2^1}, \dots, f_u = f_{n-1}^{D_n^1}$, y las funciones f_i están bien definidas, son continuas y además coinciden con f en $\partial\Omega$.

Ahora bien, la sucesión $\{f_n\}$ converge en $\Omega \cup \partial\Omega$ a una función u la cual está acotada superiormente por el $\max_{\Omega \cup \partial\Omega} g$, pues $\{f_n\}$ es no decreciente y, en virtud del principio del máximo, cada función f_i está acotada por el máximo de f en $\Omega \cup \partial\Omega$.

[†] Ver Epstein "Partial Diff. Eq." pag. 164

Por otra parte la función u debe ser armónica en Ω , pues, si escogemos una subsucesión $\{f_{n_i}\}$ de tal forma que sus elementos sean aquellas funciones obtenidas por la "armonización" con respecto a cierto disco fijo D_r , como tal subsucesión es una sucesión monótona de funciones armónicas en D_r , entonces el teorema de Harnack nos permite asegurar que su límite es una función armónica. Como la totalidad de estos discos cubre a Ω , si hacemos esto para cada r , podemos concluir que u resulta armónica en Ω .

Faltaría comprobar que u es continua en $\partial\Omega$ y para ello bastaría probar que $\lim_{p \rightarrow q} u(p) = f(q)$ donde, claro está, se entiende que $p \rightarrow q$ a lo largo de $\partial\Omega$, para lo cual bastaría a su vez, probar que $\liminf_{p \rightarrow q} u(p) \geq f(q)$ y que $\limsup_{p \rightarrow q} u(p) \leq f(q)$.

La primera de tales desigualdades es consecuencia inmediata de la continuidad de f en $\Omega \cup \partial\Omega$ y del hecho de que $u(p) > f(p)$. Para la segunda desigualdad, el lector puede consultar E.G. el libro de Epstein "Partial Diff. Eq.", pag. 74, donde se muestra que la condición necesaria y suficiente para la validez de dicha desigualdad, es que tal punto q , admita una barrera, esto es una función continua definida en $\Omega \cup \partial\Omega$, armónica en Ω y tal que $w(q) = 0$ y $w(p) > 0$ para toda $p \in \Omega \cup \partial\Omega - q$. Nótese que una vez concebida la idea de Poincaré, la dificultad de la demostración es esta parte que omitimos, pero esta dificultad es cuestión de técnica.

Pasemos a examinar un método más para resolver el problema de Dirichlet, debido al matemático húngaro Carol Newmann.

Método de C. Newmann.

Este método, a pesar de restringirse a dominios convexos cuya frontera es lisa casi en todas partes, tiene para nosotros una importancia fundamental, como veremos más adelante. Consideremos el caso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Para parametrizar cualquier punto sobre $\partial\Omega$, escogemos la longitud de arco s medida a partir de un cierto origen A (Fig. 2)

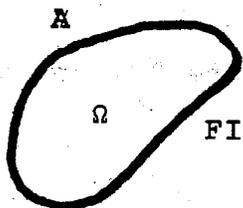


FIG. 2

LLamaremos ℓ a la longitud total de $\partial\Omega$.

Cada función f , continua sobre $\partial\Omega$, podemos pensarla como una función $f(s)$ de período ℓ .

Por otro lado, las propiedades de f , tales como la continuidad, no se pierden por esta reparametrización.

Consideremos ahora la función W definida por una integral de la forma: $W = \int_{\partial\Omega} \mu \frac{\cos \psi}{r} ds$ (7) donde μ es una función continua en $\partial\Omega$. Se puede probar que W es armónica en Ω .

Para cada punto de $\partial\Omega$, de "Abscisa curvilínea" x , el valor de la función W se puede escribir de la siguiente manera:

$$(8) \quad W(x) = 2\pi \mu(x) + \int_{\partial\Omega} \left[\mu(s) - \mu(x) \right] \frac{\cos \psi_x}{r_x} ds$$

donde r_x es la distancia de x a s , ψ_x es el ángulo que forman sx y la normal interior a $\partial\Omega$ en s , i.e.: para cada x consideramos las dos funciones de s definidas anteriormente.

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, supongamos ahora que tenemos una función f del parámetro s , continua en $\partial\Omega$ y del período ℓ .

Para pasar a la resolución del problema de Dirichlet para el dominio Ω basta buscar una función auxiliar, $\mu(s)$, definida sobre $\partial\Omega$, continua y de período ℓ , tal que

$W = \int_{\partial\Omega} \mu \frac{\cos \psi}{r} ds$ tome los valores $f(x)$ dados sobre $\partial\Omega$, cosa que sucede si y sólo si

$$(9) \quad f(x) = 2\pi \mu(x) + \int_{\partial\Omega} \left[\mu(s) - \mu(x) \right] \frac{\cos \psi_x}{r_x} ds$$

y, para resolver esta ecuación integral y encontrar μ , recurriremos al método de las aproximaciones sucesivas, que encontraremos más adelante en un contexto más general. Primero introduciremos un parámetro λ y expresaremos la ecuación (9) en la forma siguiente:

$$(10) \quad \mu(x) = \frac{1}{2\ell} f(x) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left[\mu(x) - \mu(s) \right] \frac{\cos \psi_x}{r_x} ds$$

y buscamos un desarrollo en serie para:

$$(11) \mu(x) = \frac{1}{2\pi} \mu_0(x) + \lambda \mu_1(x) + \dots + \lambda^n \mu_n(x) + \dots$$

que satisfaga la ecuación (10), donde:

$$\mu_0(x) = f(x)$$

$$\mu_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} [\mu_0(x) - \mu_0(s)] \frac{\cos \psi_x}{r_x} ds$$

.....

$$\mu_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} [\mu_{n-1}(x) - \mu_{n-1}(s)] \frac{\cos \psi_x}{r_x} ds$$

La serie (11) es conocida como serie de C. Neumann. Claramente μ_i es de período ℓ para toda i y, si μ_i resulta continua para toda i y (11) uniformemente convergente para $\lambda=1$, entonces $\mu(x)$ debe ser una función continua y de período ℓ que satisface la relación (9).

Pero, efectivamente, se puede probar que (11) es una serie uniformemente convergente para $\lambda=1$ y que μ_i es continua para toda i (Ver el "Cours D'analyse Math." de Goursat, Vol. III).

De manera que la función μ , obtenida mediante la serie de Neumann sustituida en la ecuación $W = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \mu \frac{\cos \psi}{r} ds$, nos permite obtener la resolución del problema de Dirichlet para la región Ω .

Las ecuaciones integrales

El método de C. Neumann que proporciona un teorema de existencia, restringido, sin embargo, a regiones convexas, lleva a considerar una ecuación de la forma,

$$f(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy = g(x) \quad (1)$$

(donde las funciones $g(x)$ y $K(x,y)$ son conocidas) llamada siguiendo la terminología de Hilbert, una ecuación integral*.

Supongamos que $K(x,y)$ es una función continua en el cuadrado $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ y supongamos que $\psi(x)$ es una función integrable entonces la integral $\int_a^b K(x,y) \psi(y) dy$ tiene sentido y es una función continua de x que denotaremos por $K\psi$, lo que nos permite escribir (1) en la forma $f = g + Kf$. (2)

Ahora vamos que tras el método de Neumann para el problema de Dirichlet subyace la idea de demostrar que las aproximaciones sucesivas† para una ecuación de la forma (1) convergen bajo ciertas restricciones.

* Estas ya aparecían en 1782 en trabajos de Laplace

† El método de las aproximaciones sucesivas fue investigado por Liouville (1809-1882) en 1827-38.

Es fácil mostrar que la serie de Neumann asociada a la ecuación (2) converge uniformemente si $M = \max |K(x,y)| < \frac{1}{b-a}$ ya que entonces el término general de la serie (3) no excede

$$M^n \int_a^b |g(x)| dx (b-a)^{n-1} \text{ a partir del segundo término.}$$

Tratemos de resolver (2) por un método de aproximaciones sucesivas, tomando como primera aproximación de f la función $f_0 \equiv 0$ y poniendo

$$\begin{aligned} f_1 &= g, \quad f_2 = g + Kf_1 = g + Kg, \\ f_3 &= g + Kf_2 = g + Kg + K^2g, \dots \\ f_n &= g + Kf_{n-1} = g + Kg + \dots + K^{n-1}g, \end{aligned}$$

donde K^n esta definida por inducción:

$$K^0 = I, \quad K^1g = Kg \text{ y si } n \geq 2, \quad K^n = K(K^{n-1}g)$$

Hemos pues, obtenido la llamada serie de Neumann (3) $g + Kg + \dots + K^n g + \dots$ que, de converger uniformemente a una suma f , resuelve (2) ya que entonces podríamos integrar término a término y obtener

$$Kf = K \left(\sum_{n=0}^{\infty} K^n g \right) = \sum_{n=1}^{\infty} K^n g = f - g, \text{ i.e.}$$

$$f = g + Kf$$

El método de Fredholm.

Eric Ivar Fredholm (1866-1927) publicó en 1900 la primera teoría completa para la resolución de ecuaciones integrales de la forma

(4) $f(x) - \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy = g(x)$ donde λ es un parámetro en general complejo, la función $K(x,y)$ llamada el núcleo de la ecuación es acotada y continua y la función $g(x)$, dada, es continua.

La teoría de Fredholm se basa en una idea que ya había sido utilizada por Vito Volterra (1860-1940) y que esbozaremos a continuación.

La ecuación (4) podemos considerarla como el caso límite de la ecuación.

(5) $g(x) = f(x) - \lambda \sum_{k=1}^n K(x, \xi_k) f(\xi_k) \delta$, donde $\delta = \xi_k - \xi_{k-1}$
 $\xi_0 = a$, $\xi_n = b$. Esta ecuación, de ser válida para $a \leq x \leq b$, debe serlo cuando x toma los valores ξ_1, \dots, ξ_n . Si escribimos $f_\ell = f(\xi_\ell)$ ($\ell = 1, \dots, n$), $K_{k\ell} = K(\xi_k, \xi_\ell)$, $g_k = g(\xi_k)$

Podemos entonces investigar el sistema

$$f_k - \lambda \delta \sum_{\ell=1}^n K_{k\ell} f_\ell = g_k \quad (6)$$

Este sistema de ecuaciones tiene solución única si el determinante formado con los coeficientes de f_k no se anula, esto es si

$$0 \neq \Delta_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \delta K_{11} & - \lambda \delta K_{12} & \dots & - \lambda \delta K_{1n} \\ - \lambda \delta K_{21} & 1 - \lambda \delta K_{22} & \dots & - \lambda \delta K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ - \lambda \delta K_{n1} & - \lambda \delta K_{n2} & \dots & 1 - \lambda \delta K_{nn} \end{vmatrix}$$

y $\Delta_n(\lambda)$ puede desarrollarse en potencias de λ en la forma

$$(7) \quad 1 - \lambda \delta \sum_k K_{kk} + \frac{\lambda^2 \delta^2}{2!} \sum_{k,l} \begin{vmatrix} K_{kk} & K_{kl} \\ K_{lk} & K_{ll} \end{vmatrix} - \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{\lambda^n \delta^n}{n!} \sum_{k_1, \dots, k_n} \begin{vmatrix} K_{k_1 k_1} & K_{k_1 k_2} & \dots & K_{k_1 k_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{k_n k_1} & K_{k_n k_2} & \dots & K_{k_n k_n} \end{vmatrix}$$

Aquí Fredholm pasa al límite de una manera formal - diríamos escribe las sumas como integrales- y procede a considerar la serie

$$(8) \quad 1 - \lambda \int_a^b K(\xi_1, \xi_1) d\xi_1 + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(\xi_1, \xi_1) & K(\xi_1, \xi_2) \\ K(\xi_2, \xi_1) & K(\xi_2, \xi_2) \end{vmatrix} d\xi_1 d\xi_2 - \dots$$

Para demostrar, seguidamente, que tal serie converge uniformemente para todos los valores de λ . Su suma Δ es conocida como determinante de Fredholm.

Si llamamos $\Delta_n(\xi_k, \xi_l)$ al cofactor del término que en $\Delta_n(\lambda)$ contiene a $K(\xi_k, \xi_l)$, la solución del sistema (6) es, en virtud de la fórmula de Crámer:

$$f(\xi_k) = \frac{1}{\Delta_n(\lambda)} \sum_{\ell=1}^n f(\xi_\ell) \Delta_n(\xi_k, \xi_\ell) \quad (9)$$

y el límite formal $\Delta(x, y; \lambda)$ del numerador de (9) es:

$$\Delta(x, y; \lambda) = \lambda K(x, y) - \lambda^2 \int_a^b \begin{vmatrix} K(x, y) & K(x, \xi_1) \\ K(\xi_1, y) & K(\xi_1, \xi_1) \end{vmatrix} d\xi_1$$

$$+ \frac{\lambda^3}{2} \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(x, y) & K(x, \xi_1) & K(x, \xi_2) \\ K(\xi_1, y) & K(\xi_1, \xi_1) & K(\xi_1, \xi_2) \\ K(\xi_2, y) & K(\xi_2, \xi_1) & K(\xi_2, \xi_2) \end{vmatrix} d\xi_1 d\xi_2$$

que también muestra que converge para cualquier valor de λ y en consecuencia, podemos obtener la solución de la ecuación integral en la forma

$$(10) \quad f(x) = g(x) + \int_a^b g(\xi) \frac{\Delta(x, \xi; \lambda)}{\Delta(\lambda)} d\xi \quad \text{siempre que la ecuación tenga solución. i.e: cuando la solución existe, no puede ser sino (10)}$$

La investigación del comportamiento de las soluciones de (6) cuando $n \rightarrow \infty$ fue llevada a cabo -con éxito- por Hilbert, que mostró que tales soluciones tienen por límite la solución de (4) bajo ciertas condiciones.

Las ecuaciones integrales tienen no solo la importancia histórica de haber sido la primera rama del análisis funcional, sino que además fueron una de las importantes motivaciones para posteriores desarrollos, especialmente para la teoría general de operadores lineales, teoría que iluminó multitud de problemas del análisis y de la física matemática, como principio unificador y también desarrollando métodos prácticos para su resolución.

Uno de los más inspirados artifices del análisis en nuestro siglo y pionero del análisis funcional, el ingenioso caballero magfar F. Riesz, fue el primero que desarrolló sistemáticamente la teoría de operadores lineales, a la luz de la cual también aparecieron más transparentes resultados, hasta entonces opacados por engorrosas técnicas.

Ilustraremos esta situación con el siguiente ejemplo:

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones integrales:

$$(22) \quad \int_0^1 f_i(x)g(x)dx = c_i \quad i=1, \dots, n$$

donde las f_i son funciones dadas en espacio L^q , medibles en el intervalo $[0,1]$ y las C_i son constantes. Deseamos demostrar que la condición necesaria y suficiente para que el sistema (22) tenga una solución g en espacio L^p , donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, es que exista un número $M > 0$ tal que para $i=1, \dots, n$

$$\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i \right| < M \left(\int_0^1 \lambda_i f_i^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Con anterioridad bosquejamos los métodos clásicos para la resolución de ciertas ecuaciones integrales lo que probablemente dará al lector una idea de las dificultades técnicas que se tendrían que superar para resolver el problema planteado por el sistema (22). Para ilustrar la potencia de los métodos del análisis funcional, lo obtendremos como un corolario de un resultado más general debido a Riesz.

Hacemos notar que los matemáticos de principios de siglo ya manejaban varias ideas que habrían de resultar importantes para el análisis funcional, pero tal importancia pasó desapercibida. Fue precisamente Riesz quien observó en estos resultados el papel que jugaban ciertas propiedades como la linealidad, de hecho gran parte del trabajo de Riesz se dedica a estudiar lo que hoy llamamos transformaciones, aplicaciones u operaciones lineales, a las que él daba el nombre de sustituciones lineales, debido a que en la teoría

de las formas cuadráticas una aplicación lineal describe una sustitución de coordenadas. A las sustituciones lineales continuas Riesz las llamaba distributivas.

Observemos que si consideramos una transformación lineal que va de un espacio vectorial normado de dimensión finita en otro, ésta es necesariamente continua, propiedad que no es necesariamente válida si existe un número $N > 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leq N \|x\|_E$ (23) donde T es la transformación lineal de E en F que estamos considerando y los subíndices nos indican que se trata de las normas en E y F respectivamente.

Es interesante señalar que entre las propiedades de dichas transformaciones, puestas de manifiesto por Riesz (sin utilizar, claro está, la terminología moderna) es que tales transformaciones forman un espacio vectorial normado*, que resulta completo para la métrica inducida por su norma, esto es, que forman lo que hoy llamamos un espacio de Banach que con justicia podríamos llamar espacio de Riesz.

El caso en que F es de dimensión uno, o si se quiere el continuo lineal o recta real, también fue objeto de estudio en aquellos tiempos. Y al espacio de todas las aplicaciones

* Donde la norma la obtenemos considerando el más pequeño de tales números N .

lineales continuas de un espacio de Banach E en la recta real \mathbb{R} se le llama hoy en día espacio conjugado o dual de E que denotaremos con E' por cierto, ya que E' es un espacio de Banach, los elementos de E los podemos considerar como transformaciones sobre E' , es decir, si se tiene una aplicación lineal T sobre un número f , invertiremos los papeles de la aplicación y la variable. Con esto se puede observar que E es siempre un subespacio del dual de E' , y si además $E = (E)'$ decimos que E es un espacio reflexivo. Tal es el caso de los L^p que fueron muy estudiados por Riesz.

Esta idea de invertir los papeles de la transformación y la variable surgió primero en la geometría algebraica, alrededor del año 1882 dentro del gran trabajo de Dedekind y Weierstrass. Dieudonné afirma que es precisamente en ese momento que nacen las matemáticas modernas.

Ahora procederemos a enunciar el teorema de Riesz del que obtendremos la condición necesaria y suficiente para resolver (22)

Sea E un espacio de Banach reflexivo, Y_i una familia de elementos de su dual E' , entonces existe una solución $X \in E$ para el sistema

$$(24) \quad Y_i(X) = C_i \quad \text{donde } i=1,2,\dots,n \quad C_i \in \mathbb{R}$$

si y sólo si existe un número $M > 0$ tal que:

$$(22^1) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i < M \quad \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i \right\|$$

Se debe la primera demostración de este Teorema a Helly, en el año de 1912.

Demostraremos que la condición (22¹) es necesaria. Supongamos pues que existe una solución X , entonces:

$$\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i(X) \right|$$

Ahora consideremos a X como un operador lineal que actúa sobre cada Y_i . Dado que X es continua, existe un número $N > 0$ (en este caso podemos tomar $N = \|X\|$, por (23)) tal que

$$\|X(\lambda_i Y_i)\|_E \leq \|X\|_E \cdot \|\lambda_i Y_i\|_{E'}$$

Quedando con esto probada la primera parte del Teorema.

Suponiendo ahora que se cumple (22¹), buscaremos una definición adecuada del valor de X en $E^{11} = E$, cuando y varía en E^1 . Aunque no resulta fácil dar esta definición, es posible hacerlo para aquellos elementos y , que son combinaciones lineales

de las Y_i , pues en tal caso es evidente que definiremos a X

$$(25) \quad X\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i\right) = \sum_{i=1}^n C_i$$

En el caso particular en el que $\lambda_i=1$ para alguna i y $\lambda_i=0$ para todas las demás, tenemos que

$$X(Y_i) = C_i$$

Resultando X así definida, la solución del sistema (24).

Falta revisar que X está bien definida, cosa que haremos utilizando la condición cuya suficiencia estamos mostrando. Esto es, si se tienen 2 combinaciones lineales (de Y_i y Y_i^1) para una misma y , la transformación X valuada en la diferencia de dichas combinaciones tendrá que ser necesariamente cero, puesto que la diferencia es cero.

Para extender linealmente X sobre todo E^1 , haremos uso del Teorema de Hahn-Banach, demostrado en su generalidad como 10 o 15 años más tarde.

Teorema de Hahn-Banach:

Si tenemos un espacio de Banach F , un subespacio L de F y una

aplicación lineal S de L en R ($f \in L'$), entonces existe un elemento g en F' tal que: $g(x) = f(x)$ para toda X en L .

Aplicando este Teorema a nuestra situación, la X que definimos en cierto subespacio de E' , se puede extender a todo E , y por lo tanto X pertenece a E' y como E es reflexivo tenemos que X pertenece a E , con lo que queda demostrada la segunda parte del Teorema.

El lector puede checar que en el caso de que $E = L^q$, su dual es $E' = L^p$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y que entonces el Teorema que acabamos de probar, nos proporciona las condiciones para resolver (22).

Otro espacio muy estudiado por Riez en aquel tiempo, es el espacio de todas las funciones continuas sobre el intervalo cerrado $0,1$, y que denotaremos por $C[0,1]$.

Una cuestión natural es la de averiguar cuales son las aplicaciones lineales de $C[0,1]$ en R , pregunta que se hizo por primera vez Hadamard en 1904, quien demostró incluso que si se tiene T una aplicación tal, entonces existe una sucesión de funciones continuas $\{g_i\}$ con la propiedad de que:

$$T(f) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) g_i(x) dx$$

Y aunque esto podría resultar una cierta manera de representar el dual de $C[0,1]$, podrían surgir problemas en el momento en que dos sucesiones distintas dieran lugar a una misma $T(f)$. Fue a raíz de tal situación que Riesz demostró su famoso Teorema de Representación, que afirma que si se tiene una transformación lineal y continua T , que va de $C[0,1]$ en \mathbb{R} , entonces existe una función α de variación acotada, tal que

$$T(f) = \int f d\alpha$$

Lo que equivale a decir que el dual de $C[0,1]$ es el espacio vectorial de las funciones de variación acotada.

Es interesante observar que en este Teorema Riesz utiliza el concepto de Integral de Stieljes, misma que conocía posiblemente porque la correspondencia Hermite-Stieljes fue muy estudiada en los círculos matemáticos húngaros.

Volvemos aquí a ocuparnos de las ideas del ingenioso caballero magiar, F. Riesz. Delinearemos un trabajo suyo sobre las ecuaciones funcionales lineales, (Über lineare Funktionalgleichung, Acta Mathematica, vol. 41, 1918, pags. 71-98). Este trabajo no es muy conocido, pero los resultados esenciales del mismo aparecen en el libro clásico de Riesz y Nagy, Leçons d'Analyse Fonctionnelle. Este trabajo, a la vez que viene al final del desarrollo descrito en las conferencias anteriores, es el primero de una serie de brillantes trabajos sobre Análisis Funcional debidos a Banach, Steinhaus y otros de quie-

nes se hablará posteriormente. N. Bourbaki ha dicho que el mencionado trabajo de Riesz es una obra maestra de análisis axiomático.

Aunque no es posible entrar aquí en detalle, se discutirán algunas de las ideas importantes del trabajo, entre las cuales está, sin duda, la de la estructura de una teoría de ecuaciones.

Para ejemplificar esta idea se discutirá primeramente la Teoría de Ecuaciones en espacios vectoriales de dimensión finita.

Consideremos el sistema de m ecuaciones con n incógnitas

$$(1) \quad \begin{array}{r} A_{11}X_1 + \dots + A_{1n}X_n = b_1 \\ \vdots \\ A_{m1}X_1 + \dots + A_{mn}X_n = b_m \end{array}$$

que hoy en día se escribe $u(x) = b$, donde $u: R^n \rightarrow R^m$ es una aplicación lineal que puede ser representada por la matriz $A = (A_{ij})$. Decir que (1) tiene solución es equivalente a decir que $b = (b_1, \dots, b_m) \in R^m$ está en la imagen de la aplicación u .

Obtendremos a continuación un resultado sencillo, pero básico. Para ello nos valdremos de un teorema válido en un

contexto más general, el del Algebra Abstracta, y que dice que si u es un homomorfismo de un grupo E en otro, entonces $\text{Im } u \cong E/\ker u$; esta afirmación es llamada primer teorema de isomorfismo. Una aplicación lineal de un espacio vectorial en otro es, en particular, un homomorfismo; así, de lo anterior se sigue que

$$(2) \dim \text{Im } u = \dim E - \dim \ker u.$$

Podemos reescribir (2) de la siguiente manera:

$$(3) \dim \ker u - (\dim E - \dim \text{Im } u) = 0$$

Nótese que el miembro izquierdo de (3) no siempre tiene sentido si E es un espacio de dimensión infinita, ya que pueden aparecer expresiones del tipo $\infty - \infty$. Definamos el conúcleo de u como $\text{coker } u = E/\text{Im } u$ y el índice de u como $X^{(u)} = \dim \ker u - \dim \text{coker } u$. En el caso de que E tenga dimensión finita, $X^{(u)}$ no es sino el miembro izquierdo de (3). La ventaja de introducir la definición de conúcleos es que $\dim \text{coker } u$ siempre tiene sentido y $\dim E - \dim \text{Im } u$ no siempre lo tiene. Aún así, $X^{(u)}$ no necesariamente está definido.

Sea $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal. En este caso, según vimos, $X^{(u)} = 0$ y de este hecho resulta una buena parte de la Teoría de

Ecuaciones en los espacios euclidianos, que formularemos de manera análoga a la Alternativa de Fredholm:

I. O bien $\ker u = \{0\}$, es decir $u(x)=0$ no tiene solución no trivial, y entonces $\dim \operatorname{Im} u = n$, de donde $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^n$, lo que significa que $u(x)=b$ siempre tiene solución (única).

II. O bien $\ker u \neq \{0\}$, es decir $u(x)=0$ tiene soluciones no triviales; en tal caso $\dim \operatorname{Im} u < n$, de donde $\operatorname{Im} u \neq \mathbb{R}^n$, y esto quiere decir que $u(x)=b$ no siempre tiene solución; además, si ésta existe, no es única. En esta segunda parte, se plantea el problema de caracterizar los vectores $b \in \mathbb{R}^n$ que están en $\operatorname{Im} u$, es decir, tales que $u(x)=b$ tiene solución. Enunciaremos el teorema que resuelve este problema. Antes, un breve comentario sobre una idea de la que se hará uso inmediatamente después. Recordemos que cuando $\dim E < \infty$, E es isomorfo a su dual E^* y, por lo tanto, $E = E^{**}$.

Se acostumbra identificar estos dos espacios y se dice entonces que E y E^* son duales uno del otro. Esto corresponde a la idea siguiente: en el símbolo $y(x)$, $y \in E^*$, $x \in E$, y denota un elemento fijo, mientras que x varía; podemos intercambiar los papeles, es decir, considerar que x está fijo y y varía. A cada $y \in E^*$ asociamos entonces el número $y(x)$; esta asociación es lineal, convirtiéndose así x en un elemento de E^{**} .

Teorema: $\operatorname{Im} u = (\ker {}^t u)^\perp$. Donde ${}^t u$ denota la transformación adjunta de u y $(\ker {}^t u)^\perp$ significa el aniquilador de $\ker {}^t u$

1) Sea $y \in \text{Im } u$, i.e. $y = u(x)$, y sea $y^1 \in \ker {}^t u$. Escribiremos $\langle f, x \rangle$ para denotar el valor de la función f en x .

Entonces $\langle y, y^1 \rangle = \langle y^1, y \rangle = \langle y^1, u(x) \rangle = \langle {}^t u(y^1), x \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$, y esto es cierto para toda $y^1 \in \ker {}^t u$. $\therefore y \perp (\ker {}^t u)^\perp$

2) Sea $y \in (\ker {}^t u)^\perp$. Hay que encontrar $x \in E$ tal que $u(x) = y$.

Definamos una forma lineal x sobre $\text{Im } {}^t u \subset E^*$, por

$w = {}^t u(y^1) \quad x \langle y, y^1 \rangle$; hay que demostrar que la imagen de w no depende de su representación, i.e. si $w = {}^t u(z^1)$ entonces $\langle y, z^1 \rangle = \langle y, y^1 \rangle$. Pero ${}^t u(y^1) = {}^t u(z^1) \Rightarrow y^1 - z^1 \in \ker {}^t u \Rightarrow \langle y, y^1 - z^1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle y, y^1 \rangle = \langle y, z^1 \rangle$.

Extendamos ahora linealmente x a todo E^* ; x es un elemento de E^{**} , que habíamos identificado con E . Finalmente, $\langle y, y^1 \rangle = \langle x, {}^t u(y^1) \rangle = \langle {}^t u(y^1), x \rangle = \langle y^1, u(x) \rangle = \langle u(x), y^1 \rangle$, para toda $y^1 \in E^*$. $\therefore y = u(x)$.

Recordemos que, si M es un subespacio de E , entonces $M^\perp = \left(\frac{E}{M} \right)^*$ ($h: M^\perp \rightarrow \left(\frac{E}{M} \right)^*$, dado por $h(f) = f$, donde $\bar{f}([x]) = f(x)$, es un isomorfismo, lo que nos permite identificar f y \bar{f}). Por lo tanto, $\dim \text{Im } u = \dim (\ker {}^t u)^\perp = \dim \left(\frac{E^*}{\ker {}^t u} \right)^* = \dim E - \dim \ker {}^t u$; esto se enuncia, usualmente diciendo que la ecuación $u(x) = 0$ y ${}^t u(x) = 0$, su transpuesta, tienen el mismo número de soluciones linealmente independientes.

Poco o nada de esta Teoría es válido en espacios de dimensión infinita. Por ejemplo, en \mathbb{R}^∞ , la transformación dada por

$(X_1, X_2, X_3, \dots) \rightarrow (X_2, X_3, \dots)$ es suprayectiva, pero su núcleo no es cero, hecho que invalida la parte I de la alternativa; el índice de esta transformación es 1.

Se ha tenido éxito, en el caso de algunos espacios de dimensión infinita interesantes, en caracterizar la clase de transformaciones cuyo índice es cero. Por otra parte, la determinación explícita del índice de una transformación dada ha cobrado una importancia cada vez mayor y en este sentido se ha obtenido uno de los logros más espectaculares de toda la Matemática en los últimos diez años.

Como ya se hizo notar, la Teoría desarrollada no es válida en un espacio de Banach cualquiera; si consideramos la clase de todas las aplicaciones lineales en tal espacio; hay que seleccionar entonces una subclase que permite reconstruir la Teoría.

Esto es precisamente lo que hizo Riesz en su trabajo de 1918. Antes de entrar en materia haremos una observación de interés histórico. En el citado trabajo, Riesz considera el conjunto

$C[a, b]$ de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y hace notar las siguientes propiedades:

1a. Que $C[a, b]$ es lo que él llama un sistema lineal y que hoy en día llamaríamos espacio vectorial.

2a. Que $\|f\| = \max_x |f(x)|$ es una "longitud" en el sentido de que satisface las propiedades que, con la terminología moderna, definen una norma.

3a. Que si $(f_n) \subset C[a, b]$ satisface que $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ cuando $n, m > N(\epsilon)$, entonces existe $f \in C[a, b]$ tal que $\|f - f_n\| < \epsilon$, si $n > M(\epsilon)$. (Hoy diríamos que $C[a, b]$ es un espacio completo). Además, dice que no utilizará las propiedades concretas de $C[a, b]$, sino sólo las enunciadas anteriormente. Por ello, suele este considerarse como el primer trabajo en que se utiliza el concepto de espacio de Banach (que debería entonces llamarse de Riesz), aunque la terminología es posterior.

Ahora bien, ¿cuáles son las transformaciones que Riesz considera? Son las del tipo $u = I - v$, donde v es "completamente continua". Esto quiere decir lo siguiente: Decimos que v es completamente continua si toda subsucesión contiene otra que converge; si siempre que (X_n) es acotada, $(v(X_n))$ es compacta, entonces v es completamente continua.

Observa Riesz, sin la terminología actual, que la clase de las transformaciones completamente continuas es un ideal izquierdo y derecho en el álgebra de las aplicaciones lineales continuas.

Demuestra después el siguiente teorema, que hoy lleva su nombre:

Un subespacio H de E tiene dimensión finita si y sólo si, cada sucesión acotada en H es compacta.

A continuación damos una demostración del teorema.

Si H tiene dimensión finita, una bola cerrada en H es compacta; por lo tanto, si una sucesión está contenida en una bola, es compacta.

Ahora, si cada sucesión acotada en H es compacta, en particular toda sucesión contenida en la bola unidad es compacta, entonces ésta es compacta. Démosle una cubierta con bolas de radio $1/2$; existe una subcubierta finita, $\{V_{1/2}(\alpha_i) \mid i=1, \dots, n\}$.

Sea V el espacio generado por $\{\alpha_i\}$. Entonces $V=H$; en efecto, supongamos que existe $x \in H$ tal que $x \notin V$. Por ser V cerrado, tenemos que $d = d(x, V) > 0$, por definición de $d(x, V)$, existe $y \in V$ tal que $a < \|x-y\| < (3/2)a$. Sea $Z = (x-y) / \|x-y\|$;

$\|Z\| = 1$, por lo que existe un índice i tal que $\|Z - \alpha_i\| \leq 1/2$.

Se puede escribir $x = y + \|x-y\|Z = y + \|x-y\|\alpha_i +$

+ $\|x-y\| \|z-\alpha_i\|$, donde $y + \|x-y\| \alpha_i \in V$. Entonces $d(x, y + \|x-y\| \alpha_i) = \|x-y\| \|z-\alpha_i\| \geq a$ y de aquí que $\|x-y\| \geq 2a$, que contradice la elección de y .

Conviene aclarar que la demostración dada aquí es moderna y que Riesz en 1918 no estaba familiarizado con algunos de los conceptos que en ella se utilizan.

Riesz deduce de este teorema toda la teoría por medio de una cadena de pequeñas demostraciones. Recordemos que la idea central era probar que $X^{(u)} = 0$; para ésto, nos interesa saber antes que $X^{(u)}$ está definido, i.e. que $\ker u$ y $\operatorname{coker} u$ sean de dimensión finita. He aquí algunos de los hechos importantes:

1) $\dim \ker u < \infty$. Demostraremos este hecho para ilustrar el uso del teorema.

$I = v$ sobre $\ker u$. Sea $(X_n) \subset \ker u$, acotada. Entonces $(v(X_n))$ es compacta. Pero $(v(X_n)) = (X_n)$. Puesto que (X_n) es arbitraria, $\ker u$ tiene dimensión finita.

2) $\ker(u^n)$ tiene dimensión finita para toda n . Esto es consecuencia de 1), ya que $u^n = (I-v)^n = I-w$, donde w es completamente continua, debido a que la clase de las aplicaciones completamente continuas es un ideal.

Si $u^n(x)=0$, entonces $u^{n+1}(x)=u(u^n(x))=0$ es decir, $\ker(u^n) \subset \ker(u^{n+1})$. Ahora bien, si $\ker(u^n)=\ker(u^{n+1})$ para alguna n , entonces $\ker(u^m)=\ker(u^n)$ para toda $m>n$, ya que si $u^m(x)=0$, entonces $u^{n+1}(u^{m-n-1}(x))=0$; pero $\ker(u^n)=\ker(u^{n+1})$, de donde $u^n(u^{m-n-1}(x))=u^{m-1}(x)=0$, i.e. $x \in \ker(u^{m-1})$ lo que prueba que $\ker(u^{m-1})=\ker(u^m)$ y esto completa la inducción.

Entonces, o bien $(\ker(u^n))$ crece indefinidamente, o bien $\ker(u^n) = \ker(u^{n+1}) = \dots$ para alguna n . Riesz prueba que esto último es lo que sucede.

Para $\text{Im}(u^n)$ ocurre algo análogo. Aquí $\text{Im}(u^n) \supset \text{Im}(u^{n+1})$ y si $\text{Im}(u^n) = \text{Im}(u^{n+1})$ entonces $\text{Im}(u^n) = \text{Im}(u^{n+1}) = \dots = \text{Im}(u^m) = \dots$

Nuevamente como consecuencia del teorema fundamental, Riesz prueba que es esta última posibilidad la que tiene lugar y que el índice n a partir del cual las imágenes coinciden es el mismo que en el caso anterior. Vale la pena señalar que es en este trabajo de Riesz en el que por primera vez aparece el concepto de "cadena", desarrollado posteriormente en el terreno del Algebra Abstracta por E. Noether.

A partir de estos lemas, Riesz demuestra la Alternativa de Fredholm, en particular, que $u(x)=y$ tiene solución si y sólo si $y \in (\ker^t u)^\perp$. Un desarrollo detallado de la Teoría puede encontrarse en el libro de Riesz y Nagy citado al principio.

Volvamos ahora al problema que nos ocupó al principio y cuyo importante papel en el desarrollo del Análisis Funcional hemos tratado de ilustrar, a saber: el problema de Dirichlet.

Consideremos el caso más sencillo, cuando la región que nos interesa es el círculo unitario. Describamos los puntos del círculo por medio de coordenados polares; en el caso de los puntos sobre la circunferencia basta dar el ángulo ψ . Sea $f(\psi)$ continua sobre la circunferencia. Buscamos una función u , armónica en el interior, continua en el disco cerrado y tal que su restricción a la circunferencia es f . La idea de H. Schwarz es la siguiente:

Desarrollemos f en su serie de Fourier:

$$f(\psi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\psi + B_k \sen k\psi)$$

Definamos la función u de la siguiente manera:

$$u(r, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (A_k \cos k\phi + B_k \sen k\phi)$$

La serie que define a u es uniformemente convergente para $r < 1$, ya que, debido a un Teorema clásico de Riemann, A_k ,

$B_k \rightarrow 0$; entonces $|a_k \cos k\phi + b_k \sin k\phi| < |a_k| + |b_k| < M$;
 además la serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ converge uniformemente para $r < 1$.

Sea $Z=r(\cos \psi + i \sin \psi)$, entonces, por la fórmula de Moivre $Z^k = r^k(\cos k\phi + i \sin k\phi)$, que, como es sabido, es una función analítica. Pero, tanto la parte real como la imaginaria de una función analítica, son funciones armónicas; entonces lo son $r^k \cos k\phi$ y $r^k \sin k\phi$, de donde resulta que u es una serie uniformemente convergente de funciones armónicas y es, por lo tanto, armónica.

Sabemos además que $u(1, \phi) = f(\phi)$ entonces sólo falta probar que u es continua en todo el disco cerrado, es decir tenemos que probar que $\lim_{r \rightarrow 1} u(r, \phi) = f(\phi)$.

Para esto vamos a utilizar un viejo Teorema debido a H. Abel (1802-1829), que enunciaremos a continuación para demostrarlo posteriormente:

Teorema de Continuidad de Abel:

Si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge a s , entonces $\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} r^k a_k = s$.

En nuestro caso, si la serie de Fourier de f converge a f , entonces $\lim_{r \rightarrow 1} u(r, \phi) = f(\phi)$. Sólo que la primera afirmación

no siempre es cierta según probó mediante un contraejemplo el propio Schwarz.†

Un discípulo de Schwarz, el Húngaro Fejér (1880-1960) se enteró de un método del italiano Césaró que Borel exponía en París, por medio del cual "podemos hacer" convergentes series que son divergentes en el sentido usual.

La idea es tomar, no la sucesión de las sumas parciales, sino la sucesión de los promedios aritméticos de éstas, esto es $\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}$, donde s_n es la n-ésima suma parcial de $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$; si $\{\sigma_n\}$ converge, entonces se dice que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ es sumable según Césaró o sumable (C). Decíamos que con este método se puede sumar algunas series que no convergen por ejemplo $1-1+1-1\dots$ cuya suma de Césaró es $1/2$.

Fejér escuchó lo anterior con mucha atención y algunos meses más tarde, probó el Teorema que hoy lleva su nombre: "Si f es continua y de período 2π en \mathbb{R} , entonces las Sumas de Césaró de su Serie de Fourier convergen uniformemente a f en todo intervalo cerrado de la recta.

Daremos un esbozo de la demostración que esta basada en varios hechos:

† Véase E.W. Haleson, "The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series", Vol. II pag. 545, Dover Publications Inc.

(1) Si f es continua y de periodo 2π , entonces se puede aproximar uniformemente por una poligonal B , continua y de periodo 2π .

(2) La Serie de Fourier de B converge a B uniformemente y, por lo tanto, las Sumas de Césaró también (que la convergencia usual implica la de Césaró se probará más adelante).

(3) Si M es el máximo de $|f(x)|$, entonces $|\sigma_n(x)| \leq M$ para toda n y toda x .

Sea ahora $g(x) = f(x) - B(x)$. De acuerdo con (1) $|g(x)| < \varepsilon \forall x$; sean $\sigma_n^1, \sigma_n^{11}$ las n -ésimas sumas de Césaró de g y B , respectivamente. Obviamente se tiene que $\sigma_n(x) = \sigma_n^1(x) + \sigma_n^{11}(x) \forall x$; se sigue que $|f(x) - \sigma_n(x)| \leq |g(x)| + |\sigma_n^1(x)| + |B(x) - \sigma_n^{11}(x)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \forall x$ donde $|\sigma_n^1(x)| < \varepsilon$ de (3) y $|B(x) - \sigma_n^{11}(x)| < \varepsilon$ de (2).

Con este Teorema Fejér pudo resolver el problema de Dirichlet para el Círculo utilizando una pequeña generalización del

Teorema de Abel: si $\sigma_n \rightarrow s$ entonces $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} C_k r^k = s$.

Es conveniente notar que Fejér se dió cuenta de que su Teorema era, más que un medio para demostrar, un caso particular del problema de Dirichlet, (del cual ya se conocían

demostraciones), un Teorema muy importante en el desarrollo de las Series de Fourier que entonces, y aún ahora, facilita algunos problemas en la determinación de su convergencia.

Antes de continuar calcularemos $u(r, \phi)$. Los Coeficientes de Fourier de u son:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos k\psi \, d\psi,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \operatorname{sen} k\psi \, d\psi$$

Entonces

$$\begin{aligned} u(r, \phi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (\cos k\phi \cos k\psi + \operatorname{sen} k\phi \operatorname{sen} k\psi) \right] d\psi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(\phi - \psi) \right] d\psi \end{aligned}$$

La expresión entre las llaves, sumándole $1/2$, es la parte real de la progresión geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{ike}$ donde $e = \phi - \psi$.

Pero:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{ike} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 - re^{ie}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1 + re^{ie}}{1 - re^{ie}} = \frac{1 - re^{ie}}{1 - re^{ie}}$$

$= 1/2 \frac{1+2i r \operatorname{sen} \theta - r^2}{1-2i r \cos \theta + r^2}$. Substituyendo la parte real de

lo anterior tenemos que $u(r, \phi) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} f(\psi)$

$\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\phi-\psi)+r^2} d\psi = P(r, \phi)$ esto es, la integral de

Poisson que ya sabemos que resuelve el problema de Dirichlet.

Vemos, con lo anterior que el método utilizado no es esen-

cialmente distinto, a lo que entonces se había dicho. Lo

que se logró fue una demostración más simple y elegante

que el método directo seguido por Poisson.

La razón por la que hemos visto el método de Schwarz ha sido,

además del Teorema de Fejér, mencionar algunos Teoremas so-

bre convergencia de Series que, como más adelante veremos,

llevaron a uno de los Teoremas más importantes del Análisis

Moderno.

Hemos visto hasta ahora tres expresiones (sumas) asociadas

a una serie $\sum u_k$.

La Clásica que es considerar la suma como el límite de la

sucesión formada por las sumas parciales $\{S_n\}$. Si existe

este límite diremos que la serie converge.

Otra es, tomar la suma como el límite de la sucesión $\{\sigma_n\}$

donde $\sigma_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} s_k$, como ya antes dijimos, cuando el límite existe la serie será sumable según Césaro o sumable (C).

También mencionaremos una tercera expresión asociada a una serie

$$f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k r^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1-r)r^k s_k$$

Si $s_k \rightarrow s$ y $f(r) \rightarrow s$ cuando $r \rightarrow 1^-$ diremos que la Serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \text{ es sumable según Abel.}$$

Las expresiones anteriores asociadas a una serie se pueden considerar como casos particulares de asociar a una serie el límite de una sucesión $\{T_n\}$ donde $T_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} S_k$ (1)

Podemos abreviar poniendo esta última expresión $t=As$ donde $A(A_{nk})$ y T y S son los vectores infinitos formados por los T_n y los S_k respectivamente.

Explícitamente las expresiones que hemos asociado a una serie en la forma (1) serían:

Para la primera

$$T_n = s_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} s_k \text{ donde } A_{nk} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$$

La segunda

$$T_n = \sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} s_k \quad \text{donde } A_{nk} = \begin{cases} 1/n+1 & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

Y para la tercera podemos hacer $t_n = f(r)$ pero como r es un parámetro continuo, se debe substituir r por alguna expresión como $1-1/n$ o e que tienden a uno por la izquierda, cuando n tiende a infinito. Con tal substitución se obtiene la matriz (A_{nk}) . A los métodos de asociar una suma a una serie a través de la expresión de la forma (1) se les conoce como "Métodos de Sumación".

Si A y B son dos matrices que corresponden cada una a un método de sumación, siendo $t=As$ y $u=Bs$, se dice que B es más fuerte que A si siempre que $t_n \rightarrow L$ se tiene que $u_n \rightarrow L$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Con esta terminología, el Teorema de continuidad de Abel lo podemos expresar diciendo que la Sumación de Abel es más fuerte que la sumación por sumas parciales y la modificación del Teorema de Abel sería que la Sumación de Abel es más fuerte que la sumación de Césaró.

Otro teorema perteneciente a esta teoría pero que fue demostrado por Cauchy mucho antes de que la teoría fuera desarrollada como la estamos presentando, es:

Teorema. Si una serie es convergente, entonces es sumable-C y las sumas coinciden. Esto es, si $s_n \rightarrow L$ entonces $\sigma_n \rightarrow L$ cuando $n \rightarrow \infty$. Veamos la demostración. Si $s_n \rightarrow L$ dado $\varepsilon > 0$ $N > 0$ tal que $|s_n - L| < \varepsilon/2$ siempre que $n > N$ por otra parte

$$|\sigma_n - L| = \left| \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} - \frac{(n+1)L}{n+1} \right|$$

$$\leq \frac{|s_0 - L| + |s_1 - L| + \dots + |s_N - L|}{n+1} + \frac{|s_{N+1} - L| + \dots + |s_n - L|}{n+1}$$

Ahora bien, el segundo cociente lo podemos hacer menor que $\varepsilon/2$ ya que cada sumando del numerador es menor que $\varepsilon/2$, también el primer cociente se puede hacer menor que $\varepsilon/2$ tomando n suficientemente grande. Esto último se puede hacer puesto que el numerador de esta parte permanece constante.

Por lo tanto $|\sigma_n - L| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ y $\sigma_n \rightarrow L$.

Se dice que el método de sumación $t = As$, correspondiente a la matriz (A) es regular si $s_k \rightarrow s \Rightarrow t_n \rightarrow s$

Ahora pasemos a un teorema que dió gran impulso al análisis funcional y llevó directamente a lo que llamamos el "principio de la acotación uniforme": el teorema de Toeplitz.

El teorema de la acotación uniforme lleva ahora los nombres de Banach y Steinhaus, pero Toeplitz y Lebesgue habían descubierto la idea fundamental mucho tiempo antes, como lo veremos.

Toeplitz llegó a este teorema al tratar de hallar las condiciones que debe cumplir un método de sumación para ser regular. A primera vista, parecería que no existen unas condiciones que valgan para cualquier método, pero las condiciones que encontró Toeplitz son muy sencillas.

Teorema de Toeplitz (1911):

El método de sumación $t_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} s_k$ es regular si y sólo si:

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} |A_{nk}| = \alpha_n < H$

(ii) $A_{nk} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ para toda k

(iii) $A_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} \rightarrow 1$ si $n \rightarrow \infty$

DEMOSTRACION: 1) Las condiciones son suficientes:

Si $S_n \rightarrow S$, S_n es acotada luego, por (i), $\sum a_{nk} S_k$ es acotada $\Rightarrow \sum a_{nk} S_k$ es absolutamente convergente $\therefore t_n$ existe.

Supongamos primero que $S=0$

Sea $\epsilon > 0$, existe N tal que $|S_k| \leq \frac{\epsilon}{2H}$ si $k > N$

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k = \sum_{k=0}^N a_{nk} S_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{nk} S_k$$

Por (ii): $\left| \sum_{k=0}^N a_{nk} S_k \right| \leq \epsilon/2$ si $n \rightarrow \infty$

Por (i): $\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_{nk} S_k \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{nk}| |S_k| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$

Supongamos que $S \neq 0$

Sea $S_n^1 = S_n - S$, entonces $S_n^1 \rightarrow 0$

Sea $t_n^1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k^1$, entonces $t_n^1 \rightarrow 0$ por la primera parte de la demostración.

$$\text{Entonces } t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k^1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k^1 + S \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} =$$

$$= t_n^1 + S \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$$

como $t_n^1 \rightarrow 0$ y $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$, concluimos que

$$t_n \rightarrow 0 + S \cdot 1 = S \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

2) Las condiciones son necesarias.

(ii) es necesaria:

$$\text{tomemos } S_k = \begin{cases} 1 & \text{si } l=k \\ 0 & \text{si } l \neq k \end{cases}$$

$$\text{entonces } S_k \rightarrow 0, t_n = \sum_k a_{nk} S_k = a_{nn}$$

pero $t_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$

$\therefore a_{nn} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$

(iii) es necesaria:

Tomemos $S_n = 1$ para toda n .

Entonces $S_n \rightarrow 1$

$$t_n = \sum_k a_{nk} S_k = \sum_k a_{nk}$$

pero $t_n \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$

$$\therefore \sum_k a_{nk} \rightarrow 1 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

(i) es necesaria: Método de la Joroba Deslizante:

$$\text{Supongamos que } \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = \infty$$

$$\text{Sea } \alpha_{nk} = \sum_{\kappa=0}^k |a_{n\kappa}|$$

$$\text{Sea } \varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_{nk} < 1 \\ 1/2 & \text{si } 1 < \alpha_{nk} \leq 4 \\ \vdots & \\ 1/2\ell & \text{si } \ell < \alpha_{nk} \leq 4\ell \end{cases}$$

ε_k es una subsucesión de $(\frac{1}{n})$ $\therefore \varepsilon_k \downarrow 0$

Sea $S_k = \varepsilon_k$ con el signo de a_{nk} , entonces $S_k \rightarrow 0$, pero

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k |a_{nk}| \rightarrow \infty$$

Supongamos ahora que α_n no es acotado.

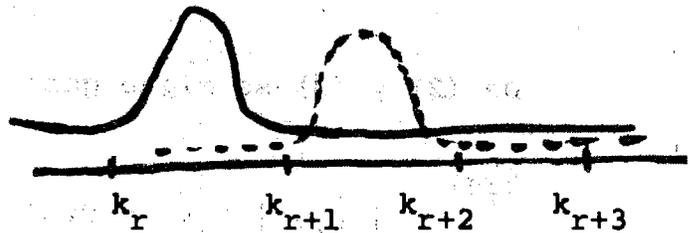
$$\text{Pongamos } \alpha_n = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|, \alpha_{n,k} = \sum_{\kappa=0}^k |a_{n\kappa}|$$

Ya sabemos que $\alpha_{n,k} \rightarrow \alpha_n$ cuando $k \rightarrow \infty$ y $a_{nk} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ implica que, para toda k , $\alpha_{nk} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Determinamos dos sucesiones:

$$n_1 < n_2 < \dots$$

$$k_1 < k_2 < \dots$$



de números enteros, con $k_1 \geq 0$ arbitrario

Supongamos inductivamente que ya tenemos n_1, \dots, n_{r-1} ;

k_1, \dots, k_r , vamos a determinar n_r, k_{r+1} ($r \geq 1$),

(1) (a_n) no acotado $\Rightarrow n_r > n_{r-1}$ tal que

$$|a_{n_r}| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n_r, k}| > r^2 + 2r + 2.$$

(2) $a_{n_r, k_r} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) \Rightarrow podemos tomar n_r tan grande que

$$|a_{n_r, k}| = \sum_{k=0}^{k_r} |a_{n_r, k}| < 1.$$

(3) $a_{n_r, k} \rightarrow a_{n_r}$ ($k \rightarrow \infty$) $\Rightarrow \exists k_{r+1} > k_r$ tal que $a_{n_r} - a_{n_r, k_{r+1}} =$

$$= \sum_{k > k_{r+1}} |a_{n_r, k}| < 1.$$

De (1) tenemos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n_r, k}| = \sum_{k \leq k_r} |a_{n_r, k}| + \sum_{k=k_r+1}^{k_{r-1}} |a_{n_r, k}| + \sum_{k > k_{r+1}} |a_{n_r, k}|$$

$$|a_{n_r, k}| > r^2 + 2r + 2$$

De (2) y (3) se sigue que:

$$\sum_{k=k_r+1}^{k_{r+1}} |a_{n_r, k}| > r^2 + 2r + 2 - \sum_{k \leq k_r} |a_{n_r, k}| - \sum_{k > k_{r+1}} |a_{n_r, k}|$$

$$|a_{n_r, k}| > r^2 + 2r$$

Tómese $S_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq k_1 \\ 1 & \text{con el signo de } a_{n_1, k} \text{ si } k_1 < k \leq k_2 \\ 1/2 & \text{con el signo de } a_{n_2, k} \text{ si } k_2 < k \leq k_3 \\ \vdots \\ 1/r & \text{con el signo de } a_{n_r, k} \text{ si } k_r < k \leq k_{r+1} \end{cases}$

Es claro que $S_k \rightarrow 0$.

Puesto que $|S_k| \leq 1$ tenemos que:

$$|t_{n_r}| > \frac{1}{r} \sum_{k=k_r+1}^{k_{r+1}} |a_{n_r, k}| - \sum_{k \leq k_r} |a_{n_r, k}| - \sum_{k > k_{r+1}} |a_{n_r, k}|$$

$$> \frac{1}{r} (r^2 + 2r) - 2 = r.$$

Luego $t_n \neq 0$. Contradicción.

El teorema de la continuidad de Abel se puede demostrar

como consecuencia del Teorema de Toeplitz. Sólo es necesario ver que el método de Abel cumple las tres condiciones.

$$\text{Aquí } t_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k S_k$$

$$\text{Condición (i): } \alpha_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - 1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot n = 1 \quad \therefore \alpha_n = 1 \quad \forall n \text{ y las } \alpha_n \text{ son acotadas.}$$

$$\text{Condición (ii): } a_{nk} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \rightarrow 0 = 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

para toda k

Condición (iii): Se ve de la demostración para la condición (i).

Igualmente, se puede comprobar que el método de Césaro es regular.

La última parte del teorema de Toeplitz se puede expresar como sigue:

$S = (S_n) \in C$, el espacio de las sucesiones convergentes con

la norma $\|S\| = \sup_n |S_n|$

$t_n(S) = \sum_k a_{nk} S_k$, $t_n = (a_{nk})_k \in C^1 = \ell^1$, el dual de C .

La norma es $\|t_n\| = \sum_k |a_{nk}| = \alpha_n$

Se supone que para toda $s \in C$, $(t_n(S))_n$ converge, en particular que es acotado. Se concluye que existe $H > 0$ tal que $\|t_n\| = \alpha_n < H$ para toda n .

Generalicemos: Sea E un espacio de Banach, E^1 su dual. $t_n \in E^1$, es decir que $|t_n(x)| \leq \|t_n\| \cdot \|x\|$ para toda $x \in E$.

Conclusión: existe $H > 0$ tal que $\|t_n\| < H$ para toda n .

Este es el "principio de la acotación uniforme".

DEMOSTRACION DEL PRINCIPIO DE LA ACOTACION UNIFORME POR EL METODO DE LA JORBA DESLIZANTE.

Supongamos que $\|t_n\|$ no es acotado. Es lícito suponer $\|t_n\| \rightarrow \infty$. Existe $x_n \in E$, $\|x_n\| = 1$ tal que $|t_n(x_n)| \geq 1/2$

Sea $(x) = \sup |t_n(x)| < \infty \quad \forall x \in E$ por hipótesis.

Determinemos $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ tal que $\frac{1}{6 \cdot 4^k} ||t_{n_k}|| > \frac{1}{4}$

$$\nu(x_{n_1}) + \dots + \frac{1}{4^{k-1}} \nu(x_{n_{k-1}}) + k = R_k + k$$

Ya que se puede encontrar n_k para toda k , existe $x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} x_{n_k} = \sum_{j < k} \frac{1}{4^j} x_{n_j} + \frac{1}{4^k} x_k + \sum_{j > k} \frac{1}{4^j} x_j = y_k +$

$$\frac{1}{4^k} x_{n_k} + z_k$$

$$|t_n(y_k)| \leq \frac{1}{4} \nu(x_{n_1}) + \dots + \frac{1}{4^{k-1}} \nu(x_{n_{k-1}}) = R_k$$

$$|t_n(z_k)| < \frac{1}{4^{k+1}} ||t_n|| + \dots = \frac{1}{4^{k+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} ||t_n|| = \frac{1}{3 \cdot 4^k} ||t_n||$$

Entonces $|t_n(x_0)| > \frac{1}{4^k} |t_n(x_{n_k})| - R_k - \frac{1}{3 \cdot 4^k} ||t_n||$

Tomemos $n = n_k$: $|t_{n_k}(x_0)| > \frac{1}{4^k} \cdot \frac{1}{2} ||t_{n_k}|| - R_k - \frac{1}{3 \cdot 4^k} ||t_{n_k}|| =$

$$= \frac{1}{6 \cdot 4^k} ||t_{n_k}|| = -R_k \geq k$$

Contradicción.

El teorema de Lebesgue por el cual se llega al mismo prin-

cipio dice que si $f \in C(0, 2\pi)$, $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \text{ Sen } kx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\text{Sen } \frac{1}{2}(2n+1)(t-x)}{\text{Sen } \frac{1}{2}(t-x)} dt$, la "inte-

gral de Dirichlet".

$t_n(f) = S_n(0)$. Se demuestra que $\|t_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}$

$$\left| \frac{\text{Sen } \frac{1}{2} (2n+1)t}{\text{Sen } \frac{1}{2}t} \right| dt = L_n, \text{ la constante de Lebesgue.}$$

Si $s_n(0) \rightarrow f(0)$ para toda f , $(t_n(f))$ acotado para toda f , entonces $\|t_n\| < H$.

Pero $L_n \rightarrow \infty$

(Fejér demostró que $L_n \sim \frac{4}{\pi^2} \log n$).

Retornando ahora al desarrollo histórico del Análisis Funcional, quisiéramos recordar el teorema de continuidad de Abel.

(A) Si $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ y $s_n \rightarrow s$ entonces $f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k a_k \rightarrow s$ cuando $t \rightarrow 1^-$

Uno puede preguntarse si el inverso de (A) es cierto, tomemos la serie $1-1+1=1\dots$, que no es convergente, pero si sumable según Césaró y por lo tanto según Abel. De aquí que la respuesta sea no.

Tauber en 1897, vió que, bajo ciertas restricciones, el

inverso si es cierto. Ello lo llevó a probar el siguiente teorema:

(T) Si $f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \rightarrow s$ $r \rightarrow 1^-$ y además $a_n = o(1/n)$, entonces $s_n \rightarrow s$.

Una condición suficiente para que un método de sumación implique uno más fuerte se llama condición Tauberiana.

Un Teorema como el de Continuidad de Abel, que no usa una condición Tauberiana, se llama Abeliano.

Como consecuencia de lo anterior tenemos que:

$$(T^1) \left. \begin{array}{l} \sigma_n \rightarrow s \\ a_n = o(1/n) \end{array} \right\} \Rightarrow s_n \rightarrow s$$

Cuando Tauber demostró el Teorema (T), no imaginó que daría origen a toda una teoría, algunos de cuyos puntos esenciales están contenidos en los siguientes Teoremas:

El primero de ellos es una generalización de (T¹) debida a G.H. Hardy (1910):

(H) Si $\sigma_n \rightarrow s$ y $a_n = o(1/n)$ es decir na_n es acotado, entonces, $s_n \rightarrow s$.

Si f es de variación acotada, a_n, b_n sus coeficientes de Fourier, entonces, $a_n, b_n = O(1/n)$. Se deduce entonces, del Teorema de Fejér y el de Hardy que siempre que sea f continua y de variación acotada, su serie de Fourier converge a ella. Este resultado es un caso particular de un famoso Teorema de Diriclet (1827), que no puede detenerse sin el Teorema de Hardy, puesto que Riesz demostró que existen funciones continuas de variación acotada cuyos coeficientes son $O(1/n)$ pero no $o(1/n)$.

Por ejemplo $\sum (1+a_k \cos n_k x) \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \delta > 1$

Esta función es un ejemplo de los ahora llamados productos de Riesz, que son importantes para el Análisis Armónico.

En 1910, Littlewood† demostró el Teorema (T) substituyendo la condición $a_n = O(1/n)$ por $a_n = o(1/n)$. Es decir,

$$(L) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \rightarrow s \quad r \rightarrow 1^- \quad a_n = o(1/n) \Rightarrow s_n \rightarrow s.$$

Posteriormente, J. Karamata (1930) demuestra de una manera muy sencilla el Teorema (L): y además, prueba otro Teorema.

$$(K) \quad \text{Si } a_n \geq 0 \quad \text{y } f(r) = \sum a_n r^n = \frac{c}{1-r} \quad (0 < r < 1)$$

i.e. $(1-r) f(r) \rightarrow c$ cuando $r \rightarrow 1^-$ entonces $s_n \rightarrow c$

† Esta demostración puede verse en "Algunos nuevos resultados de la Teoría de Funciones" de E. Landau

Hasta aquí el desarrollo cuantitativo de la Teoría. Aquél cambia cualitativamente en 1932, cuando Wiener demuestra su célebre Teorema Tauberiano. El enunciado de este Teorema involucrá algunos resultados y definiciones que daremos a continuación:

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ i.e. f , Lebesgue-integrable en \mathbb{R} , su transformada de Fourier está dada por: $\hat{f}(t) = [Ff](t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x t} dx$. Se puede probar que \hat{f} es continua, que $\max \hat{f}(T) \leq \|f\|_1$ y que si $t \rightarrow \infty$, entonces $\hat{f}(t) \rightarrow 0$.

La convolución de dos funciones f y g se define como:

$$[f * g](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt$$

Young demostró que $f * g$ tiene sentido si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$, $-1 > 0$; y entonces $(f * g) \in L^r$.

La Convolución es un producto en L^1 ; con este producto L^1 es un álgebra.

Hay una importante relación entre los conceptos de convolución y transformada de Fourier; es la siguiente:

$$F(f * g) = F(f) \cdot F(g)$$

Esto nos da un producto en $F(L^1)=A$ que hace de A un álgebra también, llamada de Wiener o de Fourier.

De la misma manera que el producto en A se define en términos del producto en L^1 , la norma en A se define en términos de la norma en L^1 , de la manera natural:

$$\|F(f)\|_A = \|f\|_1$$

Tanto L^1 como A son álgebras normadas. Además, $F: L^1 \rightarrow A$ es inyectiva y en virtud de la definición de norma y producto en A , F es un isomorfismo.

Teorema Tauberiano de Wiener (1932)

Sea $g \in L^1$ tal que $\hat{g}(t) \neq 0$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Sea f acotada i.e. $f \in L^\infty$. Supongamos $\int_{-\infty}^{\infty} g(z) dz$ cuando $x \rightarrow \infty$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} h(z) dz$ cuando $x \rightarrow \infty$ para toda $h \in L^1(\mathbb{R})$

Este Teorema es tan rico en implicaciones que suele llamarse "general". Como consecuencia de él se obtiene:

(W) si $f(r) = \sum a_n \gamma^n = (1-r) \sum s_n \gamma^{n+1}$ cuando $r \rightarrow 1^-$ y si $s_n = o(1/n)$, entonces $\sigma_n \rightarrow l$ cuando $n \rightarrow \infty$

Quizá más sorprendente resulte el hecho de que el viejo

Teorema de la distribución de los números primos

$$\Pi(x) = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$$

puede considerarse como un Teorema Tauberiano, consecuencia de (W).

En 1941, en un artículo de 20 páginas, aproximadamente, Gelfand introdujo el concepto de álgebra completa; además, desarrolló una elegante Teoría, y buscó una demostración general del Teorema de Wiener.

Haremos a continuación, un bosquejo de las ideas importantes de este artículo; empezando por la definición de un álgebra de Gelfand, que este llamó de Banach, por analogía con el concepto de espacio de Banach.

Consideremos ahora, un álgebra A , sobre C . Supongamos además, para simplificar, que existe e , tal que $ex=x$ $\forall x \in A$; y que $xy=yx$ para toda x y toda y en A . Propiedades que en general no se incluyen en la definición de álgebra.

Definamos una norma $|| \cdot ||$ sobre A , tal que satisfice $||xy|| < ||x|| ||y||$ con $x, y \in A$. Con esta propiedad A es un espacio completo y entonces A se llama álgebra de Banach.

Como continuación de este bosquejo, expondremos algunos resultados de la Teoría de Gelfand:

a) Si $\|x-e\| < 1$, entonces x es invertible. Las siguientes observaciones justifican este hecho:

La serie $e + (e-x) + (e-x)^2 + \dots$ converge absolutamente y como A es un espacio de Banach, entonces converge. No es difícil convencerse de que esta progresión geométrica converge a x^{-1} .

b) Si I es un ideal propio de A , entonces su cerradura \bar{I} es también un ideal propio.

1° Si I es un ideal de A , \bar{I} lo es también. Para ver esto, hay que probar que \bar{I} es un subespacio vectorial de A y que si $y^1 \in \bar{I}$, $a \in A$, entonces $ay^1 \in \bar{I}$. En efecto, si $x^1, y^1 \in \bar{I}$ existen $x, y \in I$ tales que $\|x-x^1\| < n$, $\|y-y^1\| < n^1$. Entonces, si $\epsilon > 0$, $\|x^1+y^1 - (x+y)\| < n+n^1 < \epsilon$ para una elección conveniente de n y n^1 también, si $\lambda \in C$, $\|\lambda y^1 - \lambda y\| < |\lambda|n^1 < \epsilon$ nuevamente eligiendo n^1 de manera adecuada; así pues, tanto x^1+y^1 como λy^1 están en \bar{I} . Ahora, sea $a \in A$; por un argumento análogo a los anteriores, $ax^1 \in \bar{I}$.

2° Si I es propio, también \bar{I} lo es.

pongamos que $\bar{I}=A$. Entonces $e \in I$, por lo tanto, existe $e' \in I$ tal que $\|x - e'\| < 1$. Pero entonces $e = x^{-1} x \in I$, de donde $I=A$. Como consecuencia resulta que todo ideal maximal es cerrado, pues de lo contrario $M \neq \bar{M}$ que contradice la definición de ideal maximal. Se demuestra que un anillo con unidad, si no tiene ideal no trivial es un campo.

Para cada M ideal maximal introducimos el álgebra cociente A/M que, por no tener ideal no trivial, es un campo con la norma cociente

$$\| [x] \|_{A/M} = \inf_{y \in [x]} \| y \|_A$$

Teorema de Ostrowski-Mazur-Gelfand.

Cada álgebra de Banach que es un campo es isomorfa a \mathbb{C} .

Daremos una muy elegante demostración debida a Gelfand:

Probaremos que para cada $x \in A$, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $x = \lambda e$.

En caso contrario, $\lambda \rightarrow (x - \lambda e)^{-1}$ es una función entera acotada y, por lo tanto, constante (Teorema de Liouville); pero $(x - \lambda e)^{-1} \rightarrow 0$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$, de donde $(x - \lambda e)^{-1} = 0$, lo cual es una contradicción.

La aplicación $x \rightarrow \lambda$ es inyectiva, pues, si no lo fuera, su núcleo sería un ideal no trivial, lo que no es posible, pues hemos supuesto que A es un campo. No es difícil verificar que esta aplicación es un isomorfismo de A en \mathbb{C} .

Las funciones holomorfas con valores en un álgebra fueron introducidas por Riesz y consistentemente utilizadas por Gelfand.

Expondremos a continuación la idea fundamental del Teorema de Gelfand:

Sea $\phi_M(x)$ la clase de x módulo M ; por el Teorema anterior podemos considerar a $\phi_M(x)$ como elemento de \mathbb{C} .

$\phi_M: A \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de A en \mathbb{C} , al cual se le llama carácter y que satisface, además, $|\phi_M(x)| \leq \|x\|$.

Aparece, nuevamente, aquí la idea del cambio de papeles entre variable y función.

Sea $m = \{M \mid M \text{ es un ideal maximal}\}$. Definamos $f_x: m \rightarrow \mathbb{C}$ como $f_x(M) = \phi_M(x)$.

Daremos a m , el espectro maximal de A , una Topología:

Definamos las vecindades de $M_0 \in m$ como $\{M | f_{x_i}(M) - f_{x_i}(M_0) | \leq \epsilon \quad i=1 \dots n\}$

Esta topología es la menos fina para la cual $\{f_x\}_{x \in A}$ es una familia de funciones continuas. La transformación de A en $C(m)$, dada por $x \rightarrow f_x$ es un homomorfismo donde $\|fx\| = \sup |f_x(M)| \leq \|x\|$; por lo tanto, esta transformación, llamada representación de Gelfand, es continua.

m es compacto. Entonces $c(m)$ es un espacio de Banach.

d) Introduciremos la norma espectral, $\|\cdot\|_s$ definiéndola de la siguiente manera:

$$\|x\|_s = \|fx\|$$

Ahora demostraremos que $\|x\|_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

Daremos la demostración en 2 partes.

1) $||x^n||_S = ||x||_S^n \leq ||x||^n \ll ||x^n||$ de donde

$$||x||_S \leq \liminf \sqrt[n]{||x^n||}$$

2) Recordemos el Teorema de Krull. Sea x no invertible.

I_x el ideal generado por x ; usando el lema de Zorn puede probarse que todo ideal propio está contenido en un ideal maximal. Claramente I_x es propio, por lo tanto cada elemento no invertible pertenece a un ideal maximal. Concluimos, que $f_x(M) \neq 0$ para toda M es decir, x no pertenece a un ideal maximal si y sólo si x es invertible.

Supongamos que $\alpha = ||x||_S$ y que $|\mu| > \alpha$; entonces $f_x(M) - \mu \neq 0$, ya que $\sup |f_x(M)| < |\mu|$.

Esto significa que $f_x(M) - \mu f_e(M) = f_{x-\mu e}(M) \neq 0$; por esto $x-\mu e$ es invertible. Ahora podemos afirmar que

$(\mu e - x)^{-1}$ es una función analítica en $|\lambda| < 1/\alpha$ con $\lambda = 1/\mu$. $(\mu e - x)^{-1} = \lambda(e - \lambda x)^{-1}$. Puesto que esta función

es analítica, su serie de Taylor $\lambda(e + \lambda x + \lambda^2 x^2 + \dots)$ es convergente; y por lo tanto, su término general $\lambda^n x^n \rightarrow 0$.

De esto se desprende que $||x^n|| = \frac{1}{|\lambda|^n} ||\lambda^n x^n|| \ll \frac{1}{|\lambda|^n}$

para n suficientemente grande, lo cual implica que $\limsup \sqrt[n]{||x^n||} \leq 1/|\lambda|$, siempre que $\frac{1}{|\lambda|} > \alpha$. De esto

resulta que $\limsup \sqrt[n]{||x^n||} \leq \alpha = ||x||_S$.

Como resultado del desarrollo anterior, los tres enunciados siguientes son equivalentes:

- i) $\|f_x\| = 0$
- ii) $\lim \sqrt[n]{\|X^n\|} = 0$
- iii) X pertenece a todo M .

Concluimos el bosquejo de la Teoría de Gelfand con lo siguiente:

El radical de Jacobson de A se define como $R(A) = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$.

Cuando $R(A) = \{0\}$, A se llama semisimple. En general si A es cualquier álgebra, $A/R(A)$ es semisimple. Claramente, A es semisimple, si y sólo si la representación de Gelfand es inyectiva. En este caso, podemos considerar A como subálgebra de $C(m)$.

Hasta aquí, hemos supuesto siempre que A tiene elemento unidad e . Si no lo tiene, consideramos sólo los M en \mathfrak{m} tales que A/M tenga elemento unidad; a tales ideales M , se les llama regulares. En este contexto puede probarse el análogo de b). \mathfrak{m} no será compacto, sino sólo localmente compacto. Las transformadas de Gelfand siguen siendo continuas.

A continuación daremos una aplicación importante de la Teoría de Gelfand.

Consideremos $L^1(\mathbb{Z}) \approx \ell^1$, el espacio de sucesiones cuyas series son absolutamente convergentes. Sea $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Definamos $\|a\| = \sum |a_n|$. La convolución de 2 elementos a y b , de $L^1(\mathbb{Z})$ está dada por $a*b=c$, $c_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n-m} b_m$.

Entre esta definición y la de convolución de funciones hay una gran analogía, y aquella hace de $L^1(\mathbb{Z})$ un álgebra normada.

Calculemos ahora ϕ_M , que es homomorfismo continuo de $L^1(\mathbb{Z})$ en \mathbb{C} , de donde ϕ_M es un elemento de $L^\infty(\mathbb{Z})$, el dual de $L^1(\mathbb{Z})$, luego existe $u = (u_n)$ en $L^\infty(\mathbb{Z})$, tal que $\phi_M(a) = \sum a_n u_n$, para toda a en $L^1(\mathbb{Z})$. Sea $\alpha^p = (\delta_{pn})_n$. Resulta de la definición que $\alpha^p * \alpha^q = \alpha^{p+q}$. Además, $\phi_M(\alpha^{p+q}) = u_{p+q} = \phi_M(\alpha^p) \phi_M(\alpha^q) = u_p u_q$. En particular, $u_n = (u_1)^n$, como u_n es acotado, $|u_1| = 1$. Escribamos ahora $u = e^{i\theta_M}$, y $\phi_M(a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{ine_M} = f_a(\theta_M)$, serie de Fourier absolutamente convergente.

Tenemos una aplicación biyectiva de \mathbb{m} en un círculo $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Asociando a cada M el correspondiente valor de θ , que depende de M , obteniéndose así un isomorfismo.

Por ésto, podemos considerar el conjunto m de todos los ideales maximales de $L^1(\mathbb{Z})$ como un círculo. La transformada de Gelfand es la proyección sobre el círculo, cuyos coeficientes de Fourier son elementos de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Como consecuencia obtenemos:

(W¹) Teorema de Wiener.

Si f (definida sobre el círculo) tiene una serie de Fourier absolutamente convergente, i.e. es la Transformada de Gelfand de alguna $a \in L^1(\mathbb{Z})$, y no se anula; entonces $1/f$ tiene una serie de Fourier absolutamente convergente.

El teorema Tauberino de Wiener se apoya en este teorema, que constituía su principal dificultad. Queda así salvado, por medio de elegante teoría, el serio escollo Técnico que entorpecía la demostración de aquel Teorema.

Posteriormente, Paul Lévy, enunció y probó una poderosa generalización de (W¹).

(P.L) Si f tiene serie de Fourier absolutamente convergente y F es analítica en un dominio que contiene la imagen de f , entonces $F \cdot f$ tiene también serie de Fourier absolutamente convergente.

Si ahora consideramos $L^1(\mathbb{R})$, resulta que $M\tilde{R}$ y la transformación de Gelfand es la de Fourier.

El caso en que $A \rightarrow C(M)$ es suprayectiva nos conduce a la teoría de las C-álgebras, y a la demostración del Teorema espectral de operadores adjuntos en un espacio de Hilbert.

Shilov, más recientemente, introdujo el concepto de álgebra regular, dotando a m de cierta topología. Aquellas álgebras en las que la topología de Shilov coincide con la topología débil que ya conocemos, se llama regulares. Desarrollando este concepto se obtiene una demostración directa (de una línea) del Teorema Tauberiano de Wiener.