Miscelánea Matemática **42** (2006) 51–62 SMM

Sobre dependencia lineal y wronskianos

Antonio Rivera-Figueroa
Departamento de Matemática Educativa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
IPN
arivera@cinvestav.mx

1. Introducción y preliminares.

La independencia lineal de n funciones $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$, definidas y $n-1$ veces derivables en un intervalo I y la relación con su wronskiano

$$W(\phi_1, \ldots, \phi_n)(x) = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \ldots & \phi_n(x) \\ \phi_1^{(1)}(x) & \phi_2^{(1)}(x) & \ldots & \phi_n^{(1)}(x) \\ \vdots & & & \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

aparece generalmente en la literatura matemática en el contexto de las ecuaciones diferenciales lineales. La situación es diferente cuando las funciones $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ no necesariamente son soluciones de una ecuación diferencial lineal.

Sean $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ soluciones en un intervalo I, de una ecuación diferencial lineal

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y^{(1)} + a_0(x)y = f(x), \qquad (1)$$

donde los coeficientes $a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ y $f(x)$ son funciones continuas en I. En este caso la dependencia lineal de las funciones $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ y su wronskiano $W(\phi_1, \ldots, \phi_n)(x)$ están relacionados fuertemente. Quizá el teorema más conocido es el siguiente

Teorema A. *Una condición necesaria y suficiente para que n soluciones $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ en un intervalo I de una ecuación diferencial* (1)*, sean linealmente dependientes es*

$$W(\phi_1, \ldots, \phi_n)(x) = 0 \quad \textit{para toda } x \in I.$$

O en su versión equivalente

Teorema B. *Una condición necesaria y suficiente para que n soluciones $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ en un intervalo I de una ecuación diferencial* (1)*, sean linealmente independientes es*

$$W(\phi_1, \dots, \phi_n)(x) \neq 0 \quad \textit{para alguna } x \in I$$

(véase por ejemplo Coddington (1962, p. 111) y Pontryagin (1962, pp. 130 y 140)).

Cabe hacer dos observaciones interesantes:

1. Si $\phi_1(x), \phi_2(x) \dots, \phi_n(x)$ son linealmente dependientes entonces necesariamente se tiene $W(\phi_1, \dots, \phi_n)(x) \equiv 0$, aun cuando las funciones $\phi_1(x), \phi_2(x) \dots, \phi_n(x)$ no sean soluciones de una ecuación diferencial lineal (1). En efecto, si c_1, c_2, $\dots$, c_n son constantes no todas cero, tales que

$$c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0 \quad \text{para toda } x \in I,$$

entonces, mediante derivaciones sucesivas, obtenemos las siguientes n relaciones

$$\begin{aligned} c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) &= 0 \\ c_1\phi_1^{(1)}(x) + c_2\phi_2^{(1)}(x) + \cdots + c_n\phi_n^{(1)}(x) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1\phi_1^{(n-1)}(x) + c_2\phi_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n\phi_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

válidas para toda $x \in I$.

Fijando $x \in I$, tenemos un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales, cuyo determinante es precisamente el wronskiano $W(\phi_1, \dots, \phi_n)(x)$. Cada uno de estos sistemas tiene solución no trivial, por lo que su determinante debe ser cero, es decir

$$W(\phi_1, \dots, \phi_n)(x) = 0 \quad \text{para cada} \quad x \in I\,.$$

2. La condición $W(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)(x) \equiv 0$ que implica la dependencia lineal de las soluciones $\phi_1(x), \phi_2(x) \dots, \phi_n(x)$ de la ecuación diferencial lineal (1), puede debilitarse sustituyéndola por la condición más simple de que el wronskiano se anule solamente en algún punto y no necesariamente en todo punto de I. Es decir

Si las soluciones ϕ_1, ϕ_2,..., ϕ_n de la ecuación diferencial (1) satisfacen

$$W(\phi_1, \ldots, \phi_n)(x) = 0 \quad \text{para alguna } x \in I$$

entonces ϕ_1, ϕ_2,..., ϕ_n son linealmente dependientes.

Para la prueba de esta afirmación resulta esencial el teorema de unicidad de soluciones que satisfacen condiciones iniciales.

En efecto, si en x_0 se satisface $W(\phi_1, \ldots, \phi_n)(x_0) = 0$, entonces el sistema

$$\begin{aligned} c_1\phi_1(x_0) + c_2\phi_2(x_0) + \cdots + c_n\phi_n(x_0) &= 0 \\ c_1\phi_1^{(1)}(x_0) + c_2\phi_2^{(1)}(x_0) + \cdots + c_n\phi_n^{(1)}(x_0) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1\phi_1^{(n-1)}(x_0) + c_2\phi_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n\phi_n^{(n-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

tiene solución no trivial. Sea c_1, c_2, ..., c_n una tal solución. Construyamos la función $\phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \cdots + c_n\phi_n$. Esta función es solución de la ecuación diferencial (1) y satisface las condiciones iniciales

$$\phi(x_0) = 0, \quad \phi^{(1)}(x_0) = 0, \ldots, \phi^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Por el teorema de unicidad, esta solución ϕ debe coincidir en I con la solución constante cero. Es decir

$$c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) \equiv 0 \qquad \text{en } I.$$

De las dos observaciones anteriores obtenemos el siguiente teorema que generaliza el Teorema (A).

Teorema 1. *Sean $\phi_1, \ldots, \phi_n$ funciones definidas en un intervalo abierto I.*

a) *Si $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son linealmente dependientes, entonces en cada punto $x \in I$ donde las funciones sean $n-1$ veces derivables se tiene $W(\phi_1, \ldots, \phi_n)(x) = 0$. En particular, si las funciones son $n-1$ veces derivables en I y son linealmente dependientes, entonces $W(\phi_1, \ldots, \phi_n)(x) \equiv 0$ en I.*

b) *Si $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son de clase $\mathcal{C}^n(I)$ y son soluciones de la ecuación diferencial (1) tales que para algún punto $x_0 \in I$, $W(\phi_1, \ldots, \phi_n)(x_0) = 0$, entonces son linealmente dependientes.*

Combinando los dos incisos (a) y (b) obtenemos el siguiente hecho adicional no explícito en el teorema

Corolario. *Si* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *son soluciones de la ecuacion* (1) *en un intervalo* I*, tales que* $W(\phi_1, \ldots, \phi_n)(x_0) = 0$*, para algún punto* $x_0 \in I$*, entonces* $W(\phi_1, \ldots, \phi_n)(x) = 0$ *para todo punto* $x \in I$*.*

Una formulación equivalente del teorema 1, en términos de la independencia lineal, es el siguiente teorema, que generaliza el Teorema (B).

Teorema 2. *Sean* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *funciones definidas en un intervalo abierto* I*.*

a) *Si existe un punto* $x \in I$ *donde las funciones* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *son* $n-1$ *veces derivables y su wronskiano* $W(\phi_1, \ldots, \phi_n)(x)$ *es diferente de cero, entonces las funciones son linealmente independientes.*

b) *Si* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *son de clase* $\mathcal{C}^n(I)$ *y son soluciones de la ecuación diferencial* (1)*, linealmente independientes, entonces para todo punto* $x \in I$*,* $W(\phi_1, \ldots, \phi_n)(x) \neq 0$*.*

Un ejemplo de Peano. Como ya hemos observado, para la prueba del inciso (b) de cualquiera de los Teoremas 1 o 2, es esencial que las funciones $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sean soluciones de la ecuación diferencial (1), surge entonces de manera natural la pregunta ¿qué ocurre si no pedimos esa condición?, es decir

- *¿Existen funciones* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *linealmente independientes en algún intervalo abierto* I *(no soluciones de una ecuación diferencial lineal), cuyo wronskiano se anule al menos en un punto del intervalo?*

Es ampliamente conocido que efectivamente existen tales funciones. Parece que el primer ejemplo que se conoce en la historia de la matemática se debe a Giuseppe Peano (1889, 1897), quien exhibe las funciones

$$\phi_1(x) = x^2, \quad \phi_2(x) = x|x|,$$

definidas en todo $\mathbb{R}$. Estas funciones son linealmente independientes y su wronskiano no solamente se anula en un punto, sino que se anula en todo $\mathbb{R}$.

Las funciones de Peano son de clase $\mathcal{C}^1$ pero no tienen segunda derivada. Un ejemplo de funciones mejor comportadas es

$$\psi_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \psi_2(x) = \begin{cases} -e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Estas funciones tienen wronskiano idénticamente cero, son de clase $\mathcal{C}^\infty$ y, por supuesto, también son linealmente independientes. Por cierto, $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ son no analíticas en $x = 0$ y todas sus derivadas se anulan en este punto.

Wronskiano cero e independencia lineal. No obstante que hace más de un siglo que se conoce el ejemplo de Peano, llama la atención el hecho de que Courant y John (1974, pp. 685-687) en su libro de análisis matemático enuncian y "prueban" (erróneamente) que el wronskiano de n funciones de clase $\mathcal{C}^n$ es idénticamente cero en un intervalo I, si y solamente si las funciones son linealmente dependientes en ese intervalo.

Para la prueba, Courant y John proceden por inducción matemática. Durante su demostración plantean un sistema de $n-1$ ecuaciones en las derivadas de un conjunto de $n-1$ funciones $c_1(x)$, $c_2(x)$, $\ldots$, $c_{n-1}(x)$:

$$\begin{aligned} c_1'(x)\phi_1(x) + c_2'(x)\phi_2(x) + \cdots + c_{n-1}'(x)\phi_{n-1}(x) &= 0 \\ c_1'(x)\phi_1'(x) + c_2'(x)\phi_2'(x) + \cdots + c_{n-1}'(x)\phi_{n-1}'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1'(x)\phi_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)\phi_2^{(n-2)}(x) + \cdots + c_{n-1}'(x)\phi_{n-1}^{(n-2)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Usando la hipótesis de inducción, deducen que el wronskiano $W(\phi_1, \ldots, \phi_{n-1})(x)$ es diferente de cero para toda x en el intervalo I. Con esto obtienen que todas las derivadas $c_1'(x)$, $c_2'(x)$, $\ldots$, $c_{n-1}'(x)$ son cero, concluyendo entonces que $c_1(x)$, $c_2(x)$, $\ldots$, $c_{n-1}(x)$ son constantes.

El error en el que incurren Courant y John radica en el hecho de que sus funciones $c_1(x)$, $c_2(x)$, $\ldots$, $c_{n-1}(x)$ no necesariamente son derivables en todo I. Estas funciones, en general, están definidas o son derivables en I excepto posiblemente en un conjunto discreto de puntos, por lo que se puede concluir que cada una de estas funciones es constante en cada una de las partes conexas del abierto donde es derivable y no necesariamente es constante en todo su dominio.

En el fondo, la falla de la prueba revela el fenómeno de que las funciones $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son "linealmente dependientes por intervalos", como es el caso de las funciones ϕ_1 y ϕ_2 de Peano o de las funciones ψ_1 y ψ_2 que presentamos anteriormente. En ambos casos tenemos que las funciones son "linealmente dependientes" en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0]$ y $[0, +\infty)$. De hecho se cumple

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= \phi_1(x) && \text{para toda } x \in [0, +\infty) \\ \phi_2(x) &= -\phi_1(x) && \text{para toda } x \in (-\infty, 0] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \psi_1(x) && \text{para toda } x \in [0, +\infty) \\ \psi_2(x) &= -\psi_1(x) && \text{para toda } x \in (-\infty, 0] \end{aligned}$$

Como podemos observar, los ejemplos están construidos mediante la ruptura de una función en un punto donde la función se anula y el ensamble de dos trozos que resultan de esa ruptura. En ese punto la función original debe ser suficientemente bien comportada para que la función que resulte del ensamble sea una función suficientemente derivable en ese punto. En el caso de las funciones de Peano, partimos de la función $\phi_1(x) = x^2$ definida en todos los reales $\mathbb{R}$. Esta función y su derivada se anulan en $x = 0$. La función ϕ_2 se construye reflejando, respecto al eje de las abscisas, el trozo de ϕ_1 correspondiente al semieje negativo. La función ϕ_2 así construida resulta de clase $\mathcal{C}^1$ aunque no de clase $\mathcal{C}^2$.

En general, para obtener una función ϕ_2 suficientemente derivable en el punto de ensamble, la función ϕ_1 debe ser suficientemente plana en el punto de ruptura. En el Teorema 3, mostraremos que si dos funciones ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes en un intervalo abierto I y su wronskiano $W(\phi_1, \phi_2)(x)$ es idénticamente cero, entonces debe haber un punto donde ambas funciones son suficientemente planas.

[Bigger] [Bigger]

$\phi_1(x) = x^2$ $\phi_2(x) = x|x|$

Antes de enunciar y probar el Teorema 3, veamos algunos lemas que permitirán presentar de forma simple y con mayor claridad las ideas centrales de la prueba.

Lema 1. *Sean ϕ_1 y ϕ_2 funciones diferenciables en un intervalo abierto J, tales que su wronskiano es idénticamente cero en J. Supongamos*

$\phi_1(x) \neq 0$ para toda $x \in J$, entonces ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente dependientes. De hecho, existe una constante k tal que $\phi_2(x) = k\phi_1(x)$ para toda $x \in J$.

Demostración: Dado que $\phi_1(x) \neq 0$ para toda $x \in J$, la función $\frac{\phi_2}{\phi_1}$ está definida y es diferenciable en todo J (por la continuidad de $\phi_1(x)$ se tiene $\phi_1(x) > 0$ para toda $x \in J$ o $\phi_1(x) < 0$ para toda $x \in J$). Además como

$$W(\phi_1, \phi_2)(x) = \phi_1(x)\phi_2'(x) - \phi_1'(x)\phi_2(x) = 0$$

para toda $x \in J$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)(x) &= \frac{\phi_1(x)\phi_2'(x) - \phi_1'(x)\phi_2(x)}{\phi_1^2(x)} \\ &= \frac{W(\phi_1, \phi_2)(x)}{\phi_1^2(x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

para toda $x \in J$. Esto implica que $\frac{\phi_2}{\phi_1}$ es constante en J, digamos k. Tenemos entonces

$$\phi_2(x) = k\phi_1(x)$$

para toda $x \in J$. Esto prueba el lema 1. □

Lema 2. *Sea ϕ una función diferenciable en un intervalo abierto J. Sea (x_n) una sucesión de ceros de ϕ, convergente a un punto $x_0 \in J$ con $x_n \neq x_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe una sucesión (y_n) de ceros de ϕ' convergente x_0, con $y_n \neq x_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y además $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = 0$.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la sucesión (x_n) es estrictamente monótona, en caso contrario obtenemos una tal sucesión mediante la construcción de una subsucesión de (x_n). Aplicando el teorema del valor medio, entre dos ceros consecutivos x_k y x_{k+1} tomemos un punto y_k tal que $\phi'(y_k) = 0$. Obviamente la sucesión (y_k) converge a x_0. Por la continuidad de ϕ en x_0 se debe tener $\phi(x_0) = 0$. Ahora bien, dado que ϕ es diferenciable en x_0 y para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\phi(x_n) - \phi(x_0)}{x_n - x_0} = 0,$$

tenemos $\phi'(x_0) = 0$. Esto prueba el lema 2. □

De este lema obtenemos

Corolario. *Sea ϕ una función de clase $\mathcal{C}^n$ o de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un intervalo abierto J, tal que tiene un cero no aislado en $x_0 \in J$ (cada vecindad de x_0 tiene una infinidad de ceros de ϕ). Entonces todas las derivadas de ϕ se anulan en x_0.*

Nota 1. De la interesante relación

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)(x) = \frac{W(\phi_1, \phi_2)(x)}{\phi_1^2(x)}$$

que hemos utilizado en la prueba del lema 1, podemos obtener otros resultados, por ejemplo

Proposición. *Sean ϕ_1 y ϕ_2 funciones diferenciables en un intervalo abierto J, tales que su wronskiano es diferente de cero en cada punto de J. Entonces entre cada dos ceros consecutivos de una de las funciones existe exactamente un cero de la otra.*

Demostración: Sean, por ejemplo, α_1 y α_2 dos ceros consecutivos de ϕ_1. Obviamente ninguno de α_1 y α_2 puede ser cero de ϕ_2. Si ϕ_2 no se anulara en algún punto del intervalo (α_1, α_2), la función $\frac{\phi_1}{\phi_2}$ sería derivable en el intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$ y por el teorema del valor medio existiría un punto $x_0 \in (\alpha_1, \alpha_2)$ donde la derivada se anularía, es decir

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)(x_0) = \frac{W(\phi_2, \phi_1)(x_0)}{\phi_2^2(x_0)} = -\frac{W(\phi_1, \phi_2)(x_0)}{\phi_2^2(x_0)} = 0.$$

Pero esto no puede ser, pues por hipótesis el wronskiano $W(\phi_1, \phi_2)(x)$ nunca se anula. Así que ϕ_2 debe anularse en al menos un punto de (α_1, α_2). Si ϕ_2 se anulara en dos puntos distintos de (α_1, α_2), entonces por un argumento similar a lo ya probado, ϕ_1 debería anularse en un punto entre estos dos ceros de ϕ_2, lo cual es imposible pues ϕ_1 no se anula en (α_1, α_2). Esto significa que solamente hay un punto de (α_1, α_2) donde ϕ_2 se anula. Hemos probado la proposición y con esto cerramos la nota 1. □

Teorema 3. *Sea $I = (a, b)$ un intervalo abierto, acotado o no acotado. Sean ϕ_1 y ϕ_2 funciones diferenciables linealmente independientes en I, tales que su wronskiano es idénticamente cero en I. Entonces existe un punto $x_0 \in I$ tal que*

$$\phi_1(x_0) = \phi_2(x_0) = \phi_1'(x_0) = \phi_2'(x_0) = 0.$$

Demostración: Puesto que las funciones ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes en I, ninguna de ellas es la constante cero. En particular existe un punto $t_0 \in I$ tal que $\phi_1(t_0) \neq 0$. Por la continuidad de ϕ_1 en t_0, hay un intervalo abierto J_1 que contiene a t_0 donde ϕ_1 no se anula. Dado que $\phi_1(x) \neq 0$ y $W(\phi_1, \phi_2)(x) = 0$ para toda $x \in J_1$, por el lema 1, existe una constante c tal que

$$\phi_2(x) = c\phi_1(x) \quad \text{para toda } x \in J_1.$$

Consideremos el intervalo abierto más grande posible que contenga a t_0 donde se cumpla la igualdad $\phi_2(x) = c\phi_1(x)$. Sea $J = (\alpha, \beta)$ tal intervalo. Esta primera conclusión podemos llamarla "dependencia lineal local" de ϕ_1 y ϕ_2 o bien de ϕ_2 respecto de ϕ_1.

Es claro que $J = (\alpha, \beta)$ no puede coincidir con $I = (a, b)$, pues esto significaría que ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente dependientes y por hipótesis estas funciones son linealmente independientes. Por lo tanto $J \neq I$, así que al menos uno de los extremos de J es diferente del extremo correspondiente de I.

Si $a < \alpha$, mostraremos que

$$\phi_1(\alpha) = \phi_2(\alpha) = \phi_1'(\alpha) = \phi_2'(\alpha) = 0.$$

Así que $x_0 = \alpha$ será el punto buscado. Si $a = \alpha$, entonces debemos tener $\beta < b$ y mediante argumentos similares se podrá probar que

$$\phi_1(\beta) = \phi_2(\beta) = \phi_1'(\beta) = \phi_2'(\beta) = 0,$$

por lo que en este caso el punto buscado será $x_0 = \beta$.

Supongamos entonces $a < \alpha$. Como el intervalo $J = (\alpha, \beta)$ es el mayor posible conteniendo t_0 donde se cumple la relación $\phi_2(x) = c\phi_1(x)$, entonces necesariamente $\phi_1(\alpha) = 0$, pues en caso contrario sería posible obtener un intervalo abierto más grande donde se cumpliese esa misma relación.

Por la continuidad de ϕ_1 y ϕ_2 en α y por la relación $\phi_2(x) = c\phi_1(x)$ que se cumple en J, debemos tener $\phi_2(\alpha) = c\phi_1(\alpha)$, por lo tanto también tenemos $\phi_2(\alpha) = 0$.

Por otra parte, de la existencia de las derivadas de ϕ_1 y ϕ_2 en α, de la relación $\phi_2(x) = c\phi_1(x)$ que se cumple en J, y del hecho $\phi_1(\alpha) = \phi_2(\alpha) = 0$, se sigue que

$$\phi_2'(\alpha) = c\phi_1'(\alpha).$$

En efecto, usando límites por la derecha para calcular la derivada tenemos

$$\phi_2'(\alpha) = \lim_{h\to 0+} \frac{\phi_2(\alpha+h)-\phi_2(\alpha)}{h} = c \lim_{h\to 0+} \frac{\phi_1(\alpha+h)-\phi_1(\alpha)}{h} = c\phi_1'(\alpha)$$

Ahora bien, tenemos dos posibilidades para α. Que α sea un cero aislado de ϕ_1 o que sea un cero no aislado.

Si α es un cero no aislado de ϕ_1, entonces por el lema 2, $\phi_1'(\alpha) = 0$. Dado que $\phi_2'(\alpha) = c\phi_1'(\alpha)$, también tenemos $\phi_2'(\alpha) = 0$. Así que

$$\phi_1(\alpha) = \phi_2(\alpha) = \phi_1'(\alpha) = \phi_2'(\alpha) = 0.$$

Si α es un cero aislado de ϕ_1, existe entonces un intervalo abierto $J_2 = (\alpha_1, \alpha)$, con $\alpha_1 < \alpha$ donde la función ϕ_1 es diferente de cero. Luego tenemos otra instancia de dependencia lineal en $J_2 = (\alpha_1, \alpha)$, es decir, existe una constante c_1 tal que $\phi_2(x) = c_1\phi_1(x)$ para toda $x \in J_2$. Como $\phi_1(\alpha) = \phi_2(\alpha) = 0$, calculando la derivada mediante límites por la izquierda obtenemos

$$\phi_2'(\alpha) = c_1\phi_1'(\alpha).$$

Al combinar esta relación con la antes obtenida $\phi_2'(\alpha) = c\phi_1'(\alpha)$, obtenemos

$$c\phi_1'(\alpha) = c_1\phi_1'(\alpha).$$

De aquí podemos concluir $\phi_1'(\alpha) = 0$, pues si se tuviese $\phi_1'(\alpha) \neq 0$, tendríamos $c = c_1$ y sería posible ampliar el intervalo J a un intervalo más grande donde se valiese $\phi_2(x) = c\phi_1(x)$. Así que necesariamente $\phi_1'(\alpha) = 0$ y por argumentos similares a los anteriormente usados concluimos también que $\phi_2'(\alpha) = 0$. Hemos probado que si α es un cero aislado, también tenemos

$$\phi_1(\alpha) = \phi_2(\alpha) = \phi_1'(\alpha) = \phi_2'(\alpha) = 0.$$

Esto prueba el teorema 3.

$\square$

Nota 2. El teorema anterior nos dice que si dos funciones ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes en un intervalo I y su wronskiano es idénticamente cero, entonces ellas son localmente linealmente dependientes. De alguna manera las funciones ϕ_1 y ϕ_2 pueden verse como construidas mediante el ensamble apropiado de pares de funciones diferenciables, linealmente dependientes en subintervalos y planas en los puntos de ensamble, para obtener una función diferenciable en la unión conexa de todos los subintervalos. Si las funciones a ensamblar son de alguna clase $\mathcal{C}^k$, deben ser suficientemente planas en los puntos de ensamble para obtener una función suficientemente diferenciable en la unión conexa de los subintervalos.

A manera de resumen. A continuación listamos algunos de los hechos que presentamos en este artículo y que revelan la naturaleza de las funciones, cuando cumplen ciertas condiciones sobre su wronskiano o sobre su dependencia o independencia lineal. Varias de las afirmaciones son triviales pero otras no lo son, como es el caso de las enunciadas en el teorema 3. Hemos reunido todas ellas, evidentes y no evidentes, con el propósito de organizar las ideas.

1. Si el wronskiano de n funciones de clase $\mathcal{C}^{n-1}$ es diferente de cero en un intervalo abierto, entonces no hay un punto del intervalo donde las n funciones se anulen.

2. Si el wronskiano de n funciones de clase $\mathcal{C}^{n-1}$ es diferente de cero en un intervalo abierto, entonces no hay un punto del intervalo, donde alguna de las funciones tenga un cero de multiplicidad mayor que $n-1$.

3. Si n funciones de clase $\mathcal{C}^{n-1}$ en un intervalo abierto, son linealmente dependientes, entonces su wronskiano es idénticamente cero en el intervalo. El recíproco es falso, como se enuncia a continuación

4. Existen dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}$, cuyo wronskiano es idénticamente cero en $\mathbb{R}$, pero que son linealmente independientes.

5. Si el wronskiano de n funciones de clase $\mathcal{C}^{n-1}$ en un intervalo abierto, es idénticamente cero y esas funciones son soluciones de una ecuación diferencial lineal, entonces son linealmente dependientes.

   El siguiente teorema es fácil de probar (Meister, 1961)

6. Si el wronskiano de n funciones de variable compleja holomorfas en un abierto conexo, es idénticamente cero, entonces son linealmente dependientes.

7. Si el wronskiano de dos funciones diferenciables en un intervalo abierto, es idénticamente cero y esas funciones no tienen ceros

en común, entonces son linealmente dependientes. Compare este enunciado con el del inciso 5. Este resultado es un caso particular del siguiente (teorema 3)

8. Si el wronskiano de dos funciones diferenciables en un intervalo abierto, es idénticamente cero y esas funciones son linealmente independientes, existe entonces un punto del intervalo donde ambas funciones y sus primeras derivadas se anulan simultáneamente.

9. Si el wronskiano de dos funciones diferenciables en un intervalo abierto, es diferente de cero en cada punto del intervalo, entonces entre cualesquiera dos ceros consecutivos de cualquiera de ellas existe exactamente un cero de la otra.

Terminamos planteando la pregunta

- *¿Podemos generalizar el Teorema 3, al caso de n funciones*?

Referencias

[1] Coddington E. A. (1961), *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice Hall, Englewood, N. J., 1961.

[2] Courant R. y John F. (1974), *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. II, Wiley-Interscience, New York, 1974.

[3] Peano, G. (1889), Sur les wronskiens, Mathesis, Vol. IX, pp. 110-112.

[4] Peano, G. (1897), Sul determinante wronskiano, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Vol VI, pp. 413-415.

[5] Meisters G. H.(1961), Local linear dependence and the vanishing of the wronskian, *American Mathematical Monthly*, 1961, pp. 847-856.

[6] Pontryagin L. S. (1962), *Ordinary Differential Equations*, Addison Wesley, Reading Ma., 1962.