

# Órbitas periódicas en billares triangulares

Alfonso Artigue

Departamento de Matemática y Estadística del Litoral,  
Universidad de la República, Gral. Rivera 1350,  
Salto, Uruguay.  
artigue@unorte.edu.uy

## Resumen

En este artículo se considera el sistema dinámico generado por una bola en una mesa de billar triangular con rebotes elásticos. Nos centraremos en el problema de la existencia de trayectorias periódicas. El objetivo es presentar resultados conocidos y algunas posibles estrategias para atacar este problema abierto.

## 1. Introducción

En el área de la matemática denominada *Sistemas Dinámicos* se estudia la evolución de sistemas a lo largo del tiempo. El sistema generalmente se modela mediante un conjunto, como por ejemplo una superficie en el espacio o un polígono. La evolución en el tiempo es determinada por una ley, como puede ser una ecuación diferencial, un campo de vectores o una función continua si se considera tiempos discretos. De esta forma cada punto del sistema tiene determinada una evolución en el tiempo y queda así definida la *trayectoria* u *órbita* de cada punto o *condición inicial*. Existe un tipo especial de órbita que se llama *periódica*. Estas tienen la propiedad de que luego de un determinado tiempo, llamado *período*, la trayectoria vuelve a su estado inicial repitiéndose indefinidamente su trayectoria.

En general podemos decir que un billar es una variedad Riemanniana en la cual las geodésicas se reflejan al llegar al borde. El borde puede presentar singularidades como aristas o esquinas dependiendo de la dimensión del billar. Generalmente se asume que las geodésicas se detienen al llegar a un punto singular. Por simpatía con el juego del billar, a la variedad le llamaremos *mesa*, imaginaremos que las geodésicas son recorridas por una *bola* y diremos que ésta *rebota* al llegar al borde.

Aunque, a decir verdad, todo aquel que haya jugado billar sabe que los rebotes no son para nada elásticos, la bola no mantiene velocidad constante, etc. Un modelo más realista se podría obtener con espejos y rayos de luz.

En este artículo supondremos que la mesa es un triángulo en el plano, una de las formas geométricas más sencillas. En este billar triangular estudiaremos el problema de la existencia de órbitas periódicas. Se conocen muchas soluciones en casos particulares pero aún no sabemos si todo billar triangular posee órbitas periódicas. Este es uno de esos problemas que es fácil de enunciar pero difícil de resolver.

La inquietud por los movimientos periódicos es antigua. Tal vez la sucesión del día y la noche sea la primera forma de periodicidad observada por el ser humano. En el modelo de Aristóteles del universo se sitúa a nuestro planeta estacionario mientras que los demás astros giran en órbitas periódicas circulares alrededor de la Tierra. Las órbitas periódicas aparecen también en el modelo del péndulo estudiado por Galileo, en el cual en pequeñas oscilaciones el período se mantiene constante en el tiempo. El estudio de las órbitas periódicas en billares está presente en la obra clásica de Birkhoff [3] de 1927. Sin embargo, los billares que él considera están determinados por curvas regulares y no poligonales. Algunas de las técnicas más utilizadas hoy en día en el estudio de billares poligonales aparecen en el trabajo de Fox y Kershner [8] de 1936. Ellos consideran el flujo geodésico en la superficie de un poliedro. Una de las solución más antiguas del problema data de 1775 y es debida a Fagnano [7]. Él encuentra órbitas de período 3 en triángulos acutángulos, pero no en el contexto de los billares, sino buscando inscribir un triángulo de perímetro mínimo. Este resulta ser un problema equivalente como veremos en la sección 7.1. De la bibliografía conocida por el autor, el primer artículo en que figura el problema en la formulación exacta que consideraremos es [4] de 1978.

En este artículo discutimos el problema desde diferentes puntos de vista. Ofrecemos diferentes técnicas y ejemplos que eventualmente pueden tener vínculo con la solución del problema. Pretendemos que la exposición sea autocontenida. Algunas demostraciones son más intuitivas que formales. En esos casos se dan referencias para el lector interesado.

A continuación describiremos el contenido del presente artículo. En la sección 2 daremos una descripción precisa de la dinámica de los billares que vamos a estudiar y plantearemos formalmente el problema en cuestión. Mostraremos también algunas soluciones particulares conocidas. En la sección 3 presentaremos la técnica del desarrollo del triángulo a lo largo de una trayectoria y se la aplica al estudio de la dinámica cercana a un vértice y a las bandas de órbitas periódicas. En la sección 4 se

estudia la estabilidad de las órbitas periódicas con respecto a perturbaciones del triángulo. Se muestran ejemplos y resultados generales. En la sección 5 consideramos soluciones con dos rebotes perpendiculares. Mostramos su existencia en triángulos de ángulos racionales y se muestra una solución de ese tipo que es estable. En la sección 6 mostramos el vínculo entre la existencia de órbitas periódicas y la expansividad de la dinámica. En la sección 7 presentamos formulaciones equivalentes del problema. La primera está relacionada con minimizar el recorrido de una poligonal respetando un itinerario fijo. La segunda se vincula con la dinámica de tres masas en un círculo con rebotes elásticos. La tercera plantea el problema en el contexto de flujos geodésicos sobre poliedros en el espacio.

Quiero agradecer a todos con quienes he compartido alguna charla relativa al problema del triángulo. La lista es larga, incluyendo colegas y amigos del CMAT e IMERL en Montevideo y Regional Norte en Salto. Agradezco también a los árbitros cuyos comentarios ayudaron a mejorar el artículo y a Adela Carro, mi madre, por la lectura cuidadosa y muchas correcciones en versiones preliminares del trabajo. Dedico este trabajo a mi familia, especialmente a mi compañera Cecilia Pérez con mucho cariño.

## 2. Descripción de la dinámica y ejemplos

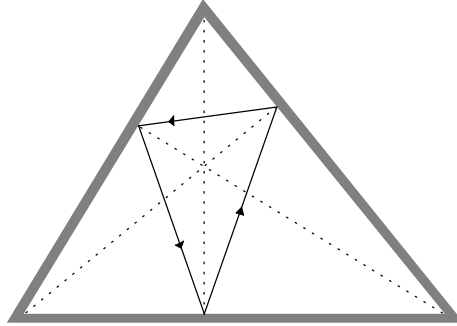
Como dijimos anteriormente vamos a considerar mesas triangulares. En esta mesa estudiaremos el movimiento de una bola que asumimos que es puntual. El movimiento de la bola en el interior del triángulo es rectilíneo uniforme, podemos suponer que la velocidad tiene norma 1 en todo momento. Cuando la bola llega a un lado del triángulo, ésta cambia instantáneamente de dirección siguiendo la *ley del espejo*: el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. En general si la bola llega a un vértice, consideramos que el movimiento se detiene. En este trabajo nos centraremos en el siguiente problema:

*¿en todo triángulo existe al menos una órbita periódica?*

De otra manera: ¿en todo triángulo podemos encontrar una posición inicial y una dirección inicial tales que luego de una cantidad finita de rebotes la bola llegue con la misma dirección al punto de partida? A modo de ejemplo veremos algunas de las soluciones conocidas.

El ejemplo más sencillo es el triángulo equilátero. Este triángulo presenta una trayectoria periódica que queda determinada por los puntos medios de los lados. Para estos triángulos es posible dar una descripción de todas sus órbitas periódicas, el lector puede ver más detalles en [2]. Veamos otros ejemplos en diferentes triángulos.

**Ejemplo 2.1.** *Triángulo acutángulo.* Si los tres ángulos son menores que 90 grados entonces es conocida una órbita de período 3. Se consideran los tres pies de las alturas. El triángulo que forman esos tres puntos usualmente se denomina como *triángulo órtico*. Se presenta una ilustración en la figura 1. El triángulo órtico determina una órbita periódica del billar. Una prueba de este hecho se consigue aplicando propiedades básicas de geometría Euclídea y queda como ejercicio para el lector.



**Figura 1.** Trayectoria de período 3 en un triángulo acutángulo. Solución que se le atribuye a Fagnano y a veces se denomina como triángulo órtico.

Esta solución se puede encontrar en el trabajo de Fagnano [7] que data de 1775. Además cumple la siguiente propiedad: inscribe un triángulo de perímetro mínimo. Obsérvese que estas trayectorias periódicas con tres rebotes solo existen en triángulos acutángulos. Básicamente, esto se debe a que en triángulos obtusángulos los pies de las alturas se encuentran fuera del triángulo. El lector puede consultar [6] por más detalles sobre esta solución.

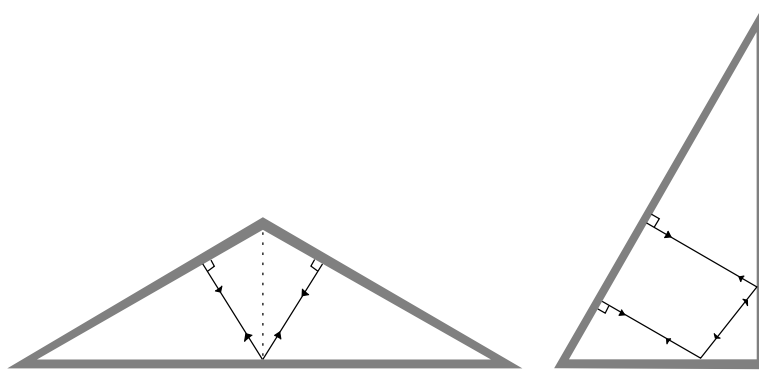
El resultado que sigue será utilizado en muchas ocasiones en el resto del artículo.

**Teorema 2.2.** *Toda trayectoria con dos rebotes perpendiculares es periódica.*

*Demostración.* Supongamos que la trayectoria comienza en uno de los rebotes perpendiculares. Obsérvese que luego del segundo rebote perpendicular a un lado la bola recorre el camino inverso. Así llegará hasta el punto en el que tuvo su primer rebote perpendicular quedando cerrada la trayectoria.  $\square$

En 1991 Ruijgrok [15] conjeturó que todo triángulo tiene una órbita periódica con dos rebotes perpendiculares. Profundizaremos en este tema en la sección 5. Ahora aplicaremos el teorema 2.2 en dos ejemplos.

**Ejemplo 2.3.** *Triángulo isósceles.* Considérese como punto inicial el punto medio de la base, como se muestra en la figura 2.



**Figura 2.** A la izquierda una trayectoria de período 4 en un triángulo isósceles. A la derecha una de período 6 en un triángulo rectángulo.

Desde allí se tira de forma que el próximo rebote sea perpendicular. De esta forma se consigue una órbita de período 4 con dos rebotes perpendiculares como en el teorema 2.2. El punto inicial no tiene por qué ser exactamente el punto medio de la base. Como veremos en la sección 3, cualquier condición inicial cercana con dirección inicial paralela determina también una órbita periódica.

**Ejemplo 2.4.** *Triángulo rectángulo.* En este caso existe una órbita de período 6. Ésta se consigue tirando desde la hipotenusa con una dirección inicial perpendicular a la misma. Obsérvese también que la posición inicial debe ser cercana al pie de la altura correspondiente al ángulo recto. Luego de rebotar en los catetos la bola regresa a la hipotenusa con dirección perpendicular. Ver figura 2. Para concluir que la órbita es periódica se aplica el teorema 2.2.

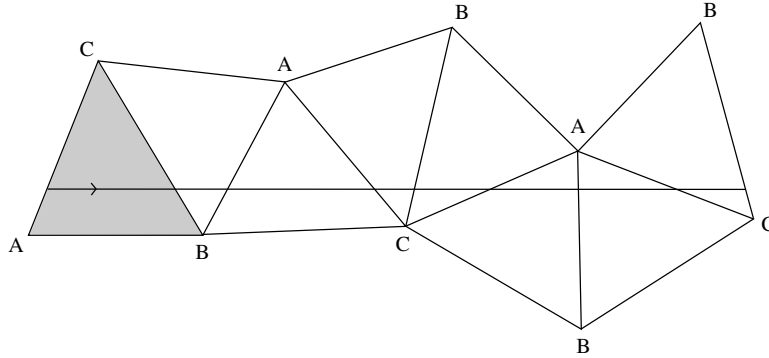
### 3. Escape del vértice y bandas periódicas

En esta sección presentaremos la técnica del *desarrollo de trayectorias* que es muy útil en el estudio de billares triangulares. Esta herramienta nos permitirá responder la siguiente pregunta: ¿es posible que una trayectoria, rebotando infinitas veces en dos de los lados, converja a un vértice? El caso más complejo es aquel en el que el ángulo en cuestión sea pequeño.

#### 3.1 Desarrollo de trayectorias

El desarrollo de una trayectoria consiste en simetrizar el triángulo, con respecto al lado de rebote, y continuar la trayectoria en el plano, en

lugar de mantener el triángulo fijo y reflejar la trayectoria. Si este procedimiento se repite indefinidamente se obtiene algo similar a lo que se muestra en la figura 3.



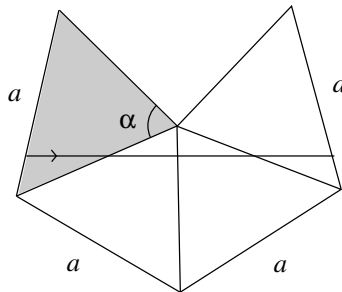
**Figura 3.** Desarrollo de una trayectoria.

Se forma una especie de camino de baldosas triangulares. El patrón que se obtiene depende claramente de la trayectoria que se esté desarrollando.

### 3.2 Escape del vértice

Utilizando la técnica del desarrollo de trayectorias vamos a responder la interrogante antes planteada. Recuérdese que los ángulos los medimos en grados.

**Proposición 3.1.** *Si un triángulo presenta un ángulo  $\alpha$  opuesto al lado  $a$  y  $N\alpha > 180$  entonces no puede haber  $N + 1$  rebotes consecutivos sin tocar el lado  $a$ .*



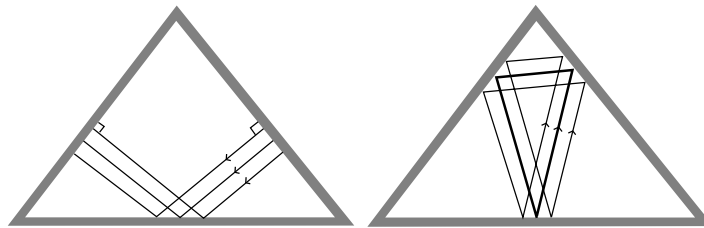
**Figura 4.** En este ejemplo, cada  $N = 4$  rebotes alguno de los mismos se produce en el lado  $a$ .

*Demostración.* Lo que haremos es desarrollar alrededor del vértice correspondiente al ángulo  $\alpha$  como se ve en la figura 4. Como  $N\alpha$  supera los 180 grados, la cantidad máxima de rebotes consecutivos que puede haber sin tocar el lado  $a$  es  $N$ . Por lo tanto en toda secuencia de  $N + 1$  rebotes consecutivos al menos una vez se visita el lado  $a$ .  $\square$

Cuando el ángulo  $\alpha$  del resultado anterior es pequeño, la cantidad de rebotes posibles sin visitar el lado  $a$  puede ser grande. De todas formas, toda trayectoria escapa de los vértices.

### 3.3 Bandas periódicas

Supóngase que tenemos dos condiciones iniciales cercanas entre sí, con direcciones paralelas e igual sentido. Sus trayectorias continuarán siendo paralelas a menos que ocurran rebotes en diferentes lados del triángulo. Esto se visualiza claramente si desarrollamos las trayectorias. Por lo tanto, las trayectorias cercanas y paralelas a una órbita periódica son periódicas. Luego, siempre que haya una órbita periódica existirán en realidad infinitas órbitas periódicas. A la unión de todas estas órbitas periódicas paralelas le llamamos *banda periódica*, ver figura 5.



**Figura 5.** A la izquierda: banda de trayectorias paralelas de período 4 en un triángulo isósceles. A la derecha: las trayectorias paralelas a la órbita periódica de Fagnano duplican el período.

Hay dos tipos de bandas periódicas. Hay unas que están formadas por órbitas del mismo período, hemos visto dos ejemplos, una en triángulos isósceles y la otra en triángulos rectángulos, recordar los ejemplos 2.3 y 2.4. Las otras bandas periódicas tienen una órbita central cuyo período es exactamente la mitad que el de las otras. Esto sucede en el ejemplo 2.1 y se ilustra en la figura 5. A continuación explicamos a qué se debe el hecho de que haya dos tipos de bandas periódicas.

**Proposición 3.2.** *Si el período de una órbita es par entonces las paralelas cercanas tienen el mismo período. Si el período es impar las trayectorias paralelas cercanas tienen el doble de su período.*

*Demostración.* La prueba reside en que en cada rebote las trayectorias paralelas se cruzan, es decir, la que estaba a la izquierda pasa a estar a

la derecha y viceversa. Fijemos una trayectoria periódica de período  $n$  y una cercana que comience a la izquierda de ésta. Si  $n$  es par entonces la trayectoria que comenzó a la izquierda retornará luego de  $n$  rebotes al punto de partida, cerrándose una órbita periódica de período  $n$ . Si  $n$  es impar, la trayectoria que comenzó a la izquierda, luego de  $n$  rebotes retornará a la derecha del punto inicial ya que en cada rebote hay un cruce. En este caso la órbita se cierra sólomente luego de  $2n$  rebotes.  $\square$

## 4. Estabilidad y el espacio de triángulos

Existe una clasificación de las trayectorias periódicas de acuerdo a la estabilidad con respecto al triángulo. Hay algunas que dependen de una relación particular entre los ángulos del triángulo y que por lo tanto, al perturbar levemente los ángulos pueden ser perdidas. Estas son las inestables. Otras en cambio sobreviven a pequeñas perturbaciones. Estas son las estables. Esta es la temática de la presente sección.

### 4.1 Espacio de triángulos

Comenzaremos introduciendo una topología natural en el espacio de triángulos. Observemos que en el análisis de billares triangulares no nos importa el *tamaño* del billar, lo único que nos interesa es la *forma* del mismo. Esto implica que para determinar la mesa, solo necesitamos saber los ángulos. Llamémosle  $\alpha$  y  $\beta$  a dos de sus ángulos. El tercer ángulo no es necesario especificarlo, ya que se calcula como  $180 - \alpha - \beta$  si se mide los ángulos en grados. Ahora bien, las condiciones que deben cumplir  $\alpha$  y  $\beta$  para que determinen efectivamente un triángulo son:

$$\begin{cases} 0 < \alpha < 180, \\ 0 < \beta < 180, \\ 0 < \alpha + \beta < 180. \end{cases}$$

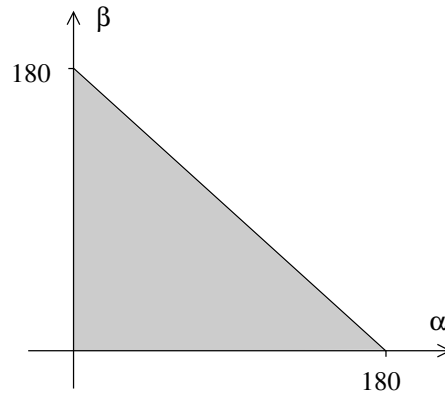
La última desigualdad corresponde a decir que el tercer ángulo  $\gamma = 180 - \alpha - \beta$  esté entre 0 y 180. Este sistema se puede representar en el plano como se muestra en la figura 6.

Desde este punto de vista resulta el hecho curioso de que el espacio de triángulos es a su vez un triángulo. En este espacio, cada triángulo es determinado por un punto.

### 4.2 Itinerarios

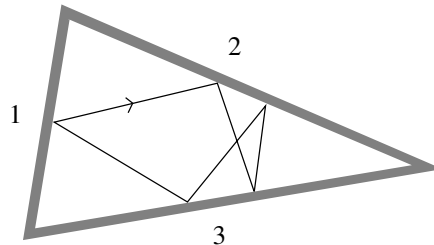
Para definir el concepto de estabilidad necesitamos introducir lo que se conoce como *itinerario* de una trayectoria. Ésta es una técnica usual que se denomina *dinámica simbólica*. Llamémosle 1, 2 y 3 a los lados





**Figura 6.** Espacio de triángulos.

del triángulo. A toda condición inicial le asociamos una sucesión de números (1, 2 y 3) que indica en qué lado del triángulo se produce cada rebote. A esta sucesión se le llama *itinerario* de la trayectoria. La figura 7 muestra un ejemplo.



**Figura 7.** Trayectoria de período 5 de itinerario 1,2,3,2,3,...

### 4.3 Estabilidad de órbitas periódicas

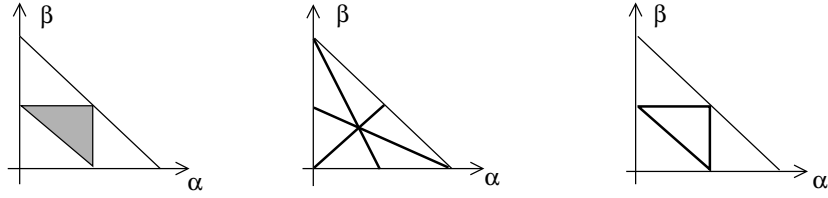
Sea  $O$  una órbita periódica en un triángulo  $T$ . Decimos que  $O$  es *estable con respecto a  $T$*  si existe un entorno de  $T$  en el espacio de triángulos tal que todo triángulo en ese entorno tiene una órbita periódica con igual itinerario que  $O$ . Toda órbita que no sea estable se dice *inestable*.

**Ejemplo 4.1.** La órbita de Fagnano es estable (recordar el ejemplo 2.1) ya que está presente en todo triángulo acutángulo y el conjunto de triángulos acutángulos es un abierto del espacio de triángulos.

**Ejemplo 4.2.** Las órbitas de los ejemplos 2.3 (en triángulos isósceles) y 2.4 (en triángulos rectángulos) son inestables. Esto se debe a que la existencia de dichas órbitas depende de la geometría del triángulo, en el primer caso dos ángulos deben ser iguales y en el segundo un ángulo

debe ser recto. Ambas condiciones son frágiles y se pueden quebrar con perturbaciones pequeñas del triángulo, perdiendo en consecuencia a la órbita periódica en cuestión.

En la figura 8 ilustramos los dominios en el espacio de triángulos en donde existen las órbitas periódicas mencionadas en los ejemplos anteriores. Las trayectorias del ejemplo 4.2 son inestables y tienen dos rebotes perpendiculares. En la sección 5 veremos una trayectoria periódica estable con dos rebotes perpendiculares.



**Figura 8.** Representación en el espacio de triángulos de los triángulos acutángulos, isósceles y rectángulos respectivamente.

La solución de la figura 7 tiene período 5 y es estable. Se puede demostrar directamente o aplicando el siguiente resultado general.

**Teorema 4.3.** *Toda órbita de período impar es estable.*

*Demostración.* Al igual que en la prueba de la proposición 3.2 la clave reside en que en cada rebote las trayectorias cercanas se cruzan. Supongamos que una órbita periódica comienza en  $p$  en el borde del triángulo con dirección  $\theta$ . Consideramos un segmento  $I$  en el borde del triángulo con  $p$  en su interior. Sea  $J$  un intervalo conteniendo la dirección  $\theta$ . Sea  $R$  el rectángulo  $I \times J$ . Es claro que por la continuidad de la dinámica, toda condición inicial cercana a  $(p, v)$  retornará a  $R$  en  $n$  rebotes, siendo que  $n$  es el período de la trayectoria que comienza en  $(p, v)$ . Sea  $f(p', \theta') \in R$  dicho punto de retorno de la condición inicial  $(p', \theta')$  cercana a  $(p, \theta)$ . Si  $n$  es impar entonces el diferencial de  $f$  es  $-id$  en  $(p, \theta)$ , se demuestra realizando el cálculo, pero es consecuencia de que las trayectorias cercanas se cruzan en cada rebote y  $n$  es impar. Esto implica que la intersección de la diagonal de  $R \times R$  (es decir, los  $(x, x)$  con  $x \in R$ ) y el gráfico de  $f$  son transversales. Dicho punto de intersección corresponde al punto fijo de  $f$  y consecuentemente a la trayectoria periódica del billar. Ahora bien, toda perturbación pequeña del triángulo se corresponde a una perturbación pequeña de  $f$ . La propiedad de transversalidad garantiza que la intersección es estable. Por lo tanto la órbita periódica del billar es estable.  $\square$

La prueba anterior demuestra un poco más de lo que se enuncia. Demuestra que la órbita periódica es estable aún permitiendo perturbaciones que no sean triángulos. Por ejemplo, se puede reemplazar un

lado del triángulo por un arco de círculo de curvatura pequeña sin que se pierda la trayectoria de período impar.

Por otro lado, existen órbitas de período par que son estables si solo permitimos perturbaciones en el espacio de triángulos. Por ejemplo, las trayectorias de período 6 cercanas a la de Fagnano son estables ya que acompañan a ésta de período 3 que es estable. En la sección 5 veremos que existen órbitas de período par que son estables y no pertenecen a la banda periódica de ninguna órbita de período impar.

En la figura 8 se ve que la solución de Fagnano, en triángulos acutángulos, resuelve  $1/4$  del problema, en términos del área del espacio de triángulos. Es interesante encontrar regiones con soluciones estables y ver qué tanto se puede cubrir del espacio de triángulos. Esta idea, junto a un trabajo formidable asistido por ordenador, le permitió a R. Schwartz [16] encontrar soluciones en todo triángulo con ángulos menores a 100 grados. En [16] también se ofrecen criterios para determinar la estabilidad de órbitas periódicas independientes de la paridad del período.

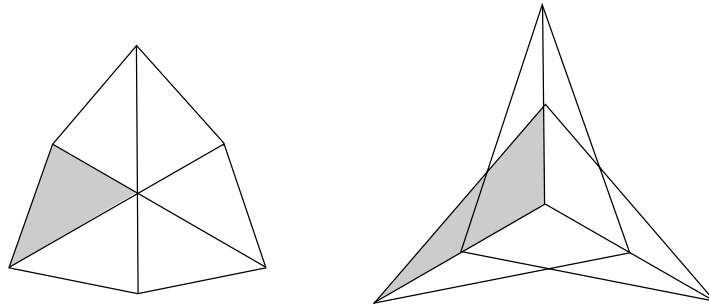
## 5. Conjetura de Ruijgrok

Como dijimos anteriormente Ruijgrok [15] conjeturó que todo triángulo posee una órbita periódica con dos rebotes perpendiculares. Es muy atractiva esta idea ya que encontrar este tipo de trayectorias parece más sencillo. Es decir, para demostrar que una órbita es periódica es necesario probar que ésta retorna al punto del que partió y con una dirección idéntica a la inicial. Ahora bien, para las órbitas de Ruijgrok alcanza con demostrar que se repite el rebote perpendicular. Parece, en principio, algo más sencillo. En [15] Ruijgrok ofrece evidencia de su conjetura en base a simulaciones numéricas. Veremos a continuación que la conjetura es válida en un conjunto denso en el espacio de triángulos.

### 5.1 Triángulos racionales

Se dice que un triángulo es *racional* cuando sus tres ángulos son racionales si se miden en grados. Consideremos un triángulo  $T$  con ángulos racionales  $\theta_i \in \mathbb{Q}$ . Denotemos por  $l_1, l_2, l_3$  a sus lados. Consideremos 3 rectas  $r_1, r_2, r_3$  que pasen por el origen y que sean paralelas a  $l_i$  respectivamente. Sean  $S_1, S_2, S_3$  las simetrías axiales asociadas a las rectas  $r_i$ . Sea  $G$  el grupo de isometrías generado por  $\{S_i\}$ . Como los ángulos son racionales, este grupo es finito. En el conjunto  $T \times G$  definimos la relación de equivalencia generada por la siguiente propiedad: si  $x \in l_i$ , para algún  $i = 1, 2, 3$ , entonces  $(x, g) \simeq (x, S_i g)$ . Si pensamos en  $T \times G$  como una unión disjunta de copias de  $T$ , entonces este cociente lo que hace es

pegar los lados de estas copias, de forma similar a lo hecho en el desarrollo del triángulo a lo largo de una trayectoria. Cada punto del borde que no sea un vértice se identifica con exactamente un punto de otro triángulo. Los puntos del interior del triángulo solo se identifican con ellos mismos. Lo que sucede con los vértices es un poco más complejo. Para comenzar a visualizar lo que sucede alrededor de un vértice, supongamos primero que el ángulo es de 60 grados. En este caso, 6 copias logran cubrir un entorno como se ve en la figura 9 (parte izquierda). Si el ángulo en cuestión fuese de 120 grados entonces también 6 copias cubren un entorno del vértice, pero ahora es necesario *dar dos vueltas* y la visualización es más compleja, como se ve en la parte derecha de la figura 9.



**Figura 9.** Desarrollo alrededor de un vértice.

Lo importante es que el espacio cociente  $S = T \times G / \simeq$  es una superficie compacta y sin borde. Ésta tiene asociada una métrica plana, la que proviene del triángulo, con singularidades en los puntos correspondientes a los vértices. Esta construcción se puede encontrar en [8, 12].

## 5.2 Órbitas de Ruijgrok en triángulos racionales

**Teorema 5.1.** *Todo triángulo racional posee órbitas periódicas con dos rebotes perpendiculares.*

*Demostración.* Como vimos en la sección anterior, al triángulo racional le podemos asociar una superficie compacta  $S$ . Fijemos una dirección inicial  $v$  que forme ángulo recto con uno de los lados. Mediante el transporte paralelo de  $v$  en toda la superficie (salvo las singularidades), se obtiene un campo de vectores. Denotemos por  $\phi_t$  al flujo (acción de  $\mathbb{R}$ ) asociado a dicho campo de vectores. Tomemos un pequeño disco  $D$  centrado en el punto inicial. Ese disco será transportado por el flujo de forma que el área de  $\phi_t(D)$  es igual a la de  $D$  para todo  $t \geq 0$ . Obsérvese que si un punto del disco va en dirección de una singularidad, entonces el disco será dividido en dos al pasar por la misma. Esto podrá suceder

muchas veces, pero sin embargo la suma de las áreas de los trozos es igual al área del disco original.

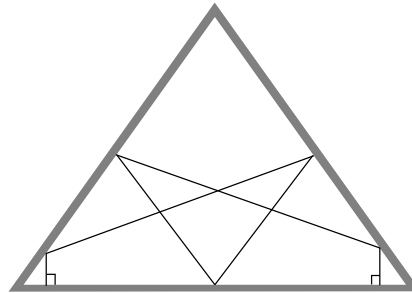
Ahora bien, como el triángulo es racional tenemos que la superficie  $S$  es compacta y por lo tanto su área es finita. Esto implica que para algún  $s > 0$  (no pequeño) se cumple que  $\phi_s(D)$  corta a  $D$ . Por lo tanto existe un punto de  $D$  que retorna a  $D$ , pero como todos los puntos de  $D$  corresponden a un rebote perpendicular, tenemos que hay trayectorias con dos rebotes perpendiculares.  $\square$

Este resultado es interesante desde el punto de vista que ofrece una solución, soportando la conjetura de Ruijgrok, en un conjunto denso en el espacio de triángulos. Sin embargo, este conjunto, a pesar de ser denso, es numerable y por lo tanto de medida nula. En la sección siguiente veremos que existen soluciones con dos rebotes perpendiculares que son estables, y por lo tanto, existen en un abierto en el espacio de triángulos, en particular existen en un conjunto de medida positiva.

El caso de los triángulos y en general polígonos racionales ha sido estudiado extensamente. Por ejemplo, en [13, 5] se demuestra que las órbitas periódicas son densas en los triángulos racionales. Este tipo de triángulos son bien comprendidos, por lo menos desde el punto de vista de la existencia de órbitas periódicas. Vayamos al mundo irracional.

### 5.3 Soluciones estables de Ruijgrok

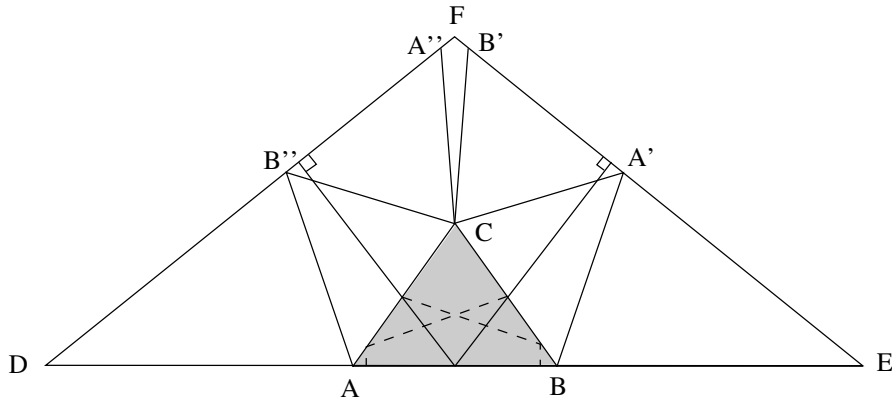
Existen soluciones con dos rebotes perpendiculares que son estables. Un ejemplo se muestra en la figura 10. Ruijgrok en [15] encuentra una solución con el mismo itinerario pero no se preocupa por su estabilidad. Este asunto es fundamental ya que si no hubiese soluciones estables con dos rebotes perpendiculares su conjetura sería falsa. Esto se debe a que cada solución inestable cubre solamente un conjunto de medida nula en el espacio de triángulos.



**Figura 10.** Solución estable con dos rebotes perpendiculares.

A continuación mostraremos que la solución de la figura es estable. Consideramos las construcciones auxiliares que se ven en la figura 11.

En la misma le llamamos  $A$ ,  $B$  y  $C$  a los vértices del triángulo y realizamos desarrollos parciales de la trayectoria periódica. Por ejemplo,  $A'$  es el simétrico de  $A$  con respecto a la recta  $\overline{BC}$ ,  $B'$  es el simétrico de  $B$  con respecto a la recta  $\overline{CA'}$ . Construcciones análogas a la izquierda nos dan los puntos  $B''$  y  $A''$ . Los rebotes perpendiculares ahora se dan en  $A'B'$  y  $A''B''$ . En el triángulo  $DEF$  de la figura se ve que la trayectoria periódica es del tipo que encontramos en los triángulos isósceles, de período 4. Parece imposible que haya estabilidad, pero sin embargo para toda perturbación pequeña de  $ABC$  el correspondiente  $DEF$  es isósceles. Efectivamente, si denominamos por  $\gamma$  al ángulo  $ACB$  se ve fácilmente que los ángulos  $FDE$  y  $DEF$  valen  $180 - 2\gamma$ . Esto prueba la estabilidad de la solución de la figura 10.



**Figura 11.** Construcciones auxiliares.

Vimos en la sección anterior que todo triángulo racional posee una órbita periódica con dos rebotes perpendiculares. Es natural preguntar por la estabilidad de dichas soluciones. Obsérvese que el triángulo equilátero es racional, y si tiramos perpendicularmente desde un lado, no importa desde qué punto (excluyendo el punto medio), obtenemos una solución de período 4 que sabemos que no es estable. Por lo tanto no todo triángulo racional posee una trayectoria estable con dos rebotes perpendiculares. Un resultado relacionado fue demostrado en [11]. Éste dice que los triángulos rectángulos no tienen órbitas periódicas estables. Se esfuma la ilusión de cubrir completamente el espacio de triángulos con regiones de soluciones estables.

Por otro lado, se puede demostrar que si los ángulos de un triángulo son linealmente independientes sobre los enteros, entonces toda órbita periódica en ese triángulo es estable. Esencialmente esto se debe a que las soluciones inestables dependen de alguna relación entre los ángulos del triángulo. Por ejemplo, el triángulo es isósceles si  $\alpha - \beta = 0$  y es rectángulo si  $\alpha + \beta - \gamma = 0$ . Por lo tanto, ambos tipos de soluciones,

estables e inestables, son necesarias para cubrir el espacio de triángulos (si es que es posible). Este hecho es desde nuestro punto de vista un obstáculo importante para resolver el problema de la existencia de órbitas periódicas. Sin embargo, el hecho de que haya soluciones de Ruijgrok estables e inestables, hace de su conjetura una luz en el camino.

## 6. Sistemas expansivos

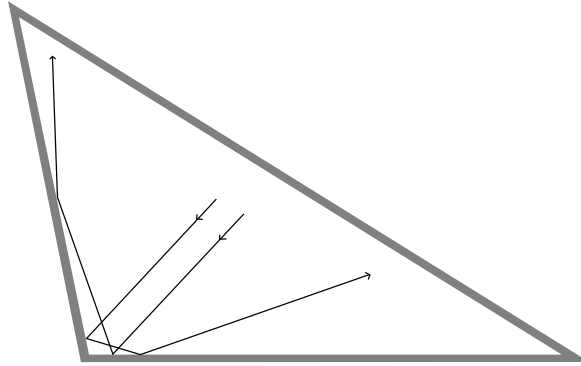
Se dice que un homeomorfismo  $f$  de un espacio métrico  $X$  es *expansivo* si existe  $\alpha > 0$  tal que si  $x, y \in X$  son dos puntos distintos entonces existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) > \alpha$ . En general los homeomorfismos expansivos son considerados como caóticos ya que presentan sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales. La definición correspondiente para el caso de tiempo continuo, es decir flujos expansivos, es más compleja. En [1] el lector puede encontrar una discusión sobre la misma.

Volvamos a los billares para ver una propiedad fundamental que luego utilizaremos para estudiar la expansividad que presentan los billares. Como dijimos anteriormente, toda órbita periódica está acompañada de una banda periódica. Esto implica que existen infinitas trayectorias con el mismo itinerario. Lo sorprendente es que si existe más de una trayectoria con un mismo itinerario entonces éstas son periódicas. La demostración en el caso general del resultado siguiente se puede encontrar en [9]. El caso racional se considera en [8].

**Teorema 6.1.** *Si dos trayectorias diferentes tienen el mismo itinerario entonces ambas son periódicas.*

*Demostración en el caso racional.* Si el triángulo es racional podemos considerar la superficie compacta  $S$  que se explicó anteriormente. Observemos que si dos trayectorias tienen igual itinerario entonces estas deben ser paralelas ya que en caso contrario en el desarrollo de las mismas su distancia divergería, haciendo imposible que los itinerarios coincidan. Siendo estas paralelas y con igual itinerario, concluimos que todas las trayectorias intermedias y paralelas a ambas tienen también el mismo itinerario. De esta forma podemos considerar la banda máxima  $B$  de trayectorias paralelas con dicho itinerario. Miraremos a la banda  $B$  en la superficie  $S$ . Imaginemos un segmento  $l$  transversal a la banda  $B$  que conecte los bordes de  $B$ . Como el área de  $S$  es finita tenemos que el área de  $B$  también lo es. Consecuentemente, si hacemos que  $l$  recorra la banda éste deberá solaparse con sí mismo en algún momento. A su vez, como  $B$  es máxima, las trayectorias del borde deben pasar por vértices. Por lo tanto, ese solapamiento es de forma tal que los bordes coinciden. Esto implica que las trayectorias de  $B$  son periódicas.  $\square$

En [9] también se demuestra que si se excluyen las órbitas periódicas lo que queda es expansivo. La prueba está basada en el resultado anterior. Si tomamos dos trayectorias que no son periódicas, entonces sus itinerarios no pueden ser iguales. Esto implica que en algún momento ambas trayectorias rebotarán en lados distintos, ver figura 12.



**Figura 12.** Todo par de trayectorias no periódicas en algún momento se separa.

Este fenómeno es el que produce la separación de las trayectorias y la consecuente expansividad del sistema.

Esta propiedad de expansividad de los billares junto a la construcción de la superficie compacta asociada a un billar racional fue lo que nos llevó en [1] al estudio de flujos expansivos en superficies. En dicho trabajo se realiza un estudio topológico de dichos flujos y se incluye una aplicación a los billares.

## 7. Formulaciones equivalentes

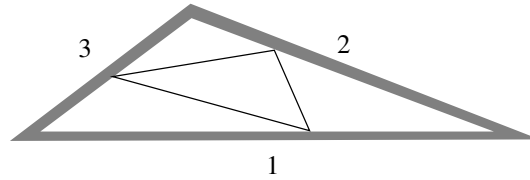
En esta sección veremos maneras alternativas de estudiar a los billares triangulares.

### 7.1 Longitud mínima

Consideremos el siguiente problema. Olvide por el momento los billares. Sea  $T$  un triángulo con sus lados etiquetados como 1, 2 y 3. Dada una secuencia finita de las etiquetas consideramos las curvas poligonales que respetan dicha secuencia. Dichas poligonales las consideraremos cerradas, es decir, terminan donde comenzaron. Por ejemplo, si la secuencia es 1,2,3 en la figura 13 se muestra una poligonal respetando dicha secuencia de visitas.

Dada una secuencia finita o itinerario  $I$  y una poligonal  $P$  respetando  $I$  consideramos la longitud de  $P$  que denotaremos por  $l(P)$ . Obsérvese





**Figura 13.** Poligonal cerrada inscrita en un triángulo con itinerario 1,2,3.

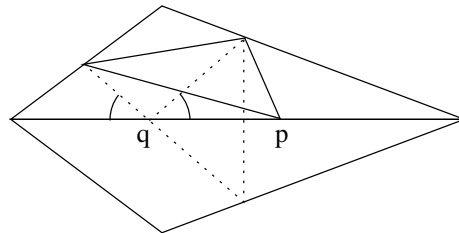
que la función  $l$  es continua con respecto a  $P$ . A diferencia de los billares, a estas poligonales sí les permitimos tocar a los vértices. Con lo cual, el espacio de todas las posibles poligonales respetando  $I$  queda compacto. Por lo tanto, la función  $l$  necesariamente presenta un mínimo para cada itinerario fijado. En algunos casos dicho mínimo se alcanza con una poligonal que toca algún vértice. El problema es:

*¿dado un triángulo  $T$ , existe un itinerario  $I$  de forma tal que exista una poligonal que respetando  $I$  minimice la longitud y no toque vértices?*

Este problema es equivalente al de encontrar órbitas periódicas en billares, como veremos a continuación.

**Proposición 7.1.** *Si  $P$  es una poligonal cerrada en el triángulo  $T$  que respetando el itinerario  $I$  minimiza longitud y no toca vértices, entonces  $P$  determina una órbita periódica en  $T$ . Recíprocamente, toda órbita periódica minimiza la longitud entre todas las poligonales con igual itinerario.*

*Demostración.* Lo que hay que demostrar es que los ángulos consecutivos que determina  $P$  con los lados del triángulo son iguales. Como la poligonal de por sí ya es cerrada, nos dará una órbita periódica. Para probar que dichos ángulos coinciden, analizamos la figura 14.



**Figura 14.** Construcción auxiliar para la proposición 7.1.

En la misma se ve la poligonal que consideramos en la figura 13. El itinerario es de longitud 3, pero como el argumento es local (en cada rebote), esto es suficiente. Si uno de los puntos de quiebre de

la poligonal no forma ángulos iguales con el lado, como el punto  $p$  de la figura entonces el punto  $q$  reemplazando a  $p$  consigue respetar el itinerario fijado y a la vez lograr una longitud estrictamente menor. Lo cual contradiría que  $P$  minimiza longitud respetando el itinerario. Por lo tanto  $P$  determina efectivamente una trayectoria periódica del billar.

El recíproco se demuestra mediante el desarrollo del triángulo a lo largo de la trayectoria periódica.  $\square$

## 7.2 Tres masas en un círculo

En esta sección consideraremos la dinámica de 3 masas en el círculo. Las masas son puntuales, no necesariamente iguales entre sí y los choques entre ellas son elásticos, es decir, se conserva la energía cinética y el momento. Además supondremos que en el tiempo entre choques la velocidad de cada masa es constante. Consideramos la siguiente pregunta:

¿existen posiciones y velocidades iniciales de las 3 masas que determinen una órbita periódica?

Usualmente se considera que la masa es positiva. Sin embargo, desde un punto de vista matemático nada nos restringe a ese caso. Más aún, como veremos más adelante, la presencia de masas negativas está ligada al billar obtusángulo. En el caso en que las tres masas sean positivas, el triángulo correspondiente es acutángulo. El triángulo rectángulo implica considerar una de las masas infinita (una pared fija).

Dadas tres masas  $m_1, m_2, m_3$  definimos  $M = m_1 + m_2 + m_3$  y  $\Pi = m_1 m_2 m_3$ . Algunas de las masas puede ser negativa, pero asumiremos que  $M$  y  $\Pi$  son ambos positivos o negativos. El siguiente resultado es de [10] y muestra que la pregunta anterior está vinculada con el billar triangular.

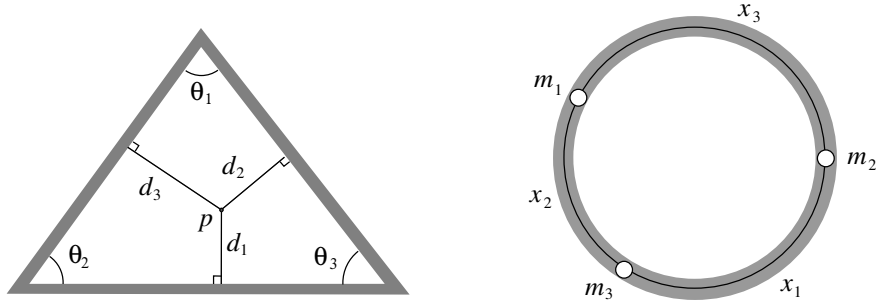
**Proposición 7.2.** *La dinámica del billar triangular es equivalente a la de 3 masas con rebotes elásticos en un círculo.*

*Idea de la prueba.* Se considera un triángulo de ángulos  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) tales que

$$\operatorname{tg} \theta_i = m_i \sqrt{M/\Pi}, \quad (1)$$

Recuerde que estamos considerando que  $M/\Pi$  es positivo. Sea  $T$  un triángulo con dichos ángulos y  $p$  un punto de  $T$ . Llamémosle  $d_i$  a la distancia de  $p$  al lado opuesto al ángulo  $\theta_i$ , como se indica en la figura 15.

Sean  $h_i$  las alturas correspondientes a los ángulos  $\theta_i$ . Ahora bien, en el círculo, denotemos por  $x_i$  a la distancia entre las masas como se muestra en la figura 15. Sin pérdida de generalidad supondremos que la longitud total del círculo es 1. La correspondencia entre ambas



**Figura 15.** Relación entre el billar triangular y la configuración de tres masas en un anillo.

dinámicas viene dada por las ecuaciones  $x_i = d_i/h_i$ . De esta forma, un choque entre la masa  $m_1$  con la  $m_2$ , es decir  $x_3 = 0$ , se corresponde a un rebote en el billar triangular de la bola en el lado opuesto al ángulo  $\theta_3$ , o sea  $d_3 = 0$ .

Lo que resta es demostrar que la leyes de la dinámica en ambos sistemas están en correspondencia por la equivalencia explicada. Los detalles se encuentran en [10].  $\square$

La equivalencia entre ambas dinámicas permite traducir resultados de un contexto al otro. Por ejemplo, como dijimos anteriormente, la longitud del círculo es 1. Entonces  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ . Si traducimos esta ecuación al triángulo obtenemos  $d_1/h_1 + d_2/h_2 + d_3/h_3 = 1$ , que es un resultado general sobre triángulos no tan evidente.

Otra aplicación de la conjugación entre ambas dinámicas es la siguiente. En [14] se considera el problema de calcular la cantidad de rebotes que pueden tener 3 masas en la recta. Demuestran que puede haber  $n$  rebotes si y solo si se cumple la desigualdad:

$$\sqrt{\frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}} > \cos\left(\frac{\pi}{n-1}\right)$$

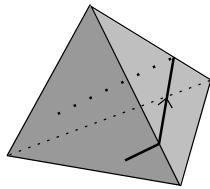
asumiendo que la masa del medio es  $m_2$ . Este resultado se demuestra en [14] considerando polinomios trigonométricos y con cálculos no triviales. Ahora bien, si consultamos [10], vemos que la expresión de la izquierda es exactamente  $\cos(\theta_2)$ . Por lo tanto la desigualdad anterior expresa:  $\theta_2 < \pi/(n-1)$ . Este resultado es el que demostramos en la proposición 3.1 utilizando el desarrollo del triángulo alrededor del vértice.

Todos los resultados que hemos obtenido para el billar tienen su contraparte en la dinámica de 3 masas en un anillo circular.

### 7.3 Flujo geodésico en poliedros

En [3] Birkhoff considera el estudio de los billares como un caso límite del flujo geodésico de una superficie en el espacio. Él explica claramente que al aplastar gradualmente a la superficie, imagine que la superficie es un elipsoide, contra un plano, aparece el problema del billar. Recuerde que Birkhoff estudió billares determinados por curvas regulares, no triangulares. En esta sección queremos mostrar que para billares triangulares el proceso inverso es de alguna manera posible.

Considere un poliedro, como por ejemplo el tetraedro de la figura 16.



**Figura 16.** Geodésica sobre la superficie de un tetraedro.

El tetraedro no es una superficie regular ya que presenta vértices y aristas. El plano tangente no está bien definido en dichos puntos. Sin embargo podemos considerar que las geodésicas son curvas que localmente minimizan la longitud. De esta forma las geodésicas se pueden prolongar incluso al pasar por una arista. Una manera de visualizarlo es mediante el desarrollo de las caras en el plano, de forma análoga al desarrollo de una trayectoria que explicamos anteriormente. Los vértices presentan nuevamente un obstáculo para la prolongación de las geodésicas. Al igual que en los billares supondremos que al llegar a un vértice la geodésica no se puede prolongar. Si nos restringimos a las geodésicas de velocidad de norma 1, lo que obtenemos es el flujo geodésico del poliedro. La pregunta que consideramos en este contexto es:

¿en todo poliedro existe una geodésica cerrada?

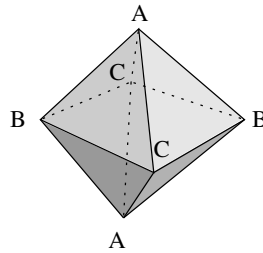
Lo que nos proponemos es demostrar que la dinámica de un billar triangular se puede ver como el flujo geodésico de un poliedro. Explicaremos los detalles para un triángulo acutángulo  $T$  de vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Supongamos que los lados miden  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Vamos a construir un triángulo isométrico a  $T$  en  $\mathbb{R}^3$  de forma tal que cada vértice esté en uno de los ejes coordenados. Digamos que  $A = (x, 0, 0)$ ,  $B = (0, y, 0)$  y  $C = (0, 0, z)$ . Las ecuaciones que queremos resolver son:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y^2 + z^2 = b^2, \\ z^2 + x^2 = c^2. \end{cases}$$

Sumando de a dos ecuaciones y restando la tercera obtenemos:

$$\begin{cases} 2x^2 = -a^2 + b^2 + c^2, \\ 2y^2 = a^2 - b^2 + c^2, \\ 2z^2 = a^2 + b^2 - c^2. \end{cases}$$

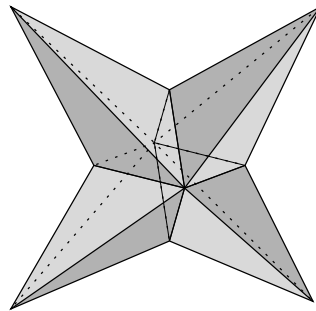
Dado que el triángulo es acutángulo dichas ecuaciones se pueden resolver. Obtenemos así 6 soluciones para los puntos  $A, B, C$  si tomamos en cuenta los signos. En cada eje hay 2 de esos puntos. Los 6 puntos determinan un octaedro como se ve en la figura 17.



**Figura 17.** Poliedro asociado a un triángulo acutángulo.

La equivalencia entre encontrar órbitas periódicas en el flujo geodésico del octaedro que construimos y en el billar en el triángulo  $T$  es clara mediante la técnica del desarrollo.

El caso obtusángulo es similar. La diferencia es que para comenzar se necesitan más copias del triángulo. En la figura 18 se muestra un ejemplo.



**Figura 18.** Poliedro asociado a un triángulo obtuso.

De esta forma, el estudio de los billares triangulares se traduce en el estudio del flujo geodésico sobre la superficie de un poliedro. El espacio de fase resulta de dimensión 3 ya que es el fibrado tangente unitario de una superficie. Si suponemos que el triángulo no tuviese órbitas periódicas entonces dicho flujo geodésico sería expansivo, como explicamos anteriormente. El estudio de flujos expansivos en variedades de

dimensión 3 podría resolver el problema. Esta idea es la motivación de la investigación actual del autor.

## Bibliografía

- [1] A. Artigue, «Expansive flows of surfaces», *Disc. & Cont. Dyn. Sys.*, vol. 33, 2013, 505–525.
- [2] A. M. Baxter y R. Umble, «Periodic orbits of billiards on an equilateral triangle», *Amer. Math. Mon.*, vol. 115, 2008, 479–491.
- [3] G. Birkhoff, *Dynamical systems*, Colloquim Publications, vol. 9, Amer. Math. Soc., 1927.
- [4] C. Boldrighini, M. Keane y F. Marchetti, «Billiards in polygons», *Ann. Prob.*, vol. 6, 1978, 532–540.
- [5] M. D. Boshernitzan, G. Galperin, T. Kruger y S. Troubetzkoy, «Periodic billiard orbits are dense in rational polygons», *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 350, 1998, 3523–3535.
- [6] R. Courant y H. Robbins, *¿Qué es la matemática?*, Aguilar, S. A. de Ediciones, 1964.
- [7] J. F. de Tuschis a Fagnano, 1775, (appeared 1779), 281–303.
- [8] R. H. Fox y R. B. Kershner, «Concerning the transitive properties of geodesics on a rational polyhedron», *Duke Math. J.*, vol. 2, 1936, 147–150.
- [9] G. Galperin, T. Kruger y S. Troubetzkoy, «Local instability of orbits in polygonal and polyhedral billiards», *Comm. Math. Phys.*, vol. 169, 1995, 463–473.
- [10] S. L. Glashow y L. Mittag, «Three rods on a ring and the triangular billiard», *J. Stat. Phys.*, vol. 87, 1997, 937–941.
- [11] W. P. Hooper, «Periodic billiard paths in right triangles are unstable», *Geometriae Dedicata*, vol. 125, 2007, 39–46.
- [12] A. Katok y A. Zemljakov, «Topological transitivity of billiards in polygons», *Mat. Zametki*, vol. 18, 1975, 291–300.
- [13] H. Masur, «Closed trajectories for quadratic differentials with an application to billiards», *Duke Math. J.*, vol. 53, 1986, 307–314.
- [14] T. J. Murphy, «Dynamics of hard rods in one dimension», *J. Stat. Phys.*, vol. 74, núm. 3/4, 1994, 889–901.
- [15] T. W. Ruijgrok, «Periodic orbits in triangular billiards», *Acta physica Polonica*, vol. 22, 1991, 955–981.
- [16] R. E. Schwartz, «Obtuse triangular billiards ii: 100 degrees worth of periodic trajectories», *Journal of Experimental Math.*, vol. 18, 2008, 137–171.