Miscelánea Matemática **81** (2025) 1-26 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.8101

Lo antiguo y lo moderno, Euclides y Hilbert

Carlos Torres Alcaraz
Facultad de Ciencias
UNAM
carlos.torres@ciencias.unam.mx

1. Introducción

En el libro *Grundlagen der Geometrie (Fundamentos de la geometría)* de 1899, David Hilbert impulsó una novedosa manera de pensar la geometría, y con ello un nuevo punto de vista acerca de la naturaleza de las teorías matemáticas. En su momento esto significó una ruptura con la visión tradicional de la geometría como campo del conocimiento, lo cual tuvo evidentes implicaciones en cuanto al modo de reconstruirla y entenderla.[1] Conforme al punto de vista tradicional la geometría tenía un claro contenido: trataba de las propiedades y relaciones entre ciertas entidades espaciales –puntos, líneas, planos, triángulos, círculos, esferas, polígonos, etc., las cuales constituían su objeto de estudio. Este modo de concebir la geometría tiene sus raíces en la antigua Grecia y está claramente ejemplificado en los *Elementos* de Euclides, una obra escrita alrededor del año 300 a.n.e.

En esta ocasión queremos examinar las diferencias entre los puntos de vista clásico y moderno respecto a la geometría. Dado el reducido espacio disponible, esto lo haremos a través del estudio del modo en que Euclides establece el conocimiento en los *Elementos*. Para ello hemos seleccionado un caso particular: la prueba que ofrece de la proposición I.18, la cual ejemplifica a la perfección su modo de proceder. Como sabemos, con el paso del tiempo este *modus operandi* se convirtió en un modelo a seguir, a tal punto que en el siglo dieciocho seguía vigente y el mismo Kant lo validó en su filosofía crítica.

[1]Hasta bien avanzado el siglo XIX la geometría (euclidiana) era considerada una de las ramas más firmes del conocimiento humano. Sin más, se trataba del estudio de las propiedades del espacio, las cuales se manifestaban como verdades objetivas, universalmente válidas para la mente humana.

Un rasgo característico de los *Elementos* es que el razonamiento suele apoyarse en ciertas figuras que ex profeso lo acompañan, lo cual contrasta con la exigencia moderna de proceder con estricto apego a lo dicho por los axiomas. Estas diferencias permiten contrastar las posturas tradicional y moderna en cuanto a la naturaleza de la geometría y su objeto de estudio, así como las perspectivas que ofrecen respecto al carácter de la matemática en general. Si pensamos en Euclides y Hilbert como representantes de la matemática antigua y moderna, el estudio de su obra nos permitirá entender con claridad estas dos tendencias que de alguna manera coexisten hoy en día no solo en el aprendizaje y la enseñanza, sino en la práctica matemática en general.

2. La demostración en los *Elementos* de Euclides

En la historia de la demostración matemática Euclides ocupa un lugar especial. No es que todas las pruebas que figuran en los *Elementos* sean de su invención, o que él fuera el creador de los métodos de demostración que utiliza; más bien, su importancia radica en que él fue quien estableció una norma de rigor para las pruebas matemáticas que prevaleció hasta el siglo XIX.

A falta de espacio, y suponiendo cierta familiaridad con la obra de Euclides por parte del lector, en lo que sigue presentamos un breve resumen del modo en que dicho autor organiza internamente cada proposición, lo cual nos permitirá resaltar la concepción que tiene del conocimiento geométrico y el carácter de sus demostraciones. En este sentido cabe señalar que para Euclides la proposición comprende no solo el enunciado de lo que se va a construir o probar, sino todas las partes que conlleva el proceso.[2]

En los *Elementos* cada proposición se divide formalmente en seis partes que, grosso modo, son las siguientes:

1. *Enunciado general de lo que se va a hacer o de la proposición que se va a demostrar.* Esto incluye la indicación de lo que se supone dado (hipótesis) y de lo que se pretende hacer o probar.[3]
2. *Disposición de lo dado en una figura.* Por lo general, en un diagrama se presentan distintos elementos (puntos, líneas, círculos, etc.) cuyo arreglo corresponde a lo enunciado en (1). Esto incluye la identificación de los datos mediante letras.

[2]En la actualidad, el término «proposición» ha caído en desuso. Se le ha sustituido con el término «teorema», cuya acepción clásica es la de *proposición que puede ser demostrada*.

[3]En los *Elementos* Euclides distingue entre las proposiciones que sirven para *construir* algo (problemas) y aquellas en las que se *prueba* algo (teoremas), escribiendo al final de ellas «que es lo que se quería hacer» en el primer caso y «que es lo que se quería probar» en el segundo.

3. *Declaración de lo que específicamente se quiere hacer o probar con relación a la figura o el objeto geométrico en cuestión, esta vez en términos de los datos específicos con que se cuenta.*
4. *Construcción de lo que resulte necesario para facilitar la construcción o la demostración.* Esto incluye el trazo de líneas y otros elementos adicionales.

5a. (en el caso de una construcción) *Construcción propiamente dicha del objeto requerido y realización de las inferencias necesarias para dejar ver que lo construido es lo que se había propuesto.*

5b. (en el caso de una prueba) *Realización de las inferencias necesarias para alcanzar, con base en los datos reconocidos o aceptados, la conclusión propuesta.*

6. *Conclusión*: regreso al enunciado general confirmando lo que se ha hecho o demostrado.

De estas partes, la 1, 5 y 6 son indispensables, mientras que algunas de las otras (o todas ellas) en ocasiones suelen omitirse por no servir a ningún propósito.

Esta división guarda un estrecho vínculo con el uso de diagramas en las demostraciones.

3. Los postulados: un comentario

Por el momento solo nos referiremos a ciertos aspectos de los *Elementos*. Si lo que desea el lector es adentrarse en el sentido y la estructura de esta obra, lo mejor será consultar ensayos como, por ejemplo, las introducciones a [8, 1].

En el libro I de los *Elementos* –véase [9]–, Euclides introduce lo que hoy en día llamamos axiomas (10 en total) y que él divide en dos grupos: los postulados y las nociones comunes.[4] Son los siguientes:

Postulados

P1 Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta otro punto cualquiera.

P2 Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.

P3 Y el describir un círculo con cualquier centro y radio.

P4 Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.

P5 Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.

[4]Un *postulado* es una proposición que se admite, o se requiere que sea admitida, para hacer posible la demostración. Por su parte, en la antigüedad las *nociones comunes* eran vistas como principios del conocimiento demostrativo propios del entendimiento, y podían ser utilizadas sin restricciones en las demostraciones y en todas las áreas del conocimiento.

Nociones comunes

NC1 Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.
NC2 Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales.
NC3 Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
NC4 Y las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
NC5 Y el todo es mayor que la parte.

En general los postulados cumplen dos propósitos. Los tres primeros están destinados a la producción de líneas y círculos conforme a ciertos procedimientos (uso de una regla y un compás) y actúan como sostén de las construcciones que figuran en los *Elementos*. Por su parte el cuarto postulado introduce una propiedad de los ángulos rectos, mientras que el quinto establece una relación entre las líneas rectas toda vez que estas satisfacen ciertas hipótesis. En este sentido su función no es dar sustento a la construcción, sino indicar ciertas propiedades de los ángulos y las líneas que serán utilizadas en las pruebas.[5]

Con base en este conjunto de postulados y nociones comunes Euclides levanta un sistema de más de 450 proposiciones presuntamente organizadas en forma deductiva, es decir, argumentadas y encadenadas según la lógica. Este será uno de los temas de nuestro análisis.

Una característica digna de llamar la atención es que los objetos bajo estudio son entes construidos por el intelecto, desprovistos de todo carácter sensorial (v. gr., las líneas son longitudes sin anchura). Este hecho contrasta, y de ahí la importancia de considerarlo, con la construcción de diagramas que los representan. Este recurso, que se antoja empírico, se halla presente en los procesos de demostración, y por lo tanto en la construcción y organización de la geometría elemental.[6]

A manera de ejemplo examinemos la prueba que ofrece Euclides de la proposición I.18 de los *Elementos*. Como veremos, en ella se hace referencia a ciertas figuras que actúan como representación de los objetos considerados, las cuales sirven como apoyo en el razonamiento.

[5]Con relación al uso deductivo de los postulados 4 y 5 véanse, por ejemplo, las pruebas de las proposiciones I.14, I.15 y I.29 en [8, pp. 277-278 y pp. 311-312].

[6]Hasta aquí hemos manejado los términos «prueba» y «demostración» cual si fueran sinónimos. Estrictamente hablando, hay una gran diferencia en su significado, aunque hoy en día esta tiende a borrarse. Conviene hacer un par de aclaraciones. En general, una prueba es un procedimiento aceptado por una comunidad para establecer un saber, es decir, un conocimiento válido. En cambio, una *demostración* es un argumento deductivo mediante el cual se deriva una proposición a partir de hipótesis. Al respecto pueden constituir pruebas cosas como mostrar una cosa o hecho, exhibir un documento, aportar un testimonio (derecho), efectuar una inducción (medicina), etc. Todo depende del acuerdo al que se haya llegado respecto a qué constituye y qué no constituye una prueba. Con relación a las «demostraciones» que ofrece Euclides en los *Elementos*, estas no lo son en el estricto sentido que acabamos de señalar (esto se hará claro en lo que sigue).

La posposición seleccionada es un claro ejemplo de la manera en que Euclides erige el conocimiento geométrico.[7]

Proposición I.18
① En todo triángulo, el lado mayor subtiende el ángulo mayor

② Sea ABC un triángulo que tiene un lado AC mayor que el AB. (Hip.) [Véase la figura 1.]
③ Digo que también el ángulo ABC es mayor que el BCA. (Tesis.)

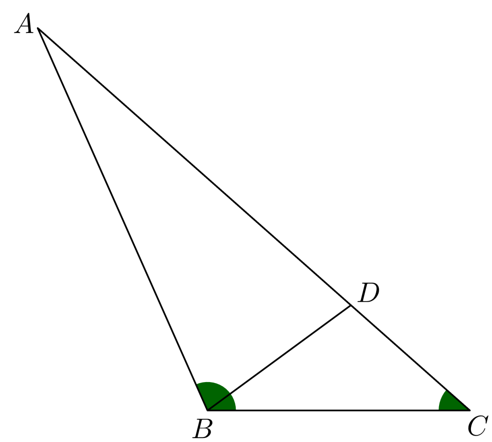


Figura 1

Demostración.

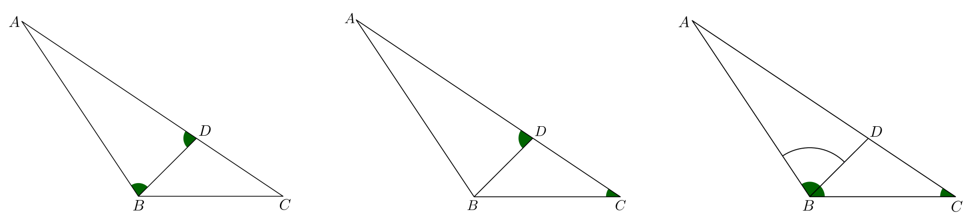
④ Córtese AD de modo que $AD = AB$ (I, 3) y trácese BD. (P. I)
⑤ Como $\angle ADB$ es exterior al $\triangle BCD$, $\angle ADB > \angle BCD$ pues es externo y opuesto a él. (I, 16)
⑤ Pero $\angle ADB = \angle ABD$, pues $AB = AD$ (I, 5)
⑤ $\therefore \angle ABD > \angle BCD$. (Silogismo relacional.)
⑤ Luego $\angle ABC$ es mucho mayor que $\angle BCD$ (**NC5**.)
⑥ Por tanto, en todo triángulo, el lado mayor subtiende el ángulo mayor. □

¿De qué trata esta proposición? De una relación que se verifica para los lados y los ángulos de cualquier triángulo. Y si bien el enunciado de ella es general, en la prueba Euclides se apoya en un diagrama que construye *ex profeso* para tal fin. Es más, para facilitar las cosas añade

[7]En la prueba, los números circundados ①,②,③, etc., insertados por nosotros, indican a qué parte de la división establecida por Euclides corresponde el enunciado, el pasaje o la figura en cuestión.

una línea, la recta BD, con la idea de exhibir un triángulo isósceles, el ABD, en el que los ángulos ABD y ADB son iguales. Obviamente, en el argumento Euclides hace constante referencia al triángulo ABC con el que trabaja. Es así que la prueba gira en torno a cierta figura, un diagrama, en vez de consistir en un argumento de carácter general. Este *modus operandi* es uno de los rasgos más significativos de los *Elementos* y una condición que se extendió a prácticamente toda la matemática hasta el siglo XIX. Si bien esto se puede justificar de distintas maneras, por ahora lo que pretendemos es destacar algunos aspectos de esta clase de pruebas que son de interés para la lógica y la epistemología matemática.

La importancia del diagrama en la prueba se puede notar en el hecho de que el paso final del argumento lo sustenta Euclides en cierta relación entre los ángulos ABC, ABD y DBC que observa en la figura, pero no deduce de los postulados; digamos que la figura pone al descubierto tal vínculo. El hilo de la prueba lo sintetizamos en los siguientes diagramas.



(a) $\angle ABD = \angle ADB$ Esta afirmación tiene como base la proposición I.5 ya demostrada.

(b) $\angle ADB > \angle BCA$ Esta afirmación tiene como base la proposición I.16 ya demostrada.

(c) $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC > \angle ABD = \angle ADB > \angle BCA$
La primera igualdad no se infiere de los postulados, sino que se observa en la figura.

Figura 2

Teniendo en cuenta lo anterior Euclides deduce lo que se ha propuesto: $\angle ABC > \angle BCA$. Como podemos ver, la igualdad $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ se halla al centro de la prueba, pues es a través de ella que Euclides llega a la conclusión deseada. Valga la insistencia, el punto es que dicha igualdad no se prueba a partir de los postulados y axiomas, sino que la figura la pone al descubierto.

Es un hecho que en la geometría clásica muchas pruebas (no solo las de Euclides) suelen apoyarse en información tomada de los diagramas. Se trata, sin más, de un importante recurso en la edificación de la teoría geométrica.[8]

[8] Hilbert y Bernays califican la teoría axiomática de Euclides con el adjetivo «*inhaltliche*» («material», en el sentido de que posee un contenido) para indicar que esta expresa las propiedades y relaciones de un sistema particular de objetos con el que se mantiene ligada.

4. Un análisis lógico de la prueba de Euclides

Desde la perspectiva actual, el uso de diagramas lo podemos relacionar con ciertas limitaciones de la lógica tradicional, lo cual nos lleva a examinar la prueba que ofrece Euclides de la proposición I.18 fijando la atención en los recursos lógicos que utiliza.

Para poner en relieve tales recursos, a continuación reconstruimos la prueba de Euclides enfatizando su forma o composición lógica. La siguiente es una buena representación de la misma.

Designemos con letras los lados y los ángulos de los triángulos implicados en el problema, tal como se muestra en la figura 3. Ahora la hipótesis es $c > b$, y la tesis es $\beta > \gamma$.

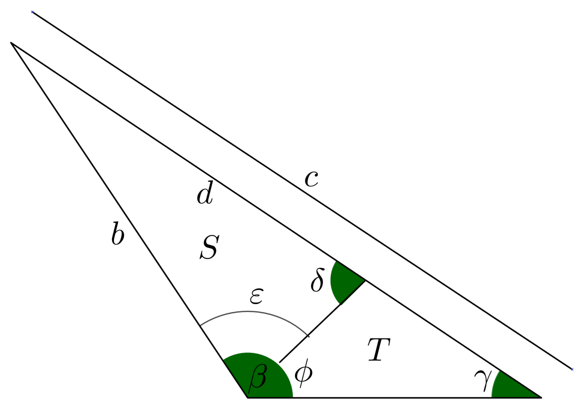


Figura 3

Tenemos:

1.	$c > b$	(por hipótesis)
2.	$b = d$	(por construcción de la figura)
3.	$c > d$	Silogismo relacional a 1 y 2

Los pasos de la prueba los podemos detallar así:

3.1.	$b = d \to (c > b \to c > d)$	Ley de Leibniz
3.2.	$c > b \to c > d$	MP 2, 3.1
3.	$c > d$	MP 1, 3.2
5.	$eo(\delta, \gamma)$	por construcción δ es exterior y opuesto a γ en T
6.	$eo(\delta, \gamma) \to \delta > \gamma$	por (I, 16)
7.	$\delta < \gamma$	MP 5, 6
8.	$isosc(S)$	de 2, por (def. I, 20) [$isosc(x)$: x es isósceles]
9.	$isosc(S) \to \varepsilon = \delta$	por (I, 5)
10.	$\varepsilon = \delta$	MP 8, 9

11.	$\varepsilon > \gamma$	Sil. rel. a 7 y 10 (similar a lo sucedido en el paso 3[9])
12.	$\varepsilon + \phi = \beta$	por construcción (evidente a partir de la figura)
13.	$\beta > \gamma$	Sil. rel. a 11 y 12

Este último paso lo podemos expresar así:

13.1.	$\varepsilon + \phi = \beta \to (\varepsilon > \gamma \to \beta > \gamma)$	**NC5** (El todo es mayor que la parte) + **NC** implícita: (monotonía $<$)
13.2.	$\varepsilon > \gamma \to \beta > \gamma$	MP 12, 13.1
13.3.	$\beta > \gamma$	MP 11, 13.2

Las inferencias efectuadas en este caso con relación al silogismo relacional son las siguientes:

$$\frac{c > b,\ b = d}{c > d} \quad \text{y} \quad \frac{\varepsilon > \gamma,\ \varepsilon + \phi = \beta}{\beta > \gamma}$$

Como se ve, la demostración propiamente dicha la hemos simbolizado casi en su totalidad en la lógica proposicional. Esto no es algo circunstancial, sino un rasgo común a las pruebas que se inscriben en esta tradición. De hecho, las formas de argumentación lógica utilizadas en los *Elementos*, muchas de las cuales las asume Euclides implícitamente, pertenecen casi en su totalidad a la lógica de proposiciones, al igual que las reglas de deducción.[10]

En resumen: Euclides desarrolla el argumento en torno a un caso específico que en su particularidad encierra la universalidad de los conceptos construidos. Por tanto, la demostración se desenvuelve al margen de lo que hoy denominamos *teoría de la cuantificación*, pues casi todas las proposiciones consideradas son particulares. La generalidad se alcanza notando que el argumento vale por igual para cualquier instancia de los conceptos implicados. Por ello al final Euclides anuncia una respuesta general: «*Por tanto, en todo triángulo, el lado mayor subtiende el ángulo mayor*» (subrayado nuestro). De esta manera pasa de una construcción particular a un enunciado general. El esquema lo expresa

[9] Aquí, la expresión «silogismo relacional» comprende diversas formas silogísticas que emplea Euclides en las demostraciones. Por lo general estas formas se basan en las nociones comunes, aunque muchas de ellas las asume de manera implícita, es decir, sin haberlas especificado previamente. V. gr., «De $a = b$ y $R(a, c)$ se infiere $R(b, c)$» (Ley de Leibniz), o bien, utilizando la noción de suma, «De $b > d$ y $a = b + c$ se infiere $a > d$» (monotonía de la desigualdad).

[10] Algunas formas deductivas utilizadas por Euclides: (1) Inversión lógica: $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ y sus variantes; (2) Reducción al absurdo: $(\neg p \to p) \to p; (p \to \neg p) \to \neg p$; (3) silogismo proposicional: $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$; (4) Diversas formas del silogismo relacional como, por ejemplo, $(a = b \wedge b = c) \to a = c$, o $(a + b = 2R \wedge a + b = c) \to c = 2R$, etc.; (5) Ampliación lógica: $p \to (q \to (p \wedge q))$, $((p \to q) \wedge (r \to s)) \to (p \wedge r \to q \wedge s)$; (6) Modus ponens: De p y $p \to q$ se infiere q; (7) Modus Tollens: De $p \to q$ y $\neg q$ se infiere $\neg p$, y (8) Negación de una alternativa: De $p \vee q$ y $\neg p$ se infiere q.

Parsons con suma claridad: Habiendo asumido una a particular tal que $F(a)$, «deduce» $G(a)$. Se tiene por tanto $F(a) \to G(a)$. No obstante, como a es arbitraria, se sigue que $\forall x(F(x) \to G(x))$.

5. Una mirada a la lógica tradicional desde la perspectiva actual

Consideremos la siguiente pregunta: antes del siglo XIX, ¿la lógica, tal como se le consideraba, habría podido producir una prueba enteramente deductiva de una proposición como la I.18 de Euclides?

Hasta mediados del siglo XIX la lógica consistía básicamente en la teoría del silogismo de Aristóteles junto con algunos elementos de la lógica proposicional de los estoicos. Hoy en día estas teorías están incluidas en lo que se conoce como lógica monádica (o *cálculo de clases*, en la terminología de Hilbert y Ackermann), la cual constituye un fragmento de la lógica de predicados en el que solo se consideran predicados de un argumento.[11] El problema con esta lógica es que con ella no es posible desarrollar o analizar debidamente argumentos relativos a las relaciones entre dos o más individuos, y mucho menos establecer su validez. Hilbert y Ackermann se refieren a esta situación con las siguientes palabras:

> [...] el formalismo aristotélico resulta inadecuado incluso en situaciones lógicas muy simples. Por ejemplo, es insuficiente para tratar los fundamentos lógicos de las matemáticas. Una falla específica se presenta cuando una relación entre varios objetos debe ser representada simbólicamente.
>
> Esto puede aclararse con un sencillo ejemplo. Considérese la afirmación: «Si B se encuentra entre A y C, entonces B también se encuentra entre C y A». Ciertamente, en el cálculo proposicional ordinario esto puede escribirse en la forma $X \to Y$; y en el cálculo de predicados monádico el enunciado conserva la misma forma. [...] No obstante, esta formulación no logra expresar la esencia lógica del enunciado, a saber, la simetría de A y C respecto de la relación «entre». Por lo tanto, no puede emplearse para derivar las consecuencias matemáticas del enunciado bajo consideración. Al respecto, nada cambia al utilizar la formulación en la lógica monádica [11, pp. 55-56].

Examinemos la situación. Según Aristóteles la proposición consiste en afirmar o negar algo de algo, de modo que se escinde en dos términos: un

[11] Una breve exposición de la teoría del silogismo de Aristóteles se halla en [2, cap. 1].

sujeto (aquello de lo que se habla) y un *predicado* (aquello que se afirma o niega del sujeto). Esa es la estructura gramatical de los enunciados simples, afirmativos o negativos, del lenguaje natural. Por lo tanto, lo que Aristóteles dice es que la forma lógica de las proposiciones coincide con la estructura gramatical de los enunciados que las expresan. Esta idea perduró en la lógica hasta el siglo XIX, donde a la postre fue cuestionada y rechazada por Frege.

Frege recusó la concepción aristotélica de la proposición mostrando la ineficacia de la división sujeto-predicado cuando se intenta mostrar el fondo lógico de aseveraciones que aluden a más de un individuo. Para ello ofreció el siguiente ejemplo. Consideremos los juicios:

a) Los griegos derrotaron a los persas en Platea.
b) Los persas fueron derrotados por los griegos en Platea.

Al construir estos enunciados la gramática nos obliga a asignar a uno de estos pueblos el papel de *sujeto* y enviar al otro al predicado. Así, en (a) el sujeto es «los griegos» y en (b) el sujeto es «los persas». No obstante, los dos enunciados comunican la misma información, son *equivalentes*.[12] Ergo la división sujeto-predicado es irrelevante para la lógica. Lo único significativo es la afirmación de que entre griegos y persas hay una relación, a saber, que uno de ellos derrotó al otro en Platea. De hecho en estos juicios *Platea* es un tercer término, de modo que el vínculo no es entre dos, sino entre tres entidades. Esta relación la podemos representar en el lenguaje simbólico de la lógica moderna como sigue: D(griegos, persas, Platea). En otras palabras, $D(x, y, z)$ representa una relación entre tres entidades x, y y z según la cual x derrotó a y en z.

Nótese que la expresión $D(x, y, z)$ no corresponde a la distinción sujeto-predicado. Más bien, corresponde a la división función-argumento que Frege tomó de las matemáticas. Cuando en la matemática escribimos una expresión como $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, la expresión «$f(x, y, z)$» denota una función de tres argumentos x, y y z. De la misma manera, la expresión «$D(x, y, z)$» representa una función de tres argumentos x, y y z, los cuales son en este caso pueblos y lugares. Una diferencia es que las imágenes bajo f son números, mientras que bajo D son proposiciones. Por ello se le llama *función proposicional*.

El que las proposiciones (a) y (b) anteriores sean *lógicamente equivalentes* indica que para la lógica es irrelevante a quién elegimos como sujeto y a quién enviamos al predicado al hablar de la relación. Se trata de un accidente gramatical que carece de importancia para la lógica.

[12] *Equivalentes* en el sentido de que «las consecuencias que se pueden derivar del primero, en combinación con otros juicios determinados, también se siguen del segundo cuando se le combina con los mismos juicios.»[4, p. 12]. La conclusión es simple: la idea de que la proposición consiste en atribuir un predicado P a un sujeto S es inoperante en la lógica.

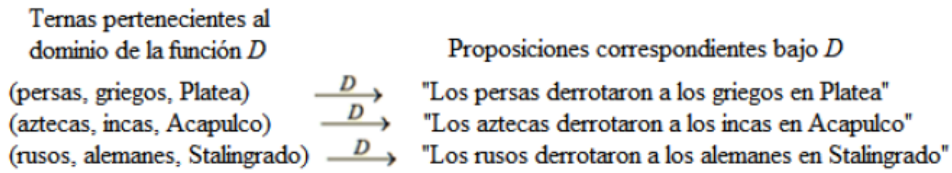


Figura 4. Las imágenes bajo la función D son proposiciones, las cuales son *verdaderas* o *falsas*; de ahí su importancia para la lógica.

Más bien, esta se centra en relaciones entre individuos, y en ella la cuantificación juega un papel primordial.

Estas ideas se hallan detrás de la crítica de Hilbert y Ackermann a enunciados como «B se encuentra entre A y C». De hecho el principio de simetría que mencionan al final de la cita lo podemos formular en la lógica de predicados como sigue, donde $E(x, y, z)$ significa «*y se encuentra entre x y z*»:[13]

$$\forall x \forall y \forall z (E(x, y, z) \to E(z, y, x))$$

En resumen: Frege reemplazó la estructura sujeto-predicado con la estructura función-argumento(s), fijando con ello una distinción esencial entre la forma gramatical de las proposiciones y su forma lógica. Esta idea sigue vigente en nuestros días y se halla en la base de la lógica matemática moderna.

Esta forma de representación permite expresar en el lenguaje del cálculo de predicados una multitud de relaciones de dependencia que se hallan presentes en la matemática moderna. Tales relaciones se enuncian mediante fórmulas en las que los cuantificadores se agrupan en bloques de indisoluble dependencia. Veamos algunos ejemplos:

(1) Densidad de los números racionales:

$$\forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z \land z < y))$$

(2) Definición de continuidad en un punto:

$$\begin{aligned} Cont(f, a) \equiv_{def}\ & a \in D_f \land \forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \to \exists \delta (\delta > 0\ \land \\ & \forall x (x \in D_f \land |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon))) \end{aligned}$$

(3) Axioma del supremo:

$$\begin{aligned} & \forall X ([(X \subseteq R \land X \neq \varnothing \land \exists y (y \in R \land \forall x (x \in X \to x \leq y)))] \to \\ & \exists z [z \in R \land \forall x (x \in X \to x \leq z) \land \forall y ((x \in R \to x \leq y) \to z \leq y)]) \end{aligned}$$

[13] En este caso la expresión «$E(x, y, z)$» denota una relación ternaria entre puntos. Ergo E actúa como una función que a cada terna de puntos sobre una línea recta le hace corresponder una proposición.

Nótese cómo en las fórmulas anteriores los cuantificadores $\forall$ y $\exists$ se articulan entre sí. Por ejemplo, en (1) el número z cuya existencia se afirma depende de los valores elegidos para x e y. Esto es imposible de expresar en la lógica monádica, pues en ella cada función proposicional está gobernada a lo más por un cuantificador, de modo que los cuantificadores siempre se pueden separar.[14]

6. De regreso a la geometría

Comparemos ahora el postulado I de los *Elementos* de Euclides con el axioma I.1 del libro *Fundamentos de la geometría* de Hilbert v. [10, p. 4]:

Primer postulado: *Trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta otro punto cualquiera.*

Axioma I.1 de Hilbert: *Dos puntos distintos A y B siempre determinan por completo una línea recta a.*

Comparación: el postulado de Euclides nos remite a la posibilidad de llevar a cabo una construcción, mientras que el axioma de Hilbert establece una relación de dependencia en la que cada pareja de puntos determina una línea recta, en consonancia con la moderna teoría de la cuantificación.

Valga la insistencia, dicha dependencia es imposible de expresar en el incipiente lenguaje simbólico de la lógica aristotélica. Por el contrario, en el lenguaje de la lógica de predicados tal hecho lo podemos formular como sigue: $\forall x \forall y((P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x = y)) \rightarrow \exists z(L(z) \wedge I(z,x) \wedge I(z,y)))$, donde $P(x)$ significa «x es un punto», $L(z)$ significa «z es una línea» e $I(z,x)$ significa «z incide con x». Digamos que la lógica clásica no tenía los medios para manejar esta clase de relaciones, ni contaba con los recursos expresivos necesarios para formular proposiciones de este tipo que, como acabamos de ver, se hallan en forma velada detrás de los postulados de Euclides.[15] ¿Cómo solían suplirse estas carencias? La respuesta es clara para nosotros: realizando construcciones.[16]

---

[14]Por ej., la fórmula $\forall x \exists y(F(x) \rightarrow G(y))$ es equivalente a $\exists x F(x) \rightarrow \exists y G(y)$, de modo que los cuantificadores se han separado.

[15]De la misma manera, con base en la lógica tradicional es imposible producir una deducción enteramente lógica de la proposición I.18 a partir de los postulados de Euclides. Por ejemplo, en ella se requiere del manejo de enunciados como «Para cualesquiera tres puntos A, B y C, si $AC > AB$, entonces existe un punto D en AC tal que $AB = AD$» que tiene una estructura cuantificacional similar a las ya referidas.

[16]No queremos decir que los antiguos conocían las limitaciones de la lógica del momento y que, deliberadamente, decidieron recurrir a la construcción geométrica como alternativa. Nuestro análisis es sincrónico: examinamos, desde la perspectiva de la lógica moderna, ciertas circunstancias que rodearon la escritura de los *Elementos*, y con ello nos explicamos ciertas pautas que se hallaban presentes en la generación del conocimiento en esa época: el uso de construcciones geométricas y diagramas. Digamos que, desde la perspectiva actual, la construcción cubrió un vacío que en ese momento la lógica no podía llenar.

Podemos decir entonces que en la geometría tradicional el razonamiento no podía limitarse al manejo formal de los conceptos. Requería de esa actividad adicional que Kant denomina *construcción de conceptos*, es decir, de la construcción de figuras cuyos elementos corresponden a los conceptos implicados en el problema, cual «materializaciones» de ellos.

Por lo demás, el uso de construcciones trae consigo el descubrimiento de propiedades y relaciones entre los objetos mediante la observación de las figuras. En muchas ocasiones tales propiedades y relaciones suelen permanecer indefinidas en el texto de Euclides.

Por ejemplo, en la prueba que presenta Euclides de la proposición I.18 se hacen presentes ciertas cuestiones relativas al orden entre los puntos sobre una línea recta y ciertas propiedades topológicas de los ángulos (v. gr., su interioridad o exterioridad con relación a un triángulo), las cuales se hallan presentes en los razonamientos:

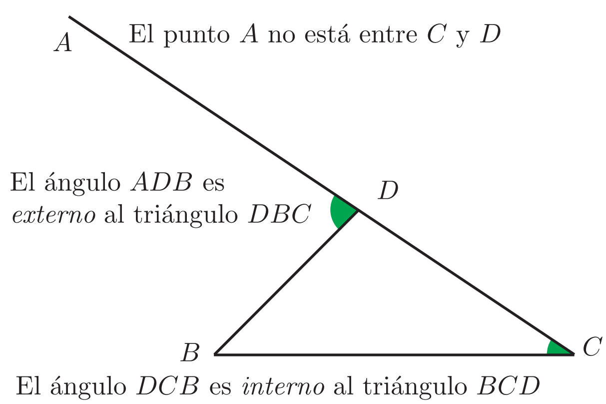


Figura 5

1) «estar entre» es una relación entre los puntos de la línea por A y C.
2) «interno» y «externo» son propiedades topológicas.[17]

Ninguna de estas propiedades o relaciones está definida en los *Elementos*. Más bien, las reconocemos al observar la figura, es decir, nos son dadas de manera intuitiva.

En la prueba, Euclides acepta tales hechos a través de la figura, sin la necesidad de definir los conceptos correspondientes o postular sus propiedades. Esto se puede notar desde la formulación de la proposición, donde Euclides habla de *ángulos internos* y *ángulos externos* sin que haya en los *Elementos* una definición de tales nociones. El significado de

[17]En general, una propiedad es *topológica* cuando se conserva bajo homeomorfismos, es decir, bajo transformaciones continuas cuyas inversas también son continuas.

estos términos solo se entiende con la figura (digamos que «interior» y «exterior» son nociones definidas implícitamente a través de ella). Así, el diagrama expone ciertos objetos en consonancia con los conceptos aludidos en la proposición, un triángulo DBC y una extensión DA de uno de sus lados, pero muestra muchas cosas más como, por ejemplo, la interioridad o exterioridad de los ángulos, o las relaciones de posición entre los puntos A, D y C. Esto último participa veladamente en el argumento: el ángulo $\angle ADB$ es externo al triángulo DBC en virtud de que el punto A no se halla entre C y D, lo cual nos lo dice la intuición, más no se infiere (ni se puede inferir) de los postulados. Insistimos: estas propiedades solo se pueden reconocer en el diagrama, el cual se convierte de esta manera en una parte esencial de la prueba.[18]

El primero en exigir abiertamente la eliminación de las lagunas en la deducción matemática fue Moritz Pasch en 1882 v. [14]. Fue entonces que hizo explícitos los axiomas de orden entre los puntos de una línea recta. En consonancia con Pasch, Hilbert, en los Fundamentos de la geometría de 1899, incorpora tales axiomas en el Grupo II. Se trata de principios que, de alguna manera, enuncian lo que nuestra intuición espacial supone respecto al orden entre los puntos de una línea recta. Esto tiene, por supuesto, importancia lógica y filosófica.

Podemos decir entonces que en el texto de Hilbert el método axiomático encuentra su expresión moderna y toma la forma en que lo conocemos hoy en día. En él la geometría es vista como un sistema hipotético-deductivo que no depende del significado que le pudiéramos dar a los axiomas, de modo que la única herramienta para edificar la teoría es la deducción lógica.

7. ¿Cómo se prueba la proposición I.18 en el sistema de Hilbert?

Esta sección, más bien extensa, la incluimos a sugerencia de uno de los árbitros de este ensayo. La idea es mostrar cómo se prueba una proposición como la I.18 en el sistema de Hilbert.[19] Dada la multitud

[18] A este tipo de pruebas, en las que muchos pasos cruciales se dan en virtud de observaciones hechas en un diagrama, se les suele llamar *diagramáticas* v. [15]. Lejos de ver un defecto en lo anterior, Kant lo considera un rasgo esencial de la demostración matemática, un recurso sin el cual no sería posible el conocimiento matemático en general. Esto lo consigna en su *Crítica de la razón pura* de 1781, donde elabora una epistemología de las matemáticas que incorpora tales elementos. Su postura se puede justificar de alguna manera advirtiendo que en su momento no había otro camino. Contra ello debieron luchar lógicos, filósofos y matemáticos a finales del siglo XIX y principios del XX.

[19] El árbitro comenta que, como lector, cuando comenzó a hacerse preguntas como «¿cómo será una prueba que cumple con las exigencias modernas de rigor?», lo que encontró fue una descripción poco clara, mientras que, a su juicio, «[...] un lector de *Miscelánea Matemática* espera, una vez mostradas las deficiencias de la prueba euclidiana, una prueba de I.18 que sí supla todas las

de tareas por realizar, nos limitaremos a resaltar algunas cuestiones. Esperamos que el lector esté familiarizado con los axiomas de Hilbert para la geometría plana: los axiomas I.1-I.3 del grupo I (*axiomas de incidencia*), II.1-II.5 del grupo II (axiomas de *orden* o *intermediación*) y los axiomas IV.1-IV.6 del grupo IV (axiomas de *congruencia*), tal como estos se exponen en [10]. También asumimos que ha leído el prefacio y la introducción a dicha obra y la descripción que ofrece Hilbert de sus axiomas. Eso será fundamental para entender lo que sigue.

Respecto a la proposición I.18 de los *Elementos*, cabe señalar que Hilbert no la prueba de manera simple en el texto de 1899. Eso lo hace Robin Hartshorne en su libro *Eucild and Beyond* v. [7], donde presenta una prueba de la proposición I.16 (de la cual la proposición I.18 es un corolario) a partir de un sistema que en esencia es el mismo que el de Hilbert. En lo que sigue exponemos dicha prueba respetando la forma en que fue desarrollada, no sin invitar al lector a que lea el capítulo 2 de [7]. El autor enuncia el teorema escuetamente como sigue (pág. 101):

Proposición 10.3 (Teorema del ángulo externo (I.16))
En todo triángulo, el ángulo externo es mayor que cualquiera de los ángulos interiores y opuestos.

El camino que lleva de los axiomas a la proposición anterior es largo: requiere de múltiples definiciones y teoremas que en principio se pueden probar con argumentos enteramente deductivos, sin apoyarse en figura alguna. La idea, como lo señala Gödel, es completar las pruebas de los *Elementos* haciendo explícitos los pasos deductivos [y teoremas] que faltan.[20] Esta exigencia de mayor rigor contrasta con la soltura con que Hilbert y Hartshorne desarrollan la teoría: ante la fría cadena de inferencias formales por desplegar, optan por argumentar en un lenguaje muy cercano al de Euclides y sin recurrir a ningún simbolismo especial más allá de lo necesario. Es más, en la práctica acostumbran utilizar diagramas a fin de significar de manera inmediata las relaciones consideradas, si bien evitan tomar información de ellos. Obviamente, estos manejos pueden confundir al lector, haciéndolo creer que no se han superado las viejas prácticas. Como veremos más tarde, esta aparente desatención del rigor lógico es tan solo un recurso.

La prueba que ofrece Hartshorne de la proposición I.16, de la cual la I.18 es un corolario, parece a simple vista una réplica de la que presenta Euclides en los *Elementos*, al punto de mostrar el mismo diagrama. No

---

limitaciones que se han señalado.» En este apartado indicamos cómo se puede llevar a cabo dicha tarea.

[20] Al comentar la obra de Euclides, Gödel advierte que «si Euclides hubiera conocido la lógica [moderna], se habría dado cuenta de que simplemente no hay manera de completar sus pruebas haciendo explícitos los pasos [deductivos] que faltan».

obstante, el aparato teórico que subyace a ella es muy distinto, y todo el argumento lo podría reemplazar con una larga y rigurosa prueba deductiva. Veamos cómo procede apoyándose en el siguiente diagrama:

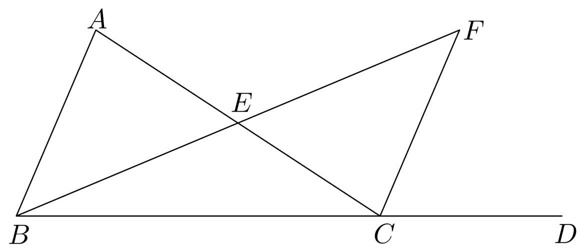


Figura 6

Sea ABC el triángulo dado. Probaremos que el ángulo exterior $\angle ACD$ es mayor que el ángulo interior y opuesto $\angle A$. Sea E el punto medio de AC (I.l0); extiéndase BE hasta F de modo que $BE \cong EF$ (axioma C1 de Hartshorne o axioma IV.1 de Hilbert). Trácese la línea CF. Los ángulos $\angle AEB$ y $\angle CEF$ con vértice en E son iguales (I.15).[21]

Por el axioma SAS (axioma C6 de Hartshorne o axioma IV.6 de Hilbert), los triángulos ABE y CFE son congruentes entre sí. De ahí que $\angle A \cong \angle ECF$. Falta probar que $\angle ECF < \angle ACD$. Esto se logra probando que el rayo $\overrightarrow{CF}$ se halla en el *interior* del ángulo ACD (un hecho que Euclides da por sentado al observar la figura). La diferencia con Euclides es que todas las nociones aquí referidas (*rayo, interior*, etc.) cuentan con una definición precisa, y las propiedades relativas a ellas se pueden probar con base en los axiomas.

Vemos a grandes rasgos cómo define Hartshorne el que un rayo se halle al *interior* de un ángulo. Esto requiere de diversas nociones previas entre las que se hallan *segmento, separación* de una recta por un punto, *lados de una recta, puntos en lados opuestos* respecto a una recta, *ángulo* e *interior* de un ángulo, cuyas definiciones solo se apoyan en los términos indefinidos.

Segmento: Dados dos puntos A y B, el *segmento* $\overline{AB}$ consiste de A, B y todos los puntos C que *están entre* A y B. Los puntos A y B son los *extremos* del segmento.

[21] Como se ve, Hartshorne utiliza un lenguaje similar al de Euclides. No obstante, esto es solo un modo de hablar, de la misma manera en que la figura es una simple ilustración que orienta sus razonamientos, no una fuente de información. Por ejemplo, cuando dice «Trácese la línea CF» en realidad no nos pide que hagamos tal cosa, sino que dirijamos nuestra atención al triángulo CFE. Por otra parte, las proposiciones aludidas I.10 y I.15 ya las ha probado en el mismo capítulo, y el axioma SAS (que menciona enseguida) no es otra cosa que el criterio lado-ángulo-lado para la igualdad de triángulos.

Triángulo: Dados tres puntos no colineales A, B y C, el *triángulo* ABC con *vértices* A, B y C consiste en la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. Estos tres segmentos son los *lados* del triángulo.

Lateralidad de los puntos de una recta respecto a un punto A incidente con ella. Dada una recta m, un punto A en ella y dos puntos B y C de m distintos de A, decimos que B y C se hallan del *mismo lado* de m respecto de A si y solo si A *no está en* el segmento $\overline{BC}$. Por el contrario, si el punto A pertenece al segmento $\overline{BC}$, decimos que B y C se hallan en lados *opuestos* de m respecto de A.

Nótese que esta relación es entre cuatro entidades: m, A, B y C (es decir, su dominio está formado por cuartetas), y su definición se apoya enteramente en las nociones indefinidas.

Al respecto, son muchas cosas las que se prueban. Si denotamos con m_{A1} y m_{A2} los lados en que A divide a m, entonces m_{A1} y m_{A2} son dos conjuntos ajenos entre sí, la relación «estar de un mismo lado respecto a A» es de equivalencia y m es la unión de m_{A1} y m_{A2} junto con A. A m_{A1} y m_{A2} se les llama los *lados* de m respecto a A. Esta idea de «separación» se repite con relación a las rectas y el plano.

Lateralidad de los puntos del plano respecto a una recta m. Dada una recta m en el plano, podemos definir la noción de *colateralidad* para los puntos de plano que no *inciden* con m de la siguiente manera: dos puntos A y B que no inciden con m son *colaterales respecto a* m si y solo si el segmento $\overline{AB}$ no contiene ningún punto de m. De lo contrario, decimos que A y B están en *lados opuestos* de m.

Los puntos que no *inciden* con m los podemos dividir en dos conjuntos Y_{m1} y Y_{m2} ajenos ente sí, de modo que el plano es la unión de Y_{m1} y Y_{m2} junto con m y la relación «ser *colaterales* respecto a m» es de equivalencia. A Y_{m1} y Y_{m2} se les llama *lados* del plano respecto a m. Todo lo anterior se prueba con base en los axiomas del grupo II. Al hecho de que la recta divide al plano en dos regiones se le conoce como «teorema de la separación del plano» (proposición 7.1 de Hartshorne).

Rayo: Dados dos puntos A y B, el *rayo* $\overline{AB}$ consiste de A junto con todos los puntos de la línea AB que están del mismo lado que B respecto a A. El punto A se llama *origen* del rayo.

Ángulo: Dados tres puntos A, B y C no colineales, el *ángulo* $\angle BAC$ con *vértice* en A y *lados* $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es la unión de los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Interior de un ángulo: El *interior* de un ángulo $\angle BAC$ consiste en todos los puntos D tales que: (1) D y C están de un mismo lado respecto a la línea AB y (2) D y B están del mismo lado respecto a la línea AC.

Interior de un triángulo: Si ABC es un triángulo, el *interior* de ABC consiste en todos los puntos D que se hallan simultáneamente al interior de los ángulos $\angle ABC$, $\angle BCA$ y $\angle CAB$, véase la figura 7.

Ángulo externo: Si ABC es un triángulo y D un punto de la línea BC tal que C está entre B y D, entonces el ángulo $\angle ACD$ se dice que es *externo* al triángulo ABC (véase la figura 5).

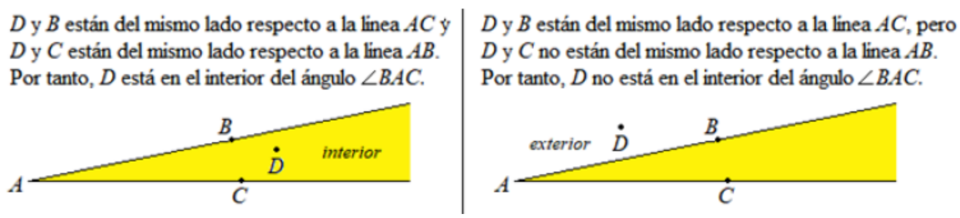


Figura 7

De esta manera las nociones de *interioridad* y *exterioridad*, así como las de ángulo *interno* y ángulo *externo*, quedan definidas a partir de las nociones básicas de *intermediación*, *orden* y *congruencia*.

En cuanto a la suma de ángulos, si bien en el tratamiento moderno esta operación no está definida para todos los ángulos, Hartshorne nos muestra cómo se le puede incorporar de un modo satisfactorio con base en el axioma IV.6 de Hilbert v. [10, §9]. Ahora bien, antes de pasar a este punto examinemos cómo prueba Hartshorne que el rayo $\overrightarrow{CF}$ se halla en el *interior* del ángulo ACD (figura 5). Esto lo hace con base en el *teorema de la barra transversal* (proposición 7.3 de [7]):

Teorema de la barra transversal. Si A, B y C no son colineales, y D es un punto interior del ángulo $\angle BAC$, entonces el rayo $\overrightarrow{AD}$ interseca al segmento BC en un punto.

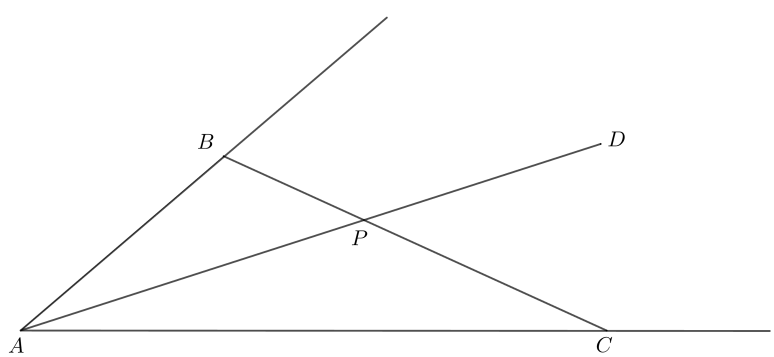


Figura 8

Hay una enorme similitud entre este teorema y el axioma II.5 de Hilbert (axioma de Pasch). La única diferencia es que la línea AD

no pasa por un punto interior del segmento AC, sino por uno de sus extremos. Para poder aplicar el axioma II.5 Hartshorne recurre a un pequeño artificio.

Denotemos con l, m y n a las líneas AB, AC y AD (véase la figura 9) y sea E un punto sobre la línea m tal que A está entre E y C (cuya existencia está asegurada por el axioma II.2 de Hilbert).

En este caso podemos aplicar el axioma II.5 al triángulo BEC y la recta AD, pues A se halla sobre el lado EC, de modo que la línea n pasa por un punto al interior de este segmento. Conforme al axioma, n pasa por un punto del segmento BC (lo cual queremos demostrar), o un punto del segmento BE.

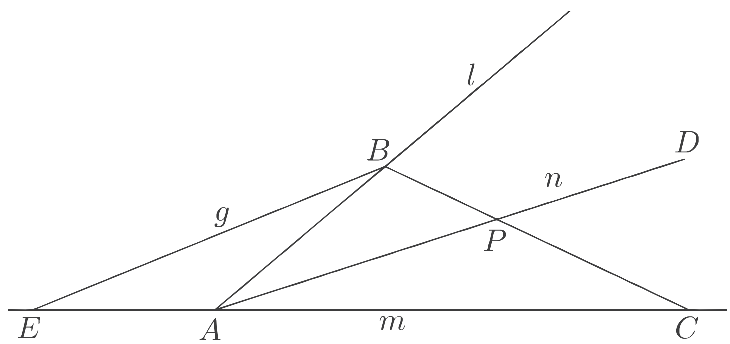


Figura 9

Supongamos que n pasa por un punto de $\overline{BE}$. Dicho punto no puede ser B, pues n ya interseca a l en $A \neq B$. Por su parte, el segmento $\overline{BE}$ interseca a l en B, de modo que los demás puntos del segmento se hallan del mismo lado que E respecto a l. Por su parte, C se halla al otro lado de l respecto a E (así fue tomado E), por lo que todos los puntos de $\overline{BE}$ (salvo B) están al otro lado de l respecto a C (recordemos que en esta geometría se cumple lo siguiente: si X e Y están en lados opuestos respecto a una recta k, y X y Z están del mismo lado respecto a k, entonces Y y Z están en lados opuestos respecto a k). Por el contrario, el rayo $\overrightarrow{AD}$ está al interior del ángulo $\angle BAC$, de modo que todos sus puntos (salvo A) están del mismo lado que C respecto a l. Así, la hipótesis de que n interseca al segmento $\overline{BE}$ resulta en un absurdo. Por tanto, n interseca a $\overline{BC}$ en un punto P, lo cual queríamos demostrar.

Esta prueba pone de manifiesto la desenvoltura con que Hartshorne (al igual que Hilbert) procede en el desarrollo de la teoría. Para finalizar la prueba del *teorema del ángulo externo* faltan dos cosas por definir: qué se entiende por la *suma de ángulos* y qué significa que un ángulo es *menor* que otro.

Suma de ángulos: Si $\angle BAC$ es un ángulo y $\overrightarrow{AD}$ es un rayo al interior de él, entonces se dice que el ángulo $\angle BAC$ es la *suma* de los ángulos $\angle BAD$ y $\angle DAC$.[22] En cuanto a la relación de igualdad entre ángulos, sus propiedades están caracterizadas en el grupo IV de axiomas bajo el apelativo de congruencia, la cual se denota con el símbolo «$\cong$».

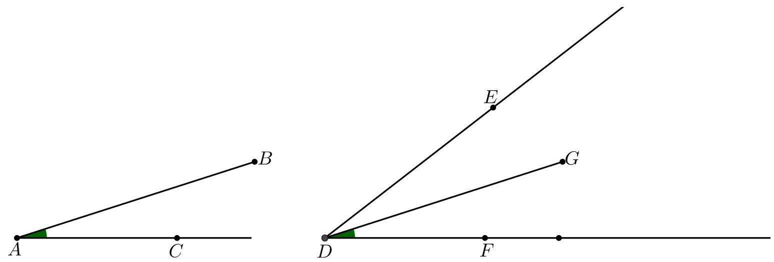


Figura 10

Desigualdad entre ángulos: Sean $\angle BAC$ y $\angle EDF$ dos ángulos. Decimos que $\angle BAC$ es *menor* que $\angle EDF$ si existe un rayo $\overrightarrow{GD}$ al interior del ángulo $\angle EDF$ tal que $\angle BAC \cong \angle GDF$. En tal caso escribimos $\angle BAC < \angle EDF$. De igual forma, decimos que $\angle EDF$ es *mayor que* $\angle BAC$ y escribimos $\angle EDF > \angle BAC$.

Volviendo a la figura 5 y en conformidad con la definición anterior, es claro que $\measuredangle ECF < \measuredangle ACD$, pues todas las condiciones exigidas en la definición de «desigualdad entre ángulos» se cumplen: el rayo $\overrightarrow{CF}$ se halla en el *interior* del ángulo ACD, el ángulo $\measuredangle ECF$ es congruente consigo mismo, etc. Pero $\measuredangle ECF \cong \measuredangle BAC$ $(= \measuredangle A)$, de modo que $\measuredangle A < \measuredangle ACD$, lo cual era lo que había que demostrar.

Dejamos al lector la tarea de investigar cómo se prueba la proposición I.18 a partir de este último resultado. Al respecto, véase cómo prueba Hartshorne las proposiciones I.2-I.15 de los *Elementos*.

8. Una cuestión de estilo

La prueba que acabamos de presentar de la proposición I.16 no parece cumplir con las exigencias de la lógica moderna: el lenguaje utilizado no es muy distinto del de Euclides, y en ella figuran diversos diagramas donde se suponen prohibidos. Hay una razón para ello: Hartshorne –al igual que Hilbert– trata de hacer más comprensibles las cosas.

Esto lo aclara Hilbert en unas notas de clase escritas en 1894, donde dice lo siguiente:

[22] Cabe señalar lo siguiente: si comenzamos con dos ángulos cualesquiera, no siempre existe un ángulo que sea su suma. Al respecto, v. [7, pp. 91-92].

> La prueba de un teorema se puede dar recurriendo a una figura adecuada, aunque este recurso no es imprescindible. Solo hace que sea más fácil de entender, y ofrece un fructífero recurso para descubrir nuevas proposiciones. [...] La elaboración de figuras es equivalente a la experimentación para los físicos, y la geometría experimental se termina con el establecimiento de los axiomas. [6, p. 76].

Para Hilbert y Hartshorne es claro que las pruebas que ofrecen en sus sistemas no están elaboradas con el rigor exigido por la lógica. La razón de no hacerlo así se halla en la cita anterior: no quieren oscurecer lo que están haciendo. Digamos que privilegian la comprensión sobre el rigor. Y si bien para ellos debe ser claro cómo deducir los teoremas de los axiomas, en sus libros dejan al lector la tarea de llenar tales lagunas deductivas.[23]

Como punto final, en lo que sigue comparamos la manera en que Euclides aborda ciertas cuestiones y cómo lo hacen Hilbert y Hartshorne, lo cual tiende a reforzar nuestra tesis.

1) Con relación a la *congruencia* entre figuras, Euclides suele determinarla realizando construcciones. Por ejemplo, en la prueba de la proposición I.4 habla de «aplicar un triángulo T_1 a otro triángulo T_2», lo cual significa «construir un triángulo igual al T_1 encima del triángulo T_2». Si como resultado el triángulo construido coincide con T_2, ello quiere decir que T_1 y T_2 son iguales entre sí (*congruentes entre sí* en la jerga moderna).

   Por su parte, Hilbert y Hartshorne postulan las propiedades básicas de esta relación (la de *congruencia*), y es con base en tales postulados que se debe probar la congruencia de diversas entidades geométricas (cosa que a menudo dejan como tarea para el lector).
2) Frente al método de superposición recién indicado, el cual remite a un contenido, Hilbert recurre a un axioma –el IV.6, el cual formaliza el criterio lado-ángulo-lado– para establecer la congruencia entre triángulos sin tener que realizar construcciones. Asimismo, en los axiomas IV.1, IV.2, IV.3, IV.4 y IV.5 postula varias cosas: la existencia de segmentos congruentes con un segmento dado en el plano, la transitividad de la congruencia entre segmentos, la congruencia de las sumas de segmentos congruentes, la existencia

[23] Desde hace tiempo tales cuestiones se exploran desde una nueva perspectiva: la de la inteligencia artificial y la demostración automática de teoremas. A la fecha los resultados obtenidos confirman la tesis de que las proposiciones que figuran en los *Elementos* son deducibles en el sistema de Hilbert. V. gr., en la página web geocoq https://geocoq.github.io/GeoCoq/ los autores presentan una formalización de la geometría en el asistente de prueba COQ, y explican cómo producir pruebas formales de todas las proposiciones del Libro I de los *Elementos* con base en los axiomas de Hilbert y los axiomas de Tarski para la geometría elemental. Al respecto no insistiremos en este tema, el cual cuenta con una extensa literatura en libros y artículos.

de ángulos congruentes a un ángulo dado en el plano y la transitividad de la congruencia entre ángulos. Esto axiomas nos libran de la construcción, pues permiten manejar tales relaciones en forma deductiva. Esto, a pesar de que en la práctica Hilbert y Hartshorne utilicen una terminología muy cercana a la de Euclides.

3) En cuanto a la posición relativa de los puntos, la cual Euclides la resuelve o da por sentada a través de la observación de las figuras, Hilbert establece y trata estas cuestiones a través de los axiomas de intermediación. Lo mismo podemos decir de las nociones de interioridad y exterioridad de puntos, rayos y ángulos respecto a diversas figuras geométricas, las cuales se pueden manejar a través de las correspondientes definiciones –tal como lo hemos visto en párrafos anteriores.

   El resultado de todo esto es la exclusión de la toma de datos de los diagramas, lo cuales pasan a ser simples ilustraciones o elementos heurísticos que indican o sugieren lo que hay que demostrar.

4) Un comentario adicional: ¿por qué en la práctica no es factible recurrir a un rigor como el que reclama la lógica matemática?

   Supongamos un rigor como el requerido en la teoría de la demostración de Hilbert. En tal caso, las pruebas se presentarían como sucesiones de fórmulas –consistentes tal vez en decenas o centenas de símbolos–, muchas de las cuales tendrían una estructura muy complicada. A su vez la deducción estaría sujeta a reglas muy rigurosas que obligarían a desmenuzar cada prueba en una multitud de pasos elementales, lo cual las haría difíciles de seguir y entender.

   La dificultad de reconocer el sentido de una fórmula medianamente compleja no es difícil de ilustrar. Por ejemplo, la siguiente fórmula expresa, en el lenguaje de la lógica simbólica, al Axioma II.5 de Hilbert, el cual dista mucho de ser el más complicado (al respecto, invitamos al lector a que intente formalizar el Axioma IV.4 para el plano):

$$\begin{gathered}\forall x\forall y\forall z((P(x)\wedge P(y)\wedge p(z)\wedge\neg\exists w(L(w)\wedge I(w,x)\wedge I(w,y)\wedge I(w,z)))\rightarrow\\ \forall a((L(a)\wedge\exists u(P(u)\wedge E(x,u,y)\wedge I(a,u)))\rightarrow\\ \exists v(P(v)\wedge((E(x,v,z)\wedge I(a,v))\vee(E(y,v,z)\wedge I(a,v)))))).\end{gathered}$$

¿Podría el lector reconocer de inmediato el hecho de que esta fórmula expresa tal axioma si lo único que le dijeran es que las expresiones $P(x)$, $L(x)$, $I(x,y)$ y $E(x,y,z)$ se leen como «x es un punto», «x es una línea», «x incide con y» y «y está entre x y z»?

En este sentido la expresión verbal del axioma que ofrece Hilbert –y el diagrama adjunto– facilitan su comprensión, aún a expensas del rigor.

9. Un nuevo concepto de las teorías matemáticas

Puntualicemos la postura de Hilbert frente a la geometría en su texto de 1899. En una carta dirigida a Frege ese mismo año dice lo siguiente:

> Yo no quiero asumir nada como conocido por anticipado; considero mi explicación de la sección 1 [del libro *Fundamentos de la geometría*] como una definición de los conceptos punto, línea, plano –si uno añade nuevamente todos los axiomas de los grupos I al V como marcas características. Si se buscan otras definiciones de «punto», v. gr., mediante paráfrasis en términos de inextensión, etc., entonces me debo oponer a tales intentos en forma decisiva; uno busca algo que nunca encontrará porque no hay nada allí. [5, p. 39].

Esta idea la reitera más adelante al señalar que la teoría no es otra cosa que un montaje de conceptos formales:

> [...] es obvio que toda teoría es tan solo un andamiaje o esquema de conceptos junto con las relaciones necesarias entre ellos, y que los elementos básicos se pueden pensar como uno quiera. [...] En otras palabras: cualquier teoría se puede aplicar a una infinidad de sistemas básicos de elementos. Esta circunstancia se utiliza, por ejemplo, en el principio de dualidad [de la geometría proyectiva], etc., y yo me he servido de ella en mis pruebas de independencia. [...] Pero la circunstancia que he mencionado no puede ser un defecto de las teorías (representa más bien una enorme ventaja), y es en todo caso inevitable [5, pp. 40-41].[24]

En otras palabras, para Hilbert las propiedades y relaciones establecidas por los axiomas no son acerca de nada en particular, y pueden ser satisfechas por otros objetos distintos de los que se tuvieron en mente al idear la teoría.[25] Esto equivale a mirar los axiomas como simples enunciados formales que no describen ninguna clase de hechos preestablecidos (no tienen valor de verdad): son meras hipótesis puestas ahí

[24] Las referidas pruebas de independencia las ofrece en el capítulo II de los *Fundamentos de la geometría*, en lo que consideramos, con cierto sentido del humor, el lanzamiento de la versión 2.0 de la *teoría de modelos*.

[25] Ante la pregunta sobre el tema de estudio de la geometría, no encontramos mejor respuesta que la de Einstein: «El tema de estudio de la geometría está definido por los axiomas. Estos axiomas son una libre creación de la mente humana.» v. [3], 6° párrafo.

como punto de partida de la demostración.[26] Esta es quizás la principal diferencia entre Hilbert y Euclides.

En consecuencia, la única manera de edificar la teoría es mediante el despliegue lógico de lo dicho en los axiomas. Esto llevó a Hilbert a dos cosas:

a) A establecer como única condición exigible a una teoría el que sus axiomas no sean contradictorios entre sí, y
b) A elaborar un criterio *sui generis* de existencia matemática –el cual sigue vigente en nuestros días–: en una teoría podemos admitir como *existente* todo aquello que no sea contradictorio con los axiomas.

En otras palabras, para Hilbert la *consistencia* es el único fundamento de las teorías matemáticas, lo que las hace posibles como tales. Con ello abre las puertas a una gran diversidad de teorías, sin la necesidad de saber si son descriptivas de algún tipo de realidad.

En cuanto a (b), en la carta a Frege de 1899 Hilbert se expresa de la siguiente manera: «De la verdad de los axiomas usted deduce que no pueden contradecirse entre sí, mientras que yo, por mi parte, creo lo contrario, que cuando los axiomas no se contradicen entre sí, por ese motivo son verdaderos, y por ese motivo los objetos que definen existen.»[5, p. 41].

Dichas ideas provienen de Cantor, quien en 1883 escribió: «La matemática es enteramente libre en su desarrollo, y sus conceptos solo se ven restringidos por la necesidad de ser no contradictorios y estar coordinados con los conceptos previamente introducidos mediante definiciones precisas. [...] La esencia de las matemáticas reside en su libertad.» (Citado en [13, pp. 1358-59]).

Desde este nuevo punto de vista la matemática se mira como la *ciencia de lo posible*, donde por posible se entiende aquello que no lleva a contradicción. En particular, con ello Hilbert busca legitimar la teoría de los números transfinitos, «el paraíso que Cantor ha creado para nosotros», sin la necesidad de precisar sus objetos (la referida existencia solo lo es en un sentido matemático, no real).[27]

En cuanto a la consistencia de los axiomas de la geometría, Hilbert dedica el segundo capítulo de [10] a esta cuestión. Los resultados obtenidos fueron parciales: lo único que logró fue una prueba de consistencia

[26] Las siguientes son algunas expresiones que se han utilizado para referirse a los axiomas y a la teoría en general: «recipientes vacíos» (Pasch), «sistemas de objetos no interpretados» (Curry), «teorías hipotético-deductivas desligadas de toda interpretación concreta posible» (Weyl).

[27] La cuestión de probar la consistencia de las más importantes teorías matemáticas, incluyendo la de Cantor, se volvió prioritaria para Hilbert. Fue así que en los años veinte elaboró un ambicioso programa tendiente –en sus propias palabras– a «eliminar en forma definitiva el problema de los fundamentos de las matemáticas» mediante pruebas de consistencia absolutas.

relativa, al mostrar que una inconsistencia en ella llevaría a una inconsistencia en el sistema de los números algebraicos. Lo que no pudo fue probar de manera absoluta la imposibilidad de deducir una contradicción a partir de dichos axiomas.

10. Palabras finales

Si bien hemos presentado el punto de vista de Hilbert como si fuera algo propio, en realidad en él sintetiza diversas ideas acerca de las matemáticas que se fueron perfilando en su tiempo. El que no hayamos tomado en cuenta el contexto histórico en que Hilbert desarrolló sus ideas se debe a nuestro propósito inicial: comparar los puntos de vista clásico y moderno respecto a la geometría –y a las matemáticas– tomando a Euclides y Hilbert como ejemplos representativos.

La postura de Hilbert refleja en gran medida el carácter de la matemática de su tiempo, de la cual fue un artífice. Cuando decidió investigar los fundamentos de la geometría ya habían entrado en escena cuestiones como, por ejemplo, las geometrías no euclidianas, la teoría de los números transfinitos de Cantor y el álgebra abstracta junto con el estudio de nuevas estructuras como los grupos, los anillos, las álgebras de Boole o los cuaternios de Hamilton, lo cual alentó a la colectividad a repensar la matemática, sus métodos y objetivos. Un rasgo distintivo de la matemática de su tiempo fue la tendencia a la abstracción. Por ejemplo, la teoría de grupos no es acerca de un orden particular de objetos, sino acerca de cualquier cosa que tenga estructura de grupo. Se trata de una noción muy general, la cual se aplica a los movimientos rígidos en el espacio, a las simetrías de las figuras, a la estructura aditiva de los números enteros, a la deformación de curvas en el espacio, a las operaciones con matrices en el álgebra lineal, a las clases residuales módulo n, a las funciones biyectivas continuas de un intervalo de reales sobre sí mismo, etc. Lo único que se pide es la posibilidad de combinar dos objetos de cierto tipo para obtener uno más. V. gr., dos movimientos rígidos consecutivos dan lugar a un movimiento rígido, la suma de dos números es otro número, la deformación de la curva que resulta al deformar una curva inicial, es otra deformación de la curva inicial. En este sentido Hilbert no actuó en forma aislada, sino que en su obra cristalizó el espíritu de la matemática de su tiempo. No obstante, adentrarnos en estas cuestiones habría requerido de un ensayo mucho más extenso que el presente escrito. Al respecto el lector podrá consultar [12, 16, 17].

Bibliografía

[1] E. de Alejandría, *Elementos (libros I-IV)*, Biblioteca Clásica Gredos 155, Madrid, 2016.

[2] H. DeLong, *A Profile of Mathematical Logic*, Reading, Massachusetts, Addison Wesley, 1970.

[3] A. Einstein, «Geometry and Experience», Traducción al inglés de una conferencia pronunciada ante la Academia Prusiana de Ciencias en Berlín, enero de 2021. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Einstein_geometry/.

[4] G. Frege, *Conceptografía*, Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Investigaciones Filosóficas, 1972.

[5] ———, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Chicago, University of Chicago Press, 1980.

[6] M. Hallett y U. Majer, *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry 1891-1902*, Springer, 2004.

[7] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, New York, 2000.

[8] T. L. Heath, *The Elements of Euclid. 3 vols.*, Dover Publications, Inc., New York, 1956.

[9] J. L. Heiberg, *Euclid's Elements of Geometry*, Lulu Books, 2007, traducción al inglés del texto Euclidis Elementa, editado y traducido al latín por J. L. Heiberg entre 1883 y 1885, https://farside.ph.utexas.edu/books/Euclid/Elements.pdf.

[10] D. Hilbert, *Foundations of Geometry*, La Salle, Illinois, Open Court Publishing Co., 1950, https://math.berkeley.edu/~wodzicki/160/Hilbert.pdf.

[11] D. Hilbert y W. Ackermann, *Principles of Mathematical Logic*, Nueva York, Chelsea Publishing Company, 1950.

[12] I. Kleiner, *A History of Abstract Algebra*, Birkhäuser, Boston, 2007.

[13] M. Kline, *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Alianza Editorial, AU 715 (Vol. I), AU 724 (Vol. II) y AU 729 (Vol. III), Madrid, 1994.

[14] M. Pasch, «Vorlesungen über neuere Geometrie», 1882, https://archive.org/stream/vorlesungenbern00pascgoog#page/n5/mode/2up.

[15] L. Shabel, *Mathematics in Kant's Critical Philosophy*, Routledge, Londres, 2003.

[16] I. Stewart, *Concepts of Modern Mathematics*, Dover Publications Inc., Nueva York, 1995.

[17] C. Torres, «De la matemática clásica a la matemática moderna: Hilbert y el esquematismo kantiano», *Diánoia*, vol. LIV, núm. 63, 2009, 37–70, https://www.scielo.org.mx/pdf/dianoia/v54n63/v54n63a2.pdf.