Miscelánea Matemática **54** (2012) 81–98 SMM

Sobre un porisma de Euclides y su dualización

Diego Fernández, Montserrat García-Campos, Carmen Martínez Adame, Iker Martínez, Karla Pérez, Andrés Rodríguez, Marinie Ruíz Cabañas[1]

cmai@matematicas.unam.mx

Facultad de Ciencias, UNAM.

El objetivo de este artículo es doble; es un texto de naturaleza histórica pero con una clara lectura didáctica. En él se estudia una proposición euclidiana (que se enuncia más abajo) reconstruida en el siglo IV y posteriormente en los siglos XVIII y XIX y en la cual se puede encontrar una versión del Teorema de Desargues. Es mediante el análisis detallado de esta proposición que salen a la luz múltiples temas que el lector reconocerá como parte de la geometría moderna.

1. Introducción.

La *Colección Matemática*[2] (*CM*) de Pappus que consta de siete libros constituye uno de los mayores acervos matemáticos de la antigüedad; con una estructura poco convencional se presenta por vez primera una caracterización de distintos problemas geométricos en *planos, sólidos* y *lineales*.[3] Esto permite presentar resultados acerca de las secciones de razones o las secciones angulares, lo mismo que problemas de cuadraturas y equivalencias de áreas y también un primer acercamiento a los problemas isoperimétricos. Sin embargo, nuestro interés en esta obra se centra en el libro VII y la presentación que en él se da para un tipo particular de proposición geométrica, distinta de los teoremas y de los problemas.

---

[1] Los autores son miembros del Seminario sobre los Fundamentos de la Geometría (Fac. de Ciencias, U.N.A.M.) el cual dirige el Dr. Carlos Álvarez J.

[2] Ver [**3**].

[3] Los problemas planos son áquellos que pueden ser resueltos con líneas rectas y circunferencias, los problemas sólidos son áquellos que requieren secciones cónicas para su solución y los problemas lineales son los que requieren cualquier otro tipo de curvas para su solución.

Al inicio del libro VII Pappus presenta al *método del análisis*, necesario tanto para la solución de un problema como para la demostración de un teorema (lo que le permite hablar de un *análisis problemático* y de un *análisis teoremático*) y cuya característica principal consiste en "asumir como dado [o como verdadero] lo que se busca construir [o demostrar] hasta que de esta hipótesis se obtenga una condición [o un enunciado] alcanzada por una síntesis previa". Dicha presentación concluye con la mención a una serie de libros (32 en total) que constituyen el "tesoro del análisis" por el hecho de que las proposiciones tratadas en ellos han sido demostradas o construidas a partir de este método regresivo. Entre ellos se encuentran los 8 libros de la *Cónicas* escritos por Apolonio, los 5 libros sobre los *Lugares* (Geométricos) *Sólidos* escritos por Aristeo y también el libro de los *Datos* y los 3 libros de los *Porismas* escritos por Euclides.

En la actualidad no se conocen la totalidad de estos 32 libros mencionados por Pappus, y en particular los 3 libros de los *Porismas* de Euclides se consideran como libros perdidos. Sin embargo, se conocen dos intentos de reconstitución de estos 3 libros, el primero de ellos en una edición de 1776 por Robert Simson[4] y el segundo en una edición de 1860 por Michel Chasles,[5] pero para ambas la fuente más importante ha sido la presentación que Pappus incluye en el libro VII de *CM*.

Nuestro objetivo en este artículo, como ya lo habíamos anunciado, es tratar una proposición formulada por Pappus y que él considera como un enunciado que conjunta en sí mismo a varios de los Porismas que Euclides formula en sus libros; se trata de un "Porisma General" que, como tal, tiene algo en común con un teorema pero al mismo tiempo comparte características con los problemas geométricos. Nuestro interés en este porisma general se debe a que además de que para su demostración (y construcción) se recurre al procedimiento "regresivo" que Pappus describió para el método del análisis, tiene por sus características la posibilidad de ser enunciado en términos puramente descriptivos, lo que nos permite formular y demostrar una versión *dual*, misma que no se encuentra en ninguna de las dos reconstrucciones del texto euclidiano y que por tanto consideramos como original. Cabe mencionar que en un segundo artículo daremos una demostración puramente proyectiva tanto del porisma general de Pappus como del porisma dual.

[4]Se puede consultar una traducción anotada de esta obra en [**7**].

[5]Ver [**1**].

2. El Porisma General de Pappus y su demostración.

En su caracterización de los Porismas, Pappus asegura que la mejor forma para distinguirlos de los teoremas y de los problemas es el considerar que:

> Un teorema [es una proposición en la cual] se requiere *demostrar* lo que se ofrece [o enuncia], mientras que en un problema se requiere *construir* lo que se ofrece y en un porisma se requiere *encontrar* lo que se ofrece.[6]

De acuerdo con esta caracterización el porisma general enunciado por Pappus va a requerir encontrar algo que se ha ofrecido. Este porisma es enunciado por Pappus del siguiente modo:

> Si en una figura convexa o no convexa (*ύπτίον ή παρυπτ ίον*) [formada por cuatro rectas] tres puntos [de intersección] están dados en una de las rectas [de la figura], mientras que [cada uno de] los restantes [puntos] excepto uno, yacen en una recta dada en posición, entonces este punto yace también en una recta dada en posición.[7]

Este porisma puede ser enunciado de la siguiente forma en un lenguaje moderno:

Proposición 2.1 ($\mathbf{PG}_4$) *Si en un cuadrilátero completo dado tres puntos (del cuadrilátero) y la recta que los contiene permanecen fijos, mientras que las otras tres rectas y los tres puntos que ellas determinan con sus intersecciones se mueven cuando ellas giran en torno de los puntos fijos, de tal manera que dos de estos tres puntos de intersección determinan, cada uno de ellos, una recta dada, entonces el tercer punto de intersección determina también a una recta dada.*

En el porisma se establece que ha sido dado un cuadrilátero completo $\mathsf{c}\,[pqrs]$ (Figura 1) y que al considerar a los 3 puntos A, B y F de esta configuración que yacen en la recta s, las rectas p, q y r que los determinan se mueven (giran) tomando a estos puntos como centros de rotación. Pappus asegura entonces que si de los puntos de intersección restantes P, R y Q –los que varían conforme las rectas p, q y r

[6] Cf. [**3**, vol. 2 p. 486].
[7] Cf. [**3**, vol. 2 p. 488].

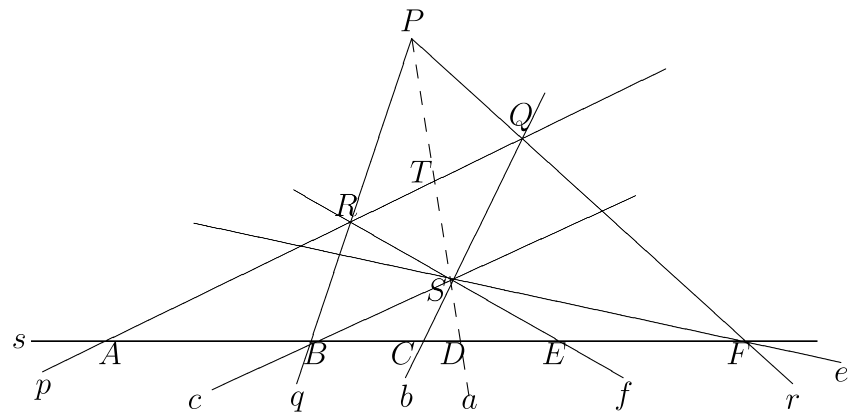

Figura 1.

giran–, los dos últimos describen (recorren) las rectas f y b –mismas que intersectan a s en los puntos E y C respectivamente–, entonces el lugar geométrico descrito por el punto P es también una recta cuya posición ha sido dada. De acuerdo con la cita de Pappus, una recta (el lugar geométrico del punto P) ha sido "ofrecida" y en el porisma se pide encontrar dicha recta.

En la Figura 1 se observa que un séptimo punto también ha sido dado, se trata del punto S, intersección de las rectas f y b. Sabemos que en la geometría euclidiana plana (que constituye obviamente el único marco de referencia para Pappus) existen solamente dos modos de determinar o dar (la posición de) una recta: cuando dos puntos han sido dados (se trata entonces de determinar a la recta que pasa por ellos, lo que en esencia constituye el primer postulado euclidiano[8]) o bien cuando ha sido dado un punto de la recta junto con la posición que esta recta tiene con respecto a una segunda recta (ha sido dado el ángulo que ellas forman). Estas son igualmente las únicas dos maneras de determinar a una recta en la geometría *analítica* plana: es posible determinar la ecuación de una recta dados dos puntos o bien si se conoce (la posición de) un punto de la recta y su pendiente. En nuestro caso a partir de lo que ha sido dado en el enunciado del problema –lo que constituye en la tradición de la geometría antigua la *exposición* (ἔκθεσις) de la proposición–, además de los puntos P, Q, R, A, B y F del cuadrilátero completo, y de los puntos E y C, ha sido dado el punto S, intersección de las rectas b y f; se trata entonces de demostrar

[8]En la traducción inglesa de la versión de Heiberg del texto de los Elementos de Euclides ([**4**]) el primer postulado dice: "[Let the following be postulated:] to draw a straight line from any point to any point."["Postúlese lo siguiente: trazar una recta de cualquier punto a cualquier punto"].

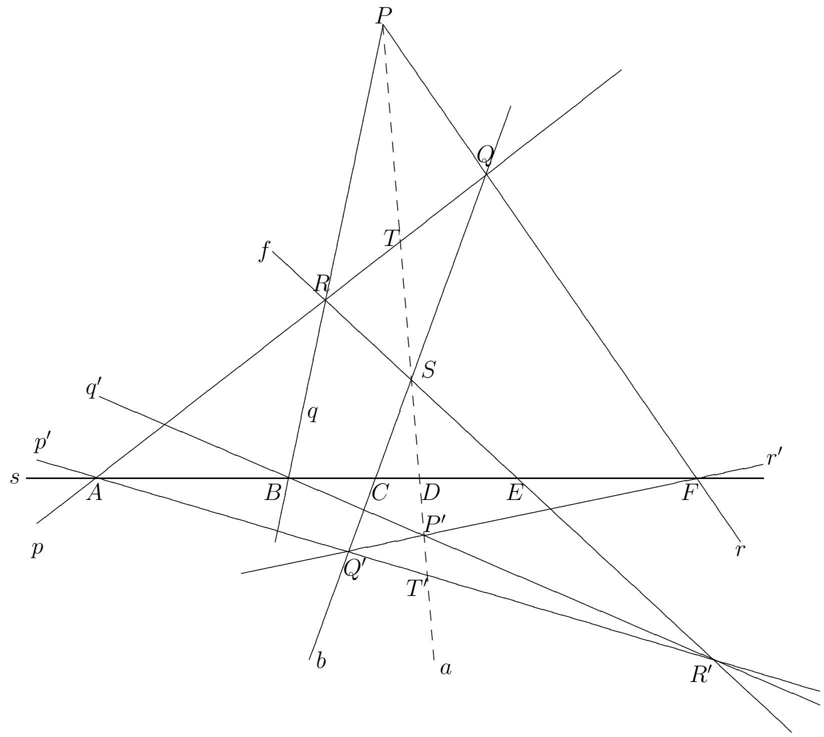

Figura 2.

que la recta $a = PS$ es el lugar geométrico descrito por el punto P. Esto significa que si las rectas p, q y r giran en torno de los puntos A, B y F como centros de rotación y adquieren las nuevas posiciones p', q' y r' respectivamente (Figura 2), de modo que los puntos R y Q toman las posiciones de los puntos R' y Q' respectivamente, entonces el punto P toma la posición del punto P' que es la intersección de las rectas q' y r'. Afirmar que la recta a es el lugar geométrico descrito por el punto P equivale a afirmar que el punto P' yace en esta recta. Se considerará únicamente el caso más general en el que el punto S no yace en la recta s y en el que los puntos de intersección C y E son distintos de los puntos B y F.

Si se retoma el enunciado del porisma (tanto en la versión de Pappus como en nuestra versión moderna) es posible preguntar si una vez que en la recta s han sido dados 5 puntos, A, B, C, E y F, siendo cada uno de ellos el punto de intersección de esta recta con las rectas p, q, b, f y r respectivamente, es posible determinar en s la posición de un sexto punto D que sea la intersección de la recta descrita por el punto P. De acuerdo con el precepto "regresivo" característico del método del *análisis* tal y como Pappus lo describe, es posible partir de la hipótesis de que el punto D es la intersección de las rectas s y a, lo que equivale a asumir que los puntos P, S y D son colineales, para tratar de encontrar, a partir de esta hipótesis alguna relación que permita caracterizar su posición a partir de los otros puntos dados. De este modo si en la configuración dada originalmente se asume que los puntos P, S y D yacen en una recta a se tiene que ésta es una transversal que intersecta a los lados AC, CQ y QA del triángulo $\mathsf{T}[ACQ]$ en los puntos D, S y T respectivamente, y por el teorema de Menelao se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{AD}{DC} \times \frac{CS}{SQ} = \frac{AT}{QT}.$$ [9]

La misma transversal a corta a los lados AF, FQ y QA del triángulo $\mathsf{T}[AFQ]$ en D, P y T respectivamente, por lo que se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{AD}{DF} \times \frac{FP}{PQ} = \frac{AT}{QT},$$

y de las dos igualdades anteriores obtenemos la siguiente:

$$\frac{AD}{DC} \times \frac{CS}{SQ} = \frac{AD}{DF} \times \frac{FP}{PQ}. \tag{1}$$

Observamos también que para el triángulo $\mathsf{T}[AFQ]$ la transversal q corta a los lados AF, FQ y QA en B, P y R respectivamente, con lo cual se obtiene:

$$\frac{FP}{PQ} = \frac{RA}{RQ} \times \frac{FB}{BA},$$

y como la transversal f corta a los lados CQ, QA y AC del triángulo $\mathsf{T}[ACQ]$ en S, R y E respectivamente, se obtiene:

$$\frac{CS}{SQ} = \frac{RA}{RQ} \times \frac{CE}{EA}.$$

Al hacer las respectivas sustituciones en (1) y al cancelar el término común que aparece en ambos miembros se obtiene:

$$\frac{AD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = \frac{AD}{DF} \times \frac{FB}{BA},$$

la cual podemos escribir de la siguiente forma:

$$\frac{AD \times CE}{DC \times EA} = \frac{AD \times FB}{DF \times BA}. \tag{2}$$

[9] Con respecto a la notación que usamos se aclara que a lo largo del artículo, y cómo es usual, si X y Y son dos puntos, entonces XY denota a la magnitud del segmento entre ellos; si x y y son dos rectas, entonces xy denota a su punto de intersección y $\operatorname{sen}(xy)$ denota al seno del ángulo formado por ellas.

Es claro que si se asume que el punto P' yace en la recta a, los lados del triángulo $\mathsf{T}\,[ACQ']$ intersectan a las transversales a y f en los puntos D, S y T' y E, S y R' respectivamente, mientras que la transversal q' intersecta a los lados del triángulo $\mathsf{T}\,[AFQ']$ en los puntos B, P' y R'. Al seguir ahora el razonamiento anterior se obtiene la misma proporción (2).

Esto significa que a partir de la hipótesis de que los puntos P, S, y P' son colineales y que la recta a que definen intersecta a la recta s en un punto D, se obtiene la proporción de rectángulos (2); lo que significa que dados los puntos A, B, C, E y F en la recta s es posible determinar la posición del punto D a partir de esta proporción.

De acuerdo con el proceso regresivo descrito por Pappus se puede afirmar que la proporción (2) constituye la condición a partir de la cual será posible probar que los puntos P, S y P' son colineales, y que la recta que determinan intersecta a la recta s en el punto D, lo que significa que al determinar a través de esta proporción la posición del punto D se habrá determinado igualmente la posición de la recta que es el lugar geométrico descrito por el punto P. La prueba de este hecho es dada por el mismo Pappus en la proposición 130 del libro VII, misma que reproducimos a continuación:

Pappus asegura que si en la Figura 1 los seis puntos colineales A, B, C, D, E y F satisfacen la proporción de rectángulos (2), entonces los puntos P, S y D son colineales. Para hacer ver esto, de (2) se obtiene, al permutar los términos extremos, la siguiente proporción:

$$\frac{FD \times AB}{CD \times AE} = \frac{AD \times FB}{AD \times CE} = \frac{FB}{CE}.$$

Ahora al trazar en la misma configuración por el punto Q una recta recta paralela a la recta s, la que intersecta a la recta q en el punto N y a la recta f en el punto M, se tiene que:

$$\frac{FB}{CE} = \frac{FB}{QN} \times \frac{QN}{QM} \times \frac{QM}{CE}, \tag{3}$$

y por otro lado al reescribir una razón de rectángulos como una composición de razones se obtiene:

$$\frac{FD \times AB}{CD \times AE} = \frac{FD}{CD} \times \frac{AB}{AE}.$$

Pero por la semejanza de los triángulos $\mathsf{T}[AER]$ y $\mathsf{T}[QMR]$ y de $\mathsf{T}[ABR]$ y $\mathsf{T}[QNR]$ se tiene:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{QN}{QM},$$

por lo que

$$\frac{FB}{QN} \times \frac{QM}{CE} = \frac{FD}{CD}. \tag{4}$$

Ahora por la semejanza de los triángulos $\mathsf{T}[BFP]$ y $\mathsf{T}[NQP]$ se tiene que

$$\frac{FB}{QN} = \frac{FP}{QP}, \tag{5}$$

y por la semejanza de los triángulos $\mathsf{T}[QMS]$ y $\mathsf{T}[CES]$ se tiene a su vez que

$$\frac{QM}{CE} = \frac{QS}{CS}. \tag{6}$$

De las igualdades (4), (5) y (6) se sigue así que:

$$\frac{FP}{QP} \times \frac{QS}{CS} = \frac{FD}{CD},$$

la que al ser reacomodada deviene

$$\frac{FP}{PQ} \times \frac{QS}{SC} = \frac{FD}{CD}.$$

Se puede mostrar que esto implica que el punto D es único y así, de esta última igualdad se concluye que los puntos P, S y D son colineales y que la recta que forman es una transversal que corta a los tres lados del triángulo $\mathsf{T}[CFQ]$ lo cual prueba el porisma.

Ahora bien, es importante notar que a partir de este porisma se puede demostrar el Teorema de Desargues ya que si partimos de la hipótesis de que los puntos de la recta s satisfacen la proporción (2), y en la Figura 2 se traza por el punto Q' una recta paralela a s que corta a las rectas q' y f en los puntos N' y M' respectivamente, se sigue igualmente que los puntos P', S y D son colineales y que la recta que forman es una transversal que corta a los tres lados del triángulo $\mathsf{T}[CFQ']$.

De este modo a partir del cuadrilátero completo $\mathsf{c}\,[pqrs]$ se obtiene un cuadrángulo completo $\mathsf{C}\,[PQRS]$, en donde ninguna de las rectas del cuadrilátero pasa por el punto correspondiente del cuadrángulo, de modo que la posibilidad de determinar mediante los puntos A, B, C, E y F de la recta s la posición del punto D, intersección con la recta PS del cuadrángulo, está dada por el siguiente lema:

Lema 2.2 *Dado un cuadrángulo completo* $\mathsf{C}[PQRS]$ *y una transversal* s *que no pase por ninguno de los puntos diagonales y que corte a los cinco lados del cuadrángulo* $p = QR$, $q = PR$, $b = QS$, $f = RS$ *y* $r = PQ$ *en los puntos* A, B, C, E *y* F *respectivamente, el punto* D *en* s *es la intersección con el sexto lado* $a = PS$ *del cuadrángulo si y sólo si este punto* D *satisface con los otros cinco puntos la proporción:*

$$\frac{AD \times CE}{DC \times EA} = \frac{AD \times FB}{DF \times BA}.$$

Una vez completada esta prueba en dos partes, procedemos a analizar la proposición que constituye el enunciado dual, misma que como anunciamos no se encuentra en *CM*.

3. Enunciado y prueba de la proposición dual del Porisma.

Como lo señalamos en la Introducción la proposición que Pappus formula como una generalización de varios porismas euclidianos admite una versión dual toda vez que en el mismo no se incluye ninguna afirmación acerca de ninguna magnitud geométrica, lo que en la geometría de la primera mitad del siglo XIX era considerado como una proposición puramente "descriptiva". Por ello podemos intentar formular una versión dual para el enunciado de Pappus como sigue:

> Si en una figura convexa o no convexa (*ύπτίον ή παρυπτ ίον*) [formada por cuatro puntos] tres rectas [de conexión] están dadas en uno de los puntos [de la figura], mientras que [cada una de] las restantes [rectas] excepto una, pasa por un punto dado en posición, entonces esta recta pasa también por un punto dado en posición.

Este enunciado dual, en el que hemos intentado ser fieles a la versión que Pappus da para el porisma original (PG_4), puede también ser enunciado de la siguiente forma en un lenguaje moderno:

Proposición 3.1 (DPG$_4$) *Si en un cuadrángulo completo dado tres rectas (del cuadrángulo) y el punto en el que concurren permanecen fijas, mientras que los otros tres puntos y las tres rectas que ellos determinan con sus conexiones se mueven cuando ellos recorren las rectas fijas, de tal manera que dos de las tres rectas de conexión determinan, cada una de ellas, un haz de rectas centrado en un punto dado, entonces* *la tercera recta determina también a un haz de rectas centrado en un punto dado.*

Como en el caso original la proposición establece que ha sido dado un cuadrángulo completo $\mathsf{C}\,[PQRS]$ (Figura 1) y que al considerar a las 3 rectas concurrentes en el punto S: a, b y f, los puntos P, Q y R que las determinan (junto con el punto S) se mueven sobre estas rectas respectivamente. Ahora se asegura que si de las rectas de conexión restantes p, q y r –las que varían conforme los puntos P, Q y R se mueven–, las dos últimas giran como rectas que pertenecen a los haces de rectas con centros en los puntos B y F respectivamente –mismos que con el punto S determinan a las rectas e y c respectivamente–, entonces la recta p también pertenece a un haz de rectas cuyo centro ha sido dado. Podemos entonces afirmar, al retomar nuestra paráfrasis de la cita de Pappus, que un punto (el centro del haz en el que se encuentra la recta p) ha sido "ofrecido" y de lo que se trata es de encontrar (determinar la posición de) dicho punto.

Ahora, en la Figura 1 se observa que una séptima recta ha sido dada también en posición, se trata de la recta s, que está determinada por los puntos F y B. Así, además de las rectas p, q, r, a, b y f, del cuadrángulo completo, junto con las rectas e y c ha sido dada la recta s y nuestro objetivo es demostrar que el punto A que es el centro del haz al que pertenece la recta p, es el punto de intersección de las rectas p y s. Esto significa que si los puntos P, Q y R recorren las rectas a, b y f y toman las nuevas posiciones P', Q' y R' respectivamente (Figura 3), de modo que las rectas r y q toman las posiciones de las rectas r' y q' respectivamente, entonces la recta p toma la posición de la recta p' que es determinada por los puntos Q' y R'. Afirmar que el punto A es el centro del haz al que pertenece la recta p equivale a afirmar que la recta p' pasa por este punto. Se considerará únicamente el caso más general en el que el punto S no yace en la recta s y en el que los puntos de intersección C y E son distintos de los puntos B y F. Del mismo modo que en el porisma original sólo consideraremos el caso en el que la recta s no pasa por el punto S y en el que las rectas c y e son distintas de las rectas b y f.

Si retomamos el enunciado de nuestra proposición dual podemos preguntarnos si una vez que han sido dadas 5 rectas a, b, c, e y f que concurren en un punto S, siendo cada una de ellas la recta determinada por el punto S y los puntos P, Q, B, F y R respectivamente, es posible determinar en este punto S la posición de una sexta recta d sobre la cual yace el punto A que es el centro del haz al que pertenece la recta p. Nuevamente seguiremos el precepto "regresivo" del método de

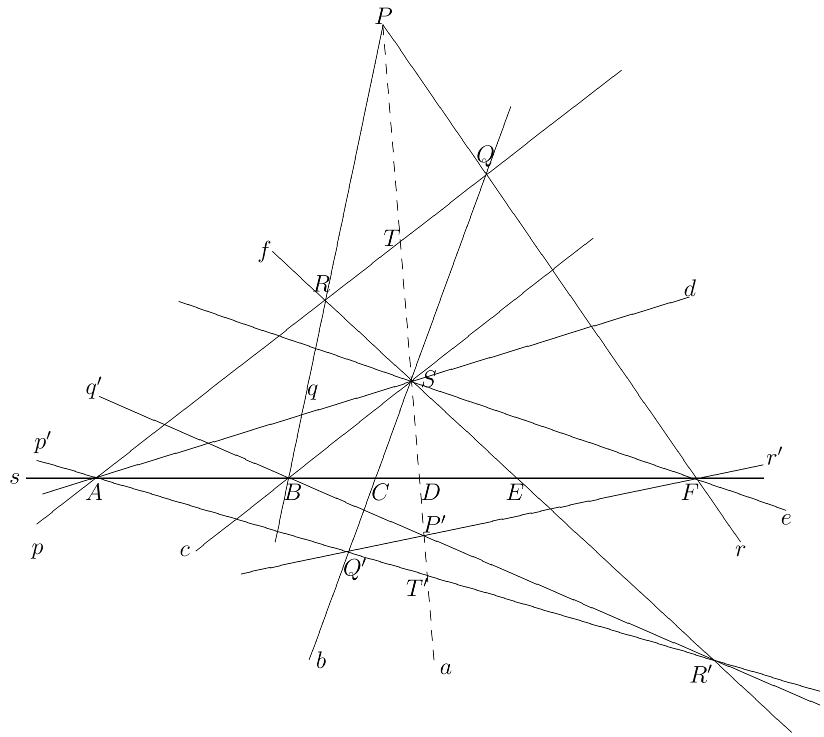

Figura 3.

Pappus, por lo que iniciaremos la demostración suponiendo que la recta d concurre con las rectas p y s en el punto A, para tratar de encontrar a partir de esta hipótesis alguna relación que permita caracterizar su posición a partir de las otras líneas rectas dadas.

Antes de comenzar con los detalles de esta demostración queremos señalar que uno de los árbitros de este artículo, en una lectura previa a la publicación de este texto, encontró una demostración más corta y directa de la proposición dual del porisma. Esta demostración dualiza la demostración que presentamos en la sección anterior. Sin embargo, como recurre a la versión trigonométrica del Teorema de Ceva consideramos que, como el propósito de este artículo no nada más es el demostrar la proposición sino hacerlo en un contexto matemático propio de la *Colección Matemática* de Pappus, no sería conveniente sustituir la demostración que presentaremos a continuación por ésta. No obstante, agradecemos fuertemente el trabajo y los comentarios del árbitro e invitamos al lector a llevar a cabo la dualización de la demostración de la sección anterior para obtener la prueba más corta y moderna de la proposición a la cual dedicamos esta sección.

La demostración que proponemos y que es completamente fiel al contexto de la matemática de Pappus es la siguiente: si en la configu-

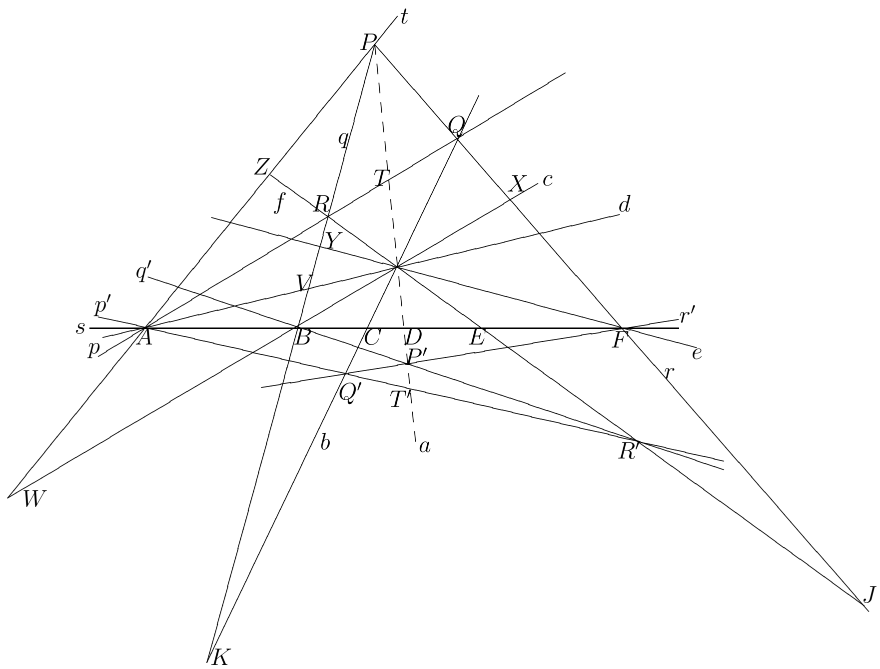

Figura 4.

ración dada originalmente se asume que las rectas p, s y d son concurrentes y se dualiza todo lo que se hizo para la versión original de GP_4, al tomar en el trilátero $\mathsf{t}\,[acq]$ (que es el triángulo $\mathsf{T}\,[PSB]$) a las rectas *cevianas* $t = AP$, d y s que parten del punto A, se obtiene la siguiente igualdad por el teorema de Ceva:

$$\frac{PV}{VB} \times \frac{BW}{WS} = \frac{DP}{SD}, \tag{7}$$

en la cual, como se observa en la Figura 4, los puntos V, D y W son los puntos de intersección de las rectas d, s y t con las rectas q, a y c del trilátero.

De igual manera pero tomando ahora al punto F que es la interdección sr se obtiene para el mismo trilátero la siguiente igualdad:

$$\frac{PY}{YB} \times \frac{BX}{XS} = \frac{DP}{SD}, \tag{8}$$

cuando las cevianas que parten del punto F son las rectas r, s y $e = FS$, que intersectan a las rectas c, a y q en los puntos X, D y Y respectivamente.

Ahora para el trilátero $\mathsf{t}\,[afq]$ $(= \mathsf{T}\,[PRS])$ nuevamente desde el punto A y tomando a las cevianas t, p y d que intersectan a los lados f, a y q en los puntos Z, T y V:

$$\frac{PV}{VR} \times \frac{RZ}{ZS} = \frac{TP}{ST} \tag{9}$$

y para el mismo trilátero pero desde el punto Q y con las cevianas r, p y b, las que intersectan a los lados f, a y q en J, T y K se obtiene:

$$\frac{PK}{KR} \times \frac{RJ}{JS} = \frac{TP}{ST}. \tag{10}$$

De las igualdades (7) y (8) se obtiene la siguiente igualdad de composición de razones:

$$\frac{PV}{VB} \times \frac{BY}{YP} = \frac{BX}{XS} \times \frac{SW}{WB}, \tag{11}$$

y de las igualdades (9) y (10) se obtiene

$$\frac{PV}{VR} \times \frac{RK}{KP} = \frac{RJ}{JS} \times \frac{SZ}{ZR}. \tag{12}$$

Se puede observar de la Figura 4, que los puntos B y R yacen en la recta q, los puntos X y J en la recta r, los puntos W y Z en la recta t, y que a su vez las rectas q, r y t concurren en el punto P. Si por S se traza una recta paralela a q (Figura 5)[10], que corta a la recta r en el punto L, el triángulo $\mathsf{T}[LXS]$ es semejante al triángulo $\mathsf{T}[PXB]$, de donde se obtiene la proporción:

$$\frac{XS}{SL} = \frac{XB}{BP}, \tag{13}$$

y de la semejanza de los triángulos $\mathsf{T}[LJS]$ y $\mathsf{T}[PJR]$ se obtiene la proporción:

$$\frac{JS}{SL} = \frac{JR}{RP}. \tag{14}$$

Si ahora se traza por L una recta paralela a la recta t, misma que intersecta a las rectas f y c en los puntos I y U respectivamente, se tiene que los triángulos $\mathsf{T}[LIS]$ y $\mathsf{T}[PZR]$ son semejantes, por lo que se obtiene la siguiente proporción:

$$\frac{SL}{IS} = \frac{RP}{ZR}, \tag{15}$$

y a su vez de la semejanza de los triángulos $\mathsf{T}[LUS]$ y $\mathsf{T}[PWB]$ se obtiene la proporción:

[10] Esta recta se ha omitido de la figura por claridad de la misma. Lo mismo es cierto de la recta paralela a t por L a la cual se hace alusión más abajo.

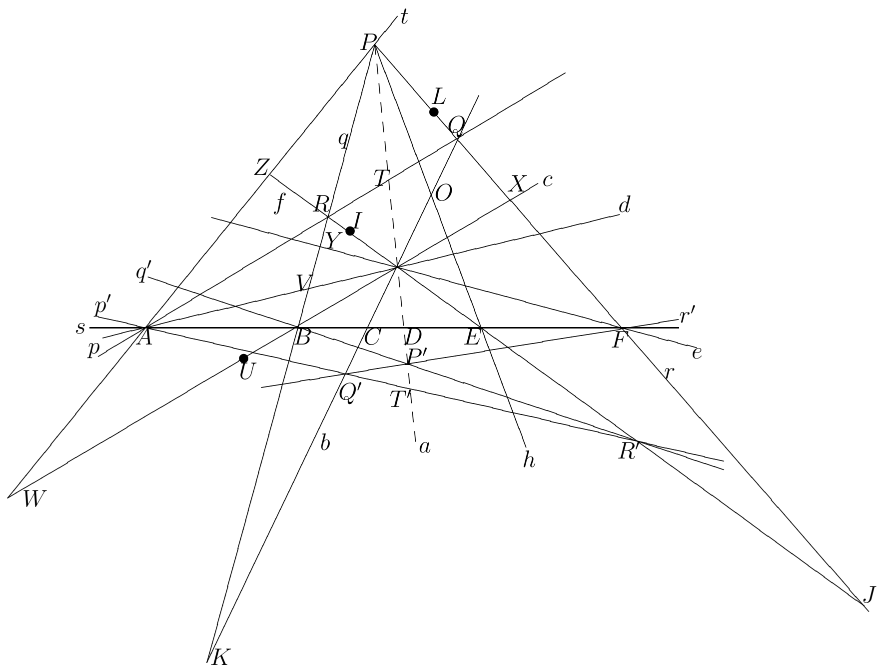

Figura 5.

$$\frac{SL}{US} = \frac{BP}{WB}. \tag{16}$$

Al componer las proporciones (13) y (16) se obtiene la proporción:

$$\frac{XS}{US} = \frac{XB}{WB}, \tag{17}$$

y al componer (14) y (15) se obtiene:

$$\frac{JS}{IS} = \frac{JR}{ZR}. \tag{18}$$

Ahora de las proporciones (17) y (18) se obtienen las igualdades:

$$XS \times WB = US \times XB \tag{19}$$

y

$$JS \times ZR = IS \times JR. \tag{20}$$

Al dividir ambos miembros de (19) entre $SW \times BX$ se obtiene:

$$\frac{XS \times WB}{SW \times BX} = \frac{US \times XB}{SW \times BX} = \frac{SU}{SW},$$

y al dividir ambos miembros de (20) entre $SZ \times RJ$ se obtiene:

$$\frac{JS \times ZR}{SZ \times RJ} = \frac{IS \times JR}{SZ \times RJ} = \frac{SI}{SZ}.$$

De la semejanza de los triángulos $\mathsf{T}\,[SUI]$ y $\mathsf{T}\,[SWZ]$ se obtiene que

$$\frac{XS \times WB}{SW \times BX} = \frac{JS \times ZR}{SZ \times RJ},$$

y al considerar a cada uno de los miembros de esta última igualdad como una composición o producto de razones, se obtiene entre los puntos B, X, S y W que yacen en la recta c y los puntos R, J, S y Z que yacen en f, la siguiente igualdad:

$$\frac{RJ}{JS} \times \frac{SZ}{ZR} = \frac{BX}{XS} \times \frac{SW}{WB}, \tag{21}$$

de la cual al sustituir en (11) y (12) finalmente se obtiene que:

$$\frac{PV}{VR} \times \frac{RK}{KP} = \frac{PV}{VB} \times \frac{BY}{YP}. \tag{22}$$

El mismo argumento que justifica la prueba de (21) se puede seguir para obtener también que

$$\frac{PV}{VR} \times \frac{RK}{KP} = \frac{DA}{AE} \times \frac{EC}{CD}$$

y que

$$\frac{PV}{VB} \times \frac{BY}{YP} = \frac{DA}{AB} \times \frac{BF}{FD}.$$

Si se considera a la recta $h = EP$, misma que intersecta a la recta b en el punto O, y a la recta $g = AO$, de (22) se concluye, al considerar al cuadrángulo completo $\mathsf{C}\,[EOSA]$, por el Lema (2.2), que los puntos A, V y S son colineales. Se puede asegurar entonces que si se asume que las rectas p, s y d son concurrentes, entonces en la recta q el punto $V = qd$ satisface junto con los puntos $P = qa$, $R = qp$, $K = qb$, $B = qs$ y $Y = qg$ la igualdad (22). Pero al igual que en la versión original de este porisma, se puede demostrar que si el punto V de la recta q satisface esta relación junto con los puntos P, R, K, B y Y de la misma recta, entonces los puntos A, S y V son colineales. Esto significa que la recta d, que es una ceviana para el trilátero $\mathsf{t}\,[cfq]$, concurre en el mismo punto A en el que se encuentran s y p. Si se aplica ahora el mismo argumento para los triláteros $\mathsf{t}\,[acq']$ ($\mathsf{T}\,[P'SB]$) y $\mathsf{t}\,[afq']$ ($\mathsf{T}\,[P'R'S]$), y el punto Q' con las cevianas $r' = Q'P'$, $p' = Q'R'$ y b se obtiene sobre la recta q' una proporción

$$\frac{P'V'}{V'R'} \times \frac{R'K'}{K'P'} = \frac{P'V'}{V'B} \times \frac{BY'}{Y'P'}, \tag{23}$$

en donde los puntos P', V', ... tienen el significado obvio a partir de la recta $h' = EP'$, el punto $O' = bh'$, la recta $g' = AO'$ y el cuadrángulo completo $\mathsf{C}\,[EO'SA]$. El mismo Lema (2.2) permite concluir que los puntos A, V' y S' son colineales. Ahora puesto que el punto V' de la recta q' satisface esta relación (23) junto con los puntos P', R', K', B y Y' de la misma recta, los puntos A, S y V' son colineales, lo que significa que la recta d, que es una ceviana para el trilátero $\mathsf{t}\,[cfq']$, concurre en el mismo punto en el que se encuentran s y p'. Pero como d y s concurren junto con p en A, se concluye que las rectas p, p' y s concurren en el mismo punto A que es así el centro del haz de la recta p.

Además ahora se puede apreciar que al tomar a las rectas q y q' que se intersectan en B, y a las rectas PP', VV', RR', ... que convergen en el punto S, se tiene que

$$\frac{PV}{VR} \times \frac{RK}{KP} = \frac{P'V'}{V'R'} \times \frac{R'K'}{K'P'}$$

y que el punto Y' yace también en la recta $e = FS$, por lo que se tiene que

$$\frac{PV}{VB} \times \frac{BY}{YP} = \frac{P'V'}{V'B} \times \frac{BY'}{Y'P}.$$

De este modo a partir del cuadrángulo completo $\mathsf{C}\,[PQRS]$ se obtiene un cuadrilátero completo $\mathsf{c}\,[pqrs]$, en donde ningún punto del cuadrángulo es un punto del lado correspondiente del cuadrilátero, de modo que la posibilidad de determinar mediante las rectas a, b, c, e y f del punto S la posición de la recta d, determinada por este punto y por el punto ps del cuadrilátero, está dada por el siguiente lema:

Lema 3.2 *Dado el cuadrilátero completo $\mathsf{c}\,[pqrs]$ y un punto S que no está sobre ninguno de los lados diagonales y que al tomar a los puntos del cuadrilátero $P = qr$, $Q = pr$, $B = qs$, $F = rs$ y $R = ps$, determina a las rectas a, b, c, e y f respectivamente, la recta d que pasa por S está determinada por el sexto punto $A = ps$ si y sólo si esta recta d intersecta a la recta q en un punto V que satisface junto con los puntos $P = qa$, $R = qp$, $N = qb$, $B = qs$ y $Y = qg$ la igualdad*

$$\frac{PV}{VR} \times \frac{RN}{NP} = \frac{PV}{VB} \times \frac{BY}{YP}.$$

4. Conclusión.

De las dos proposiciones principales de este artículo podemos hacer una lectura que sea consistente con el hecho de que se trata de dos enunciados que son duales el uno del otro y que involucran a dos configuraciones duales la una de la otra. En este sentido podemos decir que en la ecuación (2.1) se afirma que los puntos A, B, C, E y F son cinco puntos (colineales) de un conjunto cuadrangular, y que en esta proposición se pide probar que el sexto punto D se puede encontrar a partir de estos cinco puntos dados. De igual manera para la ecuación (3.1) se puede decir que las rectas concurrentes a, b, c, e, y f forman parte de un conjunto cuadrangular de rectas y se afirma que es posible determinar a partir de ellas a la sexta recta d de este conjunto. Pero es mucho más lo que se puede decir acerca de estas dos proposiciones si decidimos abrazar completamente este punto de vista proyectivo. Las consecuencias e interpretaciones de estas dos proposiciones desde esta óptica proyectiva serán tratadas en un segundo artículo como ya se había mencionado.

Agradecimientos. Los autores quisieran agradecerle a Carlos Álvarez el haberles presentado, en el marco del Seminario sobre los Fundamentos de la Geometría, este interesante problema el cual ha dado lugar a la redacción de dos artículos y quisieran agradecerle también su ayuda, comentarios y observaciones a lo largo de la redacción de este artículo. También agradecen las sugerencias de Valente Ramírez y las de dos árbitros que ayudaron a mejorar el presente artículo.

Bibliografía

1. M. Chasles, *Les trois livres de porismes d'Euclide*, Mallet-Bachelier, Paris, 1860.
2. H. Coxeter, *Projective Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1987.
3. P. de Alejandría, *La Collection Mathématique, 2 vols.*, Albert Blanchard, Paris, 1982.
4. Euclides y H. T. (ed)], *The Thirteen Books of the Elements, 3 vols.*, Dover, New York, 1956.
5. T. Faulkner, *Projective Geometry*, Dover, New York, 2006.
6. A. Seidenberg, *Lectures in Projective Geometry*, Dover, New York, 2005.
7. R. Simson y T. I. (ed)], *Simson on Porisms: An Annotated Translation of Robert Simson's Posthumous Treatise on Porisms and Other Items on this Subject*, Springer Verlag, 2000.
8. J. Steiner, *Gesammelte Werke*, AMS Chelsea Publishing, New York, 1971.

9. O. Veblen y J. W. Young, *Projective Geometry, 2 vols.*, Blaisdell Publishing, 1938.