Miscelánea Matemática **21**, *29–52 (1994)*

Curvas Paralelas

Claudio Pita Ruiz
Escuela de Ingeniería
Universidad Panamericana

En este artículo se estudian curvas que tienen la propiedad de mantenerse a una distancia constante de una curva dada (medida sobre la normal de esta curva en cada punto), llamadas "*curvas paralelas*" (a la curva dada). Se exploran las relaciones que existen entre algunas propiedades (como la regularidad) y aspectos geométricos (como curvatura, longitud de la curva y área encerrada) de la curva dada y las correspondientes de sus curvas paralelas. Los resultados generales que aquí aparecen, generalizan a los presentados en la referencia [1, pag. 47], . Se presentan además, de manera exhaustiva –a manera de ejemplos ilustrativos– los estudios correspondientes a las curvas paralelas a elipses y a parábolas.

En este artículo seguiremos la nomenclatura de [1]: entenderemos por *curva regular*, una aplicación $\alpha\colon I \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, definida en el intervalo abierto I de $\mathbf{R}$, diferenciable (con derivadas de todos los órdenes, las cuales son asíautomáticamente continuas, en todos los puntos de I) tal que el vector velocidad $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ es diferente de cero para todo t en I. Cuando se consideran curvas regulares definidas en intervalos cerrados de $\mathbf{R}$, se debe entender que éstas son restricciones de curvas regulares definidas en intervalos abiertos que contienen al cerrado dado. El producto interno en $\mathbf{R}^2$ que se maneja en el artículo es el canónico y la norma que se usa es la euclideana.

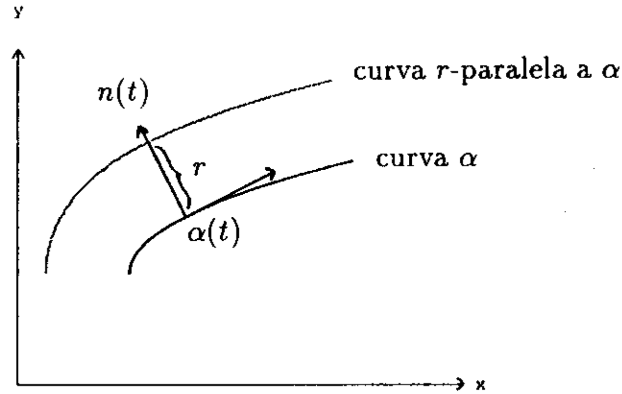

Figura 1. La curva α su curva r-paralela.

Consideremos la curva regular $\alpha: I \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Sea $n(t)$ el vector normal unitario obtenido al girar $\alpha'(t)$ (normalizado) un ángulo de $\pi/2$ en dirección antihoraria. Sea $\beta: I \to \mathbf{R}^2$ la curva definida como $\beta(t) = \alpha(t) + rn(t)$, en donde r es un número real no nulo dado. Observe que para cada $t \in I$ se tiene que $\| \beta(t) - \alpha(t) \| = | r |$, es decir, β es una curva que se mantiene a una distancia constante –igual a $| r |$– de α. Llamaremos a β *la curva r-paralela a α*. Se entiende que r puede ser positivo o negativo, (por razones obvias se descarta el caso $r = 0$). El objetivo de este artículo es estudiar algunas de las propiedades geométricas de la curva β y relacionarlas con las correspondientes de la curva α. Comencemos por hacer explícitas las funciones coordenadas de la curva β. Como $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$, y el vector $n(t)$ es

$$n(t) = \frac{1}{\| \alpha'(t) \|}(-y'(t), x'(t))$$

entonces se tiene

$$\beta(t) = \left(x(t) - \frac{ry'(t)}{\| \alpha'(t) \|}, y(t) + \frac{rx'(t)}{\| \alpha'(t) \|} \right) \tag{1}$$

Obtengamos ahora una expresión para el vector velocidad $\beta'(t)$. Esto se puede hacer: (1) efectuando directamente las derivadas en las funciones coordenadas de la expresión anterior, llegando a

$$\beta'(t) = \left(1 - r\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\| \alpha'(t) \|^3}\right)(x'(t), y'(t))$$

que se puede escribir como

$$\beta'(t) = (1 - rk_\alpha(t))\,\alpha'(t) \tag{2}$$

en donde $k_\alpha(t)$ es la curvatura con signo de la curva α, es decir

$$k_\alpha(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\| \alpha'(t) \|^3}$$

o bien, (2) haciendo uso de la fórmula de Frénet $n'(t) = -k_\alpha(t)\alpha'(t)$ –ver, por ejemplo, la referencia [2, pag. 83, lema 4.1]– quedándonos, derivando directamente en la fórmula que define a $\beta(t)$, lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\beta'(t) &= \alpha'(t) + rn'(t) \\
&= \alpha'(t) + r(-k_\alpha(t)\alpha'(t)) \\
&= (1 - rk_\alpha(t))\alpha'(t)
\end{aligned}$$

como obtuvimos anteriormente.

Siendo la curva α regular, nos preguntamos si la curva r-paralela β también lo es. Con la fórmula que obtuvimos para $\beta'(t)$ es fácil contestar a esta pregunta: puesto que $\| \beta'(t) \| = | 1 - rk_\alpha(t) | \quad \| \alpha'(t) \|$ (y por hipótesis $\| \alpha'(t) \| \neq 0$), se tiene que $\beta'(t) \neq 0$ si y solamente si $1 - rk_\alpha(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$, lo cual significa que $r^{-1} \neq k_\alpha(t) \quad \forall t \in I$. Esta última condición la podemos establecer equivalentemente diciendo que r^{-1} *no pertenece* al rango de $k_\alpha(t)$. En resumen tenemos pues que si la curva α es regular, su curva r-paralela β será regular si y solamente si $r^{-1} \notin$ rango de $k_\alpha(t)$.

Por ejemplo, si consideramos la curva regular $\alpha: [a,b] \to \mathbf{R}^2$, definida en el intervalo compacto $[a,b]$ de $\mathbf{R}$, la función curvatura $k_\alpha(t)$, $t \in [a,b]$ alcanzará su máximo absoluto dentro del intervalo $[a,b]$, de modo que si tomamos $r = \pm\epsilon$, $(\epsilon > 0)$, con

$$\epsilon^{-1} > \max_{t\in[a,b]} | k_\alpha(t) |$$

las curvas $\beta_1(t) = \alpha(t) + \epsilon n(t)$ y $\beta_2(t) = \alpha(t) - \epsilon n(t)$, son curvas regulares ϵ-paralelas a α, (y que cada una de ellas se encuentra en *lados distintos de* $\alpha(t)$, es decir, β_1 se encuentra en el lado marcado por la dirección del vector $n(t)$, mientras que β_2 se encuentra en el lado opuesto) constituyen la frontera de la vecindad abierta

$$V_\epsilon(\alpha) = \Big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\mid\; \| (x,y) - \beta_i(t) \| < \epsilon,\; i = 1,2,\; t \in I\Big\}$$

la cual es una vecindad tubular de la curva α.

A manera de ejemplo, consideremos la curva $\alpha \colon [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (t, \operatorname{sen} t)$. La curva r-paralela a α es $\beta \colon [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$

$$\beta(t) = \Big(t - (r \cos t)/(1 + \cos^2 t)^{1/2},\; \operatorname{sen} t + r/(1 + \cos^2 t)^{1/2}\Big)$$

La curvatura de α en t es

$$k_\alpha(t) = -(\operatorname{sen} t)/(1 + \cos^2 t)^{3/2}$$

que alcanza su máximo en $t = 3\pi/2$, el cual vale $k_\alpha(3\pi/2) = 1$. Entonces, tomando $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon^{-1} > 1$, es decir tal que $\epsilon < 1$, tenemos que las curvas regulares ϵ-paralelas $\beta(t)$ dadas en la fórmula anterior con $r = \pm\epsilon$, constituyen la frontera de una vecindad tubular de α. La figura 2 muestra el caso en que $\epsilon = 0.1$. Veamos ahora cómo están relacionadas las curvaturas k_α, de la curva α, con la de su paralela β, k_β. Tomemos $r^{-1} \notin$ rango de $k_\alpha(t)$, de modo que la curva r-paralela β es regular. Se tiene

$$k_\beta(t) = \frac{\| \beta'(t) \times \beta''(t) \|}{\| \beta'(t) \|^3} = \frac{(1 - r k_\alpha(t))^2 \| \alpha'(t) \times \alpha''(t) \|}{|1 - r k_\alpha(t)|^3 \;\; \| \alpha'(t) \|^3}$$

Por las hipótesis hechas sobre r se tiene que $1 - r k_\alpha(t) > 0\ \forall t \in I$, o bien $1 - r k_\alpha(t) < 0\ \forall t \in I$, y entonces la fórmula anterior queda como

$$k_\beta(t) = \pm \frac{|k_\alpha(t)|}{1 - r k_\alpha(t)} \tag{3}$$

con los signos correspondientes a cada uno de los casos mencionados. Con esta fórmula es fácil ver que si la curva α tiene un vértice para $t = t_0$ (es decir

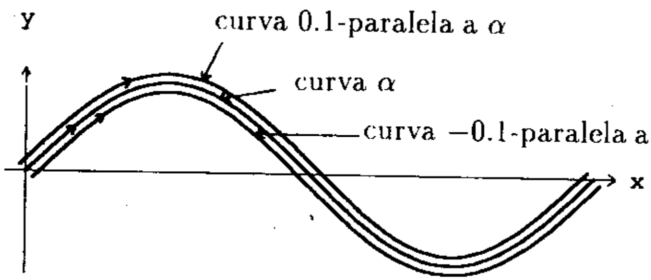

Figura 2. La curva α: $[0,2\pi]\rightarrow \mathbf{R}^2$, $\alpha(t)=(t, sen\ t)$ y sus curvas r-paralelas con $r=0.1$ y $r=-0.1$.

que $k'_\alpha(t_0)=0$) entonces su curva r-paralela β (regular) tendrá también un vértice en el punto correspondiente $\beta(t_0)$

Consideremos a manera de ejemplo la elipse $\alpha\colon[0,2\pi]\rightarrow \mathbf{R}^2$ dada por $\alpha(t)=(a\cos t, b\operatorname{sen} t)$ en donde $a>b>0$. La curvatura $k_\alpha(t)$ es

$$k_\alpha(t)=\frac{ab}{(a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

Los extremos absolutos de esta función en el intervalo $[0,2\pi]$ se alcanzan en $t=0$, π (máximo absoluto) y en $t=\pi/2$, $3\pi/2$ (mínimo absoluto), los cuales valen $k_\alpha(0)=k_\alpha(\pi)=a/b^2$ y $k_\alpha(\pi/2)=k_\alpha(3\pi/2)=b/a^2$. Tomando entonces r tal que $r^{-1}\notin[b/a^2,a/b^2]$, la curva r-paralela a α, que según (1) es

$$\beta(t)=\left(\cos t\left(a-\frac{rb}{(a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t)^{1/2}}\right),\ \operatorname{sen} t\left(b-\frac{ra}{(a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t)^{1/2}}\right)\right)$$

será una curva regular con curvatura

$$k_\beta(t)=\pm\frac{k_\alpha(t)}{1-rk_\alpha(t)}=\pm\frac{ab}{(a^2\operatorname{sen}^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}-rab}$$

en donde el signo más corresponde al caso en el que $r<b^2/a$, y el signo menos corresponde al caso en que $r>a^2/b$. La figura 3 muestra el caso en el que

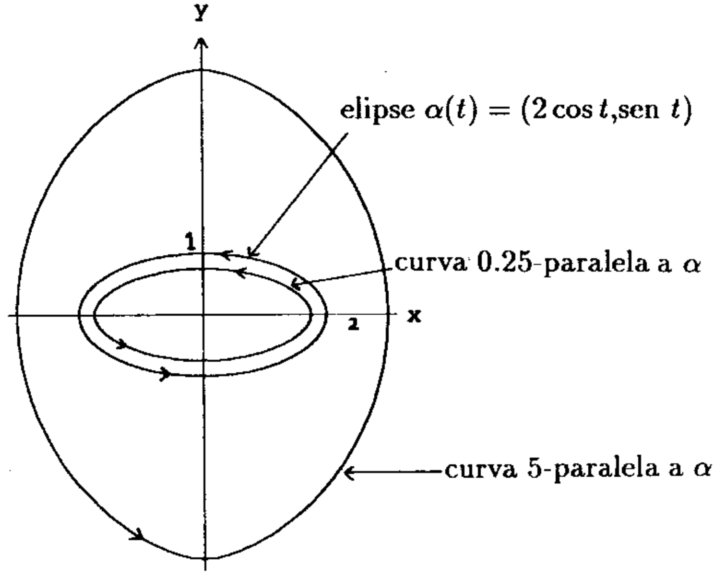

Figura 3. La elipse $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2, \alpha(t) = (2\cos t, \text{sen } t)$ y sus curvas r-paralelas con $r = 0.25$ y $r = 5$.

$a = 2$, $b = 1$, con β_1 una curva r-paralela a α siendo $r = 0.25 < 0.5 = b^2/a$, y β_2 una curva r-paralela a α con $r = 5 > 4 = a^2/b$. Observe que la curva α tiene curvatura positiva, al igual que las curvas β_1 y β_2. Sin embargo, el vector velocidad de β_1 siempre tiene la misma dirección que el vector velocidad de α, mientras que el de β_2 siempre tiene la dirección contraria al correspondiente de α (hecho que se ve fácilmente de la fórmula (2)). Observe también que cualquier curva r-paralela a α con $r < 0$, es automáticamente regular, pues siendo $k_\alpha(t) > 0\ \forall t \in [0, 2\pi]$, se tiene $1 - rk_\alpha(t) > 0\ \forall t \in [0, 2\pi]$. Vamos ahora a estudiar la relación que existe entre la longitud de la curva regular dada $\alpha: [a, b] \to \mathbf{R}^2$ con la correspondiente de su curva r-paralela $\beta: [a, b] \to \mathbf{R}^2$. Vamos a suponer, en lo que sigue, que el conjunto de autointersecciones de la curva r-paralela β, es un subconjunto finito de $[a, b]$ (es decir, el conjunto de puntos $s, t \in [a, b]$ para los que $\alpha(t) = \alpha(s) + rn(t)$ –es decir, para los que la curva α es r-*autoparalela*–, es finito).

Recordemos que para la curva *regular* α se tiene bien definida su longitud (que denotamos como $L_{[a,b]}(\alpha)$) como

$$L_{[a,b]}(\alpha) = \int_a^b \| \alpha'(t) \| \ dt$$

Una fórmula análoga para la curva r-paralela β sería (usando (2))

$$L_{[a,b]}(\beta) = \int_a^b \| \beta'(t) \| \ dt = \int_a^b | 1 - rk_\alpha(t) | \ \| \alpha'(t) \| \ dt$$

la cual descubre dos hechos interesantes: (1) es natural esperar un *parentesco* entre $L_{[a,b]}(\alpha)$ y $L_{[a,b]}(\beta)$ (el cual estableceremos posteriormente); (2) para poder empezar a trabajar con la última integral, es necesario *deshacernos* del valor absoluto que ahí aparece. Este último hecho nos muestra que debemos partir nuestro trabajo para el cálculo de $L_{[a,b]}(\beta)$ en los intervalos de signo constante de $1 - rk_\alpha(t)$: éstos son precisamente los intervalos en donde la curva β es regular (¡tal como tenía que suceder!).

Fijemos entonces nuestra atención en los puntos que corresponden a las raíces de la ecuación $\phi(t) = 1 - rk_\alpha(t) = 0$. Digamos que éstas son $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$. Para el estudio que haremos a continuación sobre el cálculo de la longitud de la curva r-paralela β, estaremos interesados solamente en el caso en que estas raíces son *distintas*: si ocurriera que la función $\phi(t)$ tuviera, por ejemplo, raíces en $t_1, t_2 \in (a, b)$ y $t_1 = t_2$ entonces el vector velocidad $\beta'(t)$ no cambia de dirección en una vecindad de t_1 y podremos aplicar, sin ningún problema, la fórmula para el cálculo de la longitud de β (en la vecindad mencionada) como podrá verse de la discusión que ahora presentamos. Tomemos entonces la partición de $[a, b]$ dada por estas raíces; es decir, consideremos la siguiente partición del intervalo $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

En cada subintervalo $[t_{j-1}, t_j]$, j= $1, 2, \ldots, n$, la curva $\beta|_{[t_{j-1}, t_j]}$, restricción de β a tal subintervalo, es una curva regular (excepto en los extremos del intervalo, en donde $\beta'(t) = 0$) y se tiene bien definida entonces su longitud, a saber

$$L_{[t_{j-1},t_j]}(\beta) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \| \beta'(t) \| \, dt$$

Más aún, la longitud *total* de la curva β en $[a, b]$, la podemos obtener sumando las longitudes de β en cada uno de los subintervalos de la partición hecha en el intervalo $[a, b]$. Es decir,

$$L_{[a,b]}(\beta) = \sum_{j=1}^{n} L_{[t_{j-1},t_j]}(\beta) = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \| \beta'(t) \| \, dt$$

En virtud de la fórmula (2) se tiene

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \| \beta'(t) \| \, dt = \int_{t_{j-1}}^{t_j} | 1 - rk_\alpha(t) | \, \| \alpha'(t) \| \, dt$$

$$= \operatorname{sgn}(1 - rk_\alpha(t)) \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \| \alpha'(t) \| \, dt - r \int_{t_{j-1}}^{t_j} k_\alpha(t) \| \alpha'(t) \| \right]$$

En esta última expresión se tiene

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \| \alpha'(t) \| \, dt = L_{[t_{j-1},t_j]}(\alpha) = \text{ longitud de la curva } \alpha \text{ en } [t_{j-1}, t_j]$$

Por otra parte, si llamamos $\theta(t)$ al ángulo formado por el vector velocidad $\alpha'(t)$ (que por hipótesis es no nulo para toda $t \in [a, b]$) con la parte positiva del eje de las abscisas ($0 \leq \theta(t) < \pi$), se tiene

$$\theta(t) = \arctan \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

de donde se obtiene que $\theta'(t) = k_\alpha(t) \| \alpha'(t) \|$ y entonces

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} k_\alpha(t) \| \alpha'(t) \| \, dt = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \theta'(t) dt = \theta(t_j) - \theta(t_{j-1})$$

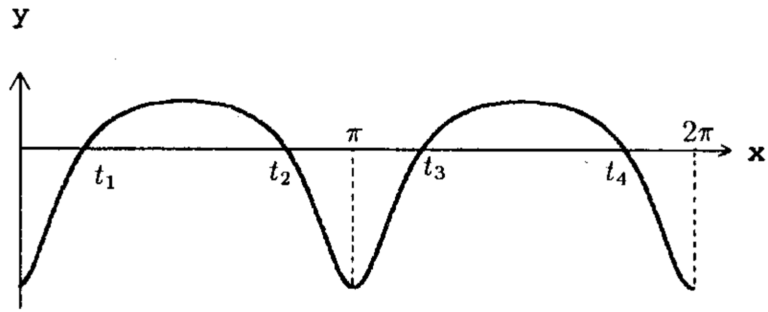

Figura 4. La función $\varphi\ (t) = 1 - r\ k(t)$ y sus raíces $t_1,\ t_2,\ t_3$ y t_4.

Por lo tanto finalmente podemos escribir la fórmula de $L_{[a,b]}(\beta)$ como

$$L_{[a,b]}(\beta) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sgn}\left(1 - rk_\alpha(t)\right) \left[L_{[t_{j-1},t_j]}(\alpha) - r(\theta(t_j) - \theta(t_{j-1}))\right] \qquad (4)$$

Consideremos, a manera de ejemplo, la elipse α: $[0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (a\cos t, b \operatorname{sen} t)$, con $a > b$, y la curva r-paralela β: $[0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ con r tomado tal que $r^{-1} \in$ rango de $k_\alpha(t)$. Esta es

$$\beta(t) = \left(\cos t\left(a - \frac{rb}{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{1/2}}\right),\ \operatorname{sen} t\left(b - \frac{ra}{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{1/2}}\right)\right)$$

La función ϕ: $[0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ dada por

$$\phi(t) = 1 - rk_\alpha(t) = 1 - \frac{rab}{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

tiene una gráfica como la mostrada en la figura 4. (observe que es periódica de periodo π) con raíces en $t_1, t_2, t_3 = t_1 + \pi$, $t_4 = t_2 + \pi \in [0, 2\pi]$ tales que

$$\operatorname{sen}^2 t_i = \frac{(rab)^{2/3} - b^2}{a^2 - b^2} \qquad i = 1, \ldots, 4$$

Además, se tiene que $\phi(t) > 0$ si $t \in (t_1, t_2) \cup (t_3, t_4)$ y $\phi(t) < 0$ si $t \in (0, t_1) \cup (t_2, t_3) \cup (t_4, 2\pi)$. Llamemos J_i al intervalo (t_{i-1}, t_i), $i = 1, \ldots, 5$ (con $t_0 = 0$, $t_5 = 2\pi$). Se tiene entonces que la longitud de la curva β es, según la fórmula (4)

$$L_{[0,2\pi]}(\beta) = [-L_{J_1}(\alpha) - L_{J_3}(\alpha) - L_{J_5}(\alpha) + L_{J_2}(\alpha) + L_{J_4}(\alpha)]$$
$$+r\left[(\theta(2\pi) - \theta(0)) + 2[\theta(t_1) + \theta(t_3) - \theta(t_2) - \theta(t_4)]\right]$$

en donde

$$\theta(t) = \arctan\frac{y'(t)}{x'(t)} = \arctan\frac{b\cos t}{-a\operatorname{sen} t} = \arctan\left(-\frac{b}{a}\cot t\right) \quad .$$

Puesto que $t_3 = t_1 + \pi$ y $t_4 = t_2 + \pi$, se tiene que $\theta(t_1) = \theta(t_3)$ y $\theta(t_2) = \theta(t_4)$. Más aún, $t_2 = \pi - t_1$, de modo que $\theta(t_2) = -\theta(t_1)$. Además, $\theta(2\pi) - \theta(0) = 2\pi$. Por lo tanto, la fórmula anterior toma el aspecto siguiente

$$L_{[0,2\pi]}(\beta) = -L_{[0,2\pi]}(\alpha) + 2\left(L_{J_2}(\alpha) + L_{J_4}(\alpha)\right) + 2\pi r + 8r\theta(t_1)$$

o, simplificando aún más, notando que $L_{J_2}(\alpha) = L_{J_4}(\alpha)$, nos queda finalmente que la fórmula de la longitud de la curva β es

$$L_{[0,2\pi]}(\beta) = -L_{[0,2\pi]}(\alpha) + 4L_{J_2}(\alpha) + 2\pi r + 8r\arctan\left(-\frac{b}{a}\cot t_1\right)$$

en donde el intervalo $J_2 = (t_1, t_2)$ lo podemos describir como el primer subintervalo de $[0, 2\pi]$ en donde $\beta'(t)$ tiene la misma dirección de $\alpha'(t)$. Por ejemplo, se hicieron los cálculos correspondientes con $a = 2$, $b = 1$, $r = 1.5$, obteniéndose $t_1 = 0.64353$, $t_2 = 2.49806$, e, integrando numéricamente, $L_{[0,2\pi]}(\alpha) = 9.6885$, $L_{j_2}(\alpha) = 3.342$. Haciendo las substituciones en la fórmula anterior se llega al valor

$$L_{[0,2\pi]}(\beta) = 6.04866$$

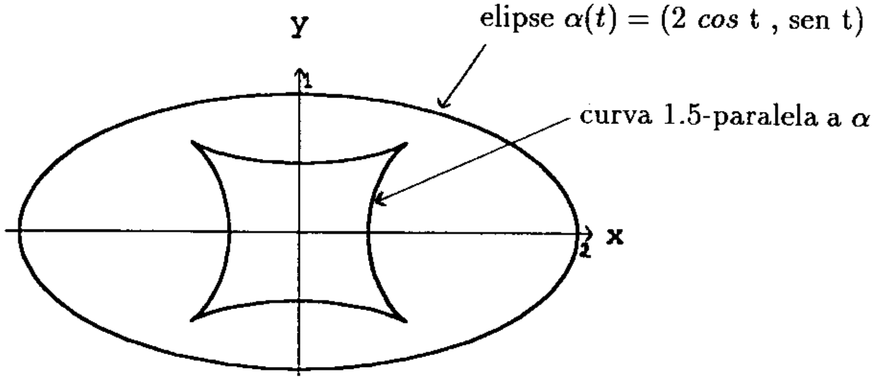

Figura 5. La elipse $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ y su curva 1.5-paralela.

La figura 5 muestra las curvas α y β en este caso. En los casos en que la curva β es regular, es decir, cuando la función $\phi(t) = 1 - rk_\alpha(t)$ no tiene raíces en $[a, b]$, la fórmula (4) para el cálculo de la longitud de β (en términos de la longitud de α) adquiere un aspecto más simple. En efecto, si $1 - rk_\alpha(t) > 0\ \forall t \in [a, b]$ (situación que se presenta si $r^{-1} > \max_{t \in [a,b]} \mid k_\alpha(t) \mid$, o bien, en particular, si la curva α es una curva simple convexa positivamente orientada y $r < 0$), la fórmula (4) se convierte en

$$\begin{aligned} L_{[a,b]}(\beta) &= \sum_{j=1}^{n} L_{[t_{j-1}, t_j]}(\alpha) - r \sum_{j=1}^{n} (\theta(t_j) - \theta(t_{j-1})) \\ &= L_{[a,b]}(\alpha) - r(\theta(b) - \theta(a)) \end{aligned}$$

Más aún, si la curva α es cerrada, la diferencia $\theta(b) - \theta(a)$ es un múltiplo de 2π. Más precisamente se tiene que $\theta(b) - \theta(a) = 2\pi I$, en donde I es el índice de rotación de la curva (que de manera intuitiva lo pensamos como el número de vueltas completas que da el vector tangente sobre la curva). Así pues, en este caso la fórmula (4) se ve como

$$L_{[a,b]}(\beta) = L_{[a,b]}(\alpha) - 2\pi r \mid I \mid$$

De manera análoga se ve que si $1 - rk_\alpha(t) < 0 \ \forall t \in [a,b]$ (por ejemplo, si $r^{-1} < \min_{t \in [a,b]} \mid k_\alpha(t) \mid$), la curva regular β, r-paralela a α tiene por longitud

$$L_{[a,b]}(\beta) = -L_{[a,b]}(\alpha) + r(\theta(b) - \theta(a))$$

teniéndose también que si la curva α es cerrada entonces

$$L_{[a,b]}(\beta) = -L_{[a,b]}(\alpha) + 2\pi r \mid I \mid$$

en donde I es el índice de rotación de la curva α.

Retomando el ejemplo de la elipse $\alpha: [0,2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$, habíamos ya considerado curvas r-paralelas a ella con $r = 0.25$ (caso en el que $1 - rk_\alpha(t) > 0 \ \forall t \in [0,2\pi]$), que llamamos β_1, y con $r = 5$ (caso en el que $1 - rk_\alpha(t) < 0 \ \forall t \in [0,2\pi]$), que llamamos β_2 (ver figura 3). Tanto β_1 como β_2 son regulares y para calcular su longitud podemos usar las fórmulas recientemente obtenidas. Se tiene

$$\begin{aligned} L_{[0,2\pi]}(\beta_1) &= L_{[0,2\pi]}(\alpha) - 2\pi r = 9.6885 - 0.5\pi = 8.1177 \\ L_{[0,2\pi]}(\beta_2) &= -L_{[0,2\pi]}(\alpha) + 2\pi r = -9.6885 + 10\pi = 21.7275 \end{aligned}$$

Consideremos ahora una curva regular cerrada simple $\alpha: [a,b] \to \mathbf{R}^2$ (es decir, se tiene $\alpha^{(j)}(a) = \alpha^{(j)}(b)$, $j = 0,1,2,\ldots$, y $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ para toda pareja $t_1, t_2 \in [a,b), t_1 \neq t_2$). Tiene sentido entonces hablar del *área encerrada por la curva* α. De hecho, con la ayuda del Teorema de Green podemos calcular tal área (que denotaremos por $A(\alpha)$) como (con la curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ positivamente orientada)

$$A(\alpha) = \frac{1}{2} \int_a^b [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)] \ dt$$

Vamos ahora a estudiar cómo está relacionada esta área con la correspondiente de su curva r-paralela (cuando tenga sentido hablar del área de esta curva). Primeramente observe que si la curva α es cerrada entonces la curva β será también cerrada (hecho que se ve fácilmente por la manera en como está definida β). La propiedad de regularidad de la curva α, como se ha visto ya, puede perderse en la curva β; esto depende de la existencia de raíces de la ecuación $1 - rk_\alpha(t) = 0$ en $[a, b]$. Este hecho, sin embargo, no nos impide usar la fórmula del Teorema de Green para calcular el área encerrada por la curva, pues ésta sigue siendo válida para curvas regulares por secciones en $[a, b]$. La propiedad importante que debe conservar la curva β para poder seguir hablando del área que ésta encierra, es entonces la de ser una curva simple (sin autointersecciones). Notemos también que la orientación positiva de α puede perderse en β, aún conservando esta última la propiedad de ser simple (ver el ejemplo de la curva β, 1.5-paralela a la elipse $\alpha(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$, que tiene orientación negativa). De cualquier modo, este conflicto se arregla fácilmente con una reparametrización de la curva que invierta su orientación.

Partamos entonces de una curva $\alpha: [a, b] \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ regular, cerrada, simple y positivamente orientada, y consideremos la curva $\beta: [a, b] \to \mathbf{R}^2$, r-paralela a α, con r tal que β sea simple. Supongamos también, por el momento, que β queda positivamente orientada. Escribiendo

$$\beta(t) = (x_\beta(t), y_\beta(t)) \quad , \quad \beta'(t) = (x'_\beta(t), y'_\beta(t))$$

tenemos que el área encerrada por β, que denotaremos por $A(\beta)$, es

$$A(\beta) = \frac{1}{2}\int_a^b \left[x_\beta(t)y'_\beta(t) - x'_\beta(t)y_\beta(t)\right]\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\, dt - \frac{1}{2}r\int_a^b \| \alpha'(t) \| \, dt -$$

$$-\frac{1}{2}r\int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\, k_\alpha(t)\, dt + \frac{1}{2}r^2\int_a^b k_\alpha(t) \; \| \alpha'(t) \| \, dt$$

El primero, segundo y cuarto sumandos son expresiones fácilmente reconocibles. En efecto, el primero no es más que el área encerrada por la curva α. La integral que aparece en el segundo sumando es la longitud de la curva α (que denotaremos por $L(\alpha)$), y por último, la integral que aparece en el cuarto sumando es (como ya habíamos observado en los cálculos correspondientes a la longitud de la curva paralela β)

$$\int_a^b k_\alpha(t) \; \| \alpha'(t) \| \; dt = \theta(b) - \theta(a) = 2\pi$$

pues la curva α es simple y positivamente orientada (su índice de rotación es $+1$). Haciendo algunas cuentas, se puede ver que la integral que aparece en el tercer sumando es

$$\int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\, k_\alpha(t)dt = \int_a^b \| \alpha'(t) \| \; dt = L(\alpha)$$

de modo entonces que el área $A(\beta)$ queda expresada como

$$A(\beta) = A(\alpha) - rL(\alpha) + \pi r^2 \tag{5}$$

Llamamos la atención al hecho de que esta fórmula puede siempre aplicarse cuando $r < 0$, pues en este caso la curva β conserva las propiedades de regularidad, de ser simple y la positividad de la orientación. Cuando $r > 0$, habrá que ser cuidadosos en verificar que la curva β sea simple para poder aplicar la fórmula anterior (la dirección en la orientación, en caso de cambiar, se reflejará en un signo menos en el resultado del área). Tomemos como ejemplo nuevamente la elipse $\alpha\colon [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$ y consideremos sus curvas r-paralelas β con $r = 0.25$, $r = 5$ (casos en que la curva β queda regular) y $r = 1.5$. El área encerrada por la curva 0.25-paralela a la elipse es (tomando el valor ya calculado de la longitud de α como $L(\alpha) = 9.6885$, y el conocido valor del área encerrada por la elipse de semiejes a y b, que es πab)

$$A(\beta) = A(\alpha) - rL(\alpha) + \pi r^2 = 2\pi - 0.25(9.6885) + \pi(0.25)^2 = 4.05745$$

Para la curva 5-paralela a la elipse tenemos

$$A(\beta) = 2\pi - 5(9.6885) + \pi(5)^2 = 36.3807$$

y para la curva 1.5-paralela a la elipse se tiene

$$A(\beta) = 2\pi - 1.5(9.6885) + \pi(1.5)^2 = -1.18095$$

Observe que el valor del área encerrada por esta curva 1.5-paralela a la elipse es negativo, pues como ya habíamos comentado, la orientación que tiene esta curva es negativa. Es claro, sin embargo, que en este caso el valor absoluto de nuestro resultado es el área procurada.

En el caso particular de la elipse α: $[0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t)$ con $a > b > 0$, podemos ser más explícitos en cuanto a la utilización de la fórmula del área encerrada por sus curvas r-paralelas β: $[0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$

$$\beta(t) = \left(\cos t\left(a - \frac{rb}{(a^2\mathrm{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{1/2}}\right), \mathrm{sen}\, t\left(b - \frac{ra}{(a^2\,\mathrm{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{1/2}}\right)\right)$$

Estudiemos las intersecciones de esta curva con el eje x. Haciendo

$$y(t) = \mathrm{sen}\, t\left(b - \frac{ra}{(a^2\,\mathrm{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{1/2}}\right) = 0$$

Se observa que existen siempre dos raíces de esta ecuación en $[0, 2\pi)$, a saber $t = 0$, π. Es decir, la curva β corta al eje x al menos en estos dos puntos. Pueden, sin embargo, existir otras raíces de la ecuación, provinientes de

$$b - \frac{ra}{(a^2\,\mathrm{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{1/2}} = 0$$

Se observa que si $r < 0$, estas raices no existen (las curvas paralelas hacia el exterior de la elipse cortan solamente en $t = 0$ y $t = \pi$ al eje de las x). Tomemos entonces $r > 0$. En este caso se tiene que

$$\mathrm{sen}^2 t = \frac{r^2a^2 - b^4}{b^2a^2 - b^4}$$

Estos valores de t existen (y son diferentes de 0 y π) si y solamente si

$$0 < \frac{r^2a^2 - b^4}{b^2a^2 - b^4} < 1$$

es decir, si $b^2/a < r < b$. En tal caso, observe que existen dos raíces de la ecuación $y(t) = 0$ (además de las ya mencionadas 0 y π) entre 0 y 2π, a saber

$$t_1 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{r^2a^2 - b^4}{b^2a^2 - b^4}\right)^{1/2} \qquad , \qquad t_2 = t_1 + \pi$$

y que además se tiene $x_\beta(t_1) = x_\beta(t_2)$. Esto significa que bajo la condición $b^2/a < r < b$, existe una autointersección de la curva β, la cual ocurre sobre el eje de las x (en el punto $\beta(t_1) = \beta(t_2)$).

De manera análoga se ve que la curva β siempre tiene dos intersecciones con el eje y, en $t = \pi/2$ y en $t = 3\pi/2$, y que puede tener más, provinientes de la ecuación

$$a - \frac{rb}{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}} = 0$$

de donde se ve también que de ser $r < 0$, tales nuevas intersecciones (las raíces de esta ecuación) no existen (las curvas paralelas hacia el exterior de la elipse cortan al eje de las y solamente en $t = \pi/2$ y $t = 3\pi/2$).

Escribiendo la última ecuación como

$$\cos^2 t = \frac{a^4 - r^2b^2}{a^4 - a^2b^2}$$

vemos que las nuevas raíces existen si y solamente si

$$0 < \frac{a^4 - r^2b^2}{a^4 - a^2b^2} < 1$$

o sea si $a < r < a^2/b$. En tal caso, existen dos raíces, a saber

$$t_1 = \arccos\left(\frac{a^4 - r^2b^2}{a^4 - a^2b^2}\right)^{1/2} \qquad , \qquad t_2 = t_1 + \pi$$

teniéndose además que $y_\beta(t_1) = y_\beta(t_2)$. Esto significa entonces que bajo la condición $a < r < a^2/b$, existen dos intersecciones en el eje y (además de las correspondientes a $t = \pi/2$ y $t = 3\pi/2$) las cuales son autointersecciones de la curva β.

En conclusión: si $b^2/a < r < b$, la curva β tiene autointersecciones (en el eje x); si $a < r < a^2/b$, la curva β tiene autointersecciones (en el eje y). Como $a > b$, observamos que en el intervalo $b \leq r \leq a$, la curva β no tiene autointersecciones (note que en este intervalo la curva β no es regular pues, como habíamos ya visto, la región en la cual la curva β pierde su regularidad corresponde a valores de r tales que $b^2/a \leq r \leq a^2/b$). Más aún, con el valor de r en el intervalo $[b,a]$, la curva r-paralela β, siendo cerrada, simple y regular por partes, tiene orientación negativa (un ejemplo de esta situación es la curva 1.5-paralela a la elipse $\alpha(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$ que ya ha sido estudiada, pues en este caso $r = 1.5 \in [1,2] = [b,a]$). A manera de resumen de las variaciones que tienen las propiedades de regularidad, simplicidad y positividad en la orientación de la curva r-paralela β, al variar r, presentamos el siguiente esquema.

```
          0                b^2/a           b              a            a^2/b
----------*------------------*-------------*--------------*--------------*-------------> r
La curva es regular  |   La curva no es regular  [ , ]             | La curva es
( , ) y simple       |                                             | regular ( , )
( , ]. Tiene orien-  | La curva     | La curva      | La curva      | y simple [ , ).
tacion positiva      |  no es       |    es         |  no es        | Tiene orien-
( , ].               | simple       |  simple.      | simple        | tacion posi-
                     |  (autoin-    |   Tiene       |  (autoin-     | tiva [ , ).
                     | tersecclo-   |  orienta-     | tersecclo-    |
                     | nes en el    |  cion ne-     | nes en el     |
                     |  eje x)      |  gativa       | eje y)        |
                     |              |               |               |
                     |  ( , )       |   [ , ]       |   ( , )       |
```

Las figura 6 ilustra cada una de estas situaciones.

En consecuencia, la fórmula para calcular el área encerrada por la curva r-paralela β a la elipse α, tiene sentido cuando $r \notin (b^2/a, b) \cup (a, a^2/b)$. En todos los demás casos la curva β es simple, propiedad fundamental para que tenga sentido hablar del área encerrada por la curva. Más aún, cuando $r \leq b^2/a$ o $r \geq a^2/b$, siendo β una curva positivamente orientada, el área que ésta encierra es

$$A(\beta) = A(\alpha) - rL(\alpha) + \pi r^2 = \pi ab - rL(\alpha) + \pi r^2$$

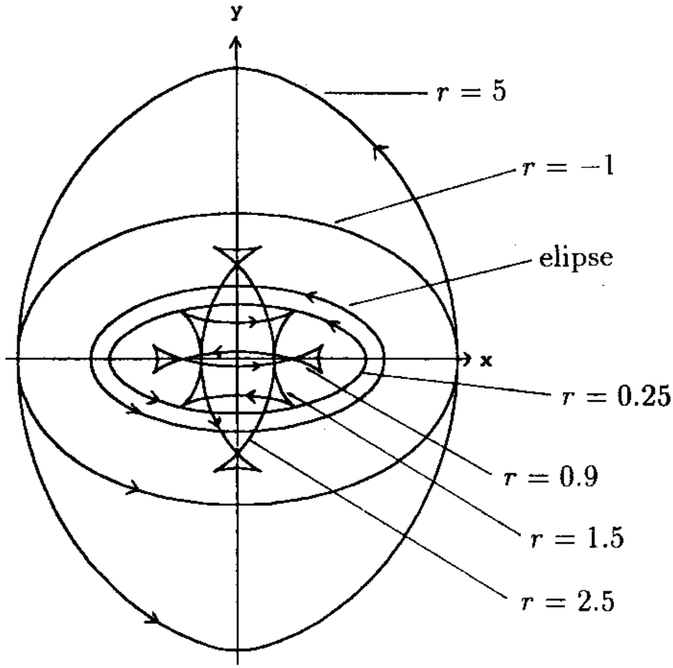

Figura 6. La elipse $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (2 \cos t, \text{sen } t)$ y sus curvas r-paralelas con $r = -1,\ 0,\ 0.25,\ 0.9,\ 1.5,\ 2.5$ y 5.

mientras que si $b \leq r \leq a$, la curva simple β tiene orientación negativa, y entonces el área encerrada por ella debe ser

$$A(\beta) = -\pi ab + rL(\alpha) - \pi r^2$$

En el siguiente teorema recopilamos los resultados que hemos obtenido sobre la longitud y el área encerrada por las curvas paralelas a una elipse.

Teorema 1 *Sea* $\alpha: [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ *la elipse*

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \text{ sen } t)$$

en donde $a > b > 0$. *La curva* $\beta: [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$

$$\beta(t) = \left(\cos t \left(a - \frac{rb}{(a^2 \text{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}} \right), \text{ sen} t \left(b - \frac{ra}{(a^2 \text{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}} \right) \right)$$

es una curva r-paralela a α. *Sea* $L(\alpha)$ *y* $L(\beta)$ *las longitudes de las curvas* α *y* β, *y* $A(\alpha)$ *y* $A(\beta)$ *el área que éstas encierran, respectivamente.*

a) *Si $r \leq b^2/a$, la longitud de la curva β se calcula como*

$$L(\beta) = L(\alpha) - 2\pi r$$

b) *Si $r \geq a^2/b$, la longitud de la curva β se calcula como*

$$L(\beta) = -L(\alpha) + 2\pi r$$

c) *Si $r \in (b^2/a, a^2/b)$, la longitud de la curva β se calcula como*

$$L(\beta) = -L(\alpha) + 4L_J(\alpha) + 2\pi r + 8r \arctan\left(-\frac{b}{a}\cos\tilde{t}\right)$$

en donde $J = (\tilde{t}, *)$ es el primer subintervalo de $[a, b]$ en el cual $\beta'(t)$ tiene la misma dirección de $\alpha'(t)$, y $L_J(\alpha)$ es la longitud de α restringida a J.

d) *Si $r \in (-\infty, b^2/a] \cup [a^2/b, +\infty)$, el área encerrada por la curva β es*

$$A(\beta) = \pi ab - rL(\alpha) + \pi r^2$$

e) *Si $r \in [b, a]$, el área encerrada por la curva β es*

$$A(\beta) = -\pi ab + rL(\alpha) - \pi r^2$$

Para finalizar este artículo, estudiaremos las curvas paralelas a una parábola. Consideremos la parábola $\alpha: I \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (t, pt^2)$, en donde I es un intervalo de $\mathbf{R}$ simétrico respecto del origen, y p es un real positivo dado. Según la fórmula (1), la curva β, r-paralela a α es

$$\beta(t) = \left(t - \frac{2rpt}{(1+4p^2t^2)^{1/2}}, t^2 + \frac{r}{(1+4p^2t^2)^{1/2}}\right)$$

Ciertamente ésta es una curva simétrica respecto del eje de ordenadas. Una pregunta natural sobre ella es: ¿es esta curva –paralela a la parábola

$y = px^2$–, también una parábola? [1] No es difícil sospechar que la respuesta a la pregunta será negativa, pues, como hemos visto ya en varias ocasiones, la curva β puede llegar a perder su regularidad (propiedad que debe de poseer cualquier curva parabólica). En efecto, la curvatura de α en t viene dada por

$$k_\alpha(t) = \frac{2p}{(1+4p^2t^2)^{3/2}}$$

El rango de esta función es (pensando que α está definida en todo $\mathbf{R}$) el intervalo $(0, 2p]$, de modo que, según el teorema 1, tomando $r^{-1} \in (0, 2p]$, la curva β, r-paralela a α, no es regular, y no puede uno esperar que ésta sea una parábola. Sin embargo, la inquietud puede persistir al imaginar una curva r-paralela a α con $r < 0$ muy pequeño en valor absoluto (con *β muy cerca de la parte exterior de α*). La respuesta, sin embargo, sigue siendo en este caso negativa. En efecto, si la curva β fuera una parábola, ésta tendría que ser del tipo $y = \mu x^2 + \nu$, para ciertas constantes μ y ν. (En efecto, la curva β es simétrica respecto del eje de ordenadas y posee un extremo local en $\beta(0) = (0, r)$, el cual corresponde al punto que está a r unidades del vértice de la parábola que es, además, el único vértice de la curva, esto es, el punto en donde $k'_\beta(t) = 0$. Así entonces, la única curva parabólica con estas características es $y = \mu x^2 + \nu$). Para probar nuestra afirmación (*la curva β no es una parábola*) se pude usar el hecho de que la (traza de la) curva regular $\alpha: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, simétrica respecto del eje de ordenadas, es una parábola del tipo $y = \mu x^2 + \nu$, si y solamente si

$$y'(t)(x'(t))^2 - x(t)(x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)) = 0$$

expresión que es fácil ver que no satisface la curva β, r-paralela a la parábola

---

[1] Esta pregunta fue la que inicialmente motivó el presente estudio. Un hecho que se desprende fácilmente de los resultados aquí obtenidos, es que si la curva α es una recta, su curva r-paralela será también una recta para cualquier r, y si la curva α es una circunferencia de radio R, su curva r-paralela será también una circunferencia de radio $r + R$ (excepto en el caso en el que $r = -R$). Tenemos pues que si α es una recta o una circunferencia, su curva r-paralela es una curva *de la misma naturaleza de α*. Observe que estos casos corresponden a curvas α con curvatura constante igual a cero –rectas–, y diferente de cero –circunferencias–.

α. De hecho, se obtiene que

$$y'_\beta(t)(x'_\beta(t))^2 - x_\beta(t)(x'_\beta(t)y''_\beta(t) - x''_\beta(t)y'_\beta(t)) = 8rp^3t^3k_\alpha(t)(1 - rk_\alpha(t))^2$$

Si consideramos la parábola $y = px^2$ en todo su dominio, es decir, la (traza de la) curva $\alpha: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (t, pt^2)$, como dijimos anteriormente, la curva β, r-paralela a α, será regular si y solamente si $r^{-1} \notin (0, 2p] =$ rango de $k_\alpha(t)$. Es decir, β es regular si y sólo si $r < 1/2p$. Esto significa que, globalmente, sólo se pueden tener curvas regulares paralelas a la parábola $y = px^2$ por afuera de ella ($r < 0$), o bien, por adentro hasta $r = 1/2p$ (no inclusive, o sea $0 < r < 1/2p$). Para $r \geq 1/2p$, la curva β no es regular, teniéndose de hecho que si $r > 1/2p$, esta curva presentará una autointersección sobre el eje de las ordenadas. En efecto, haciendo $x_\beta(t) = 0$, es decir

$$t - \frac{2rpt}{(1 + 4p^2t^2)^{1/2}} = 0$$

vemos que una raíz de esta ecuación es siempre $t = 0$ (la curva β siempre pasa por el eje de ordenadas en $\beta(0) = (0, r)$), teniéndose además la posibilidad de que

$$1 - \frac{2rp}{(1 + 4p^2t^2)^{1/2}} = 0$$

(Observe que esta ecuación no tiene solución si $r < 0$, es decir, las curvas r-paralelas hacia el exterior de la parábola solamente cruzan el eje de ordenadas en el punto $(0, r)$), de donde

$$\tilde{t}_{1,2} = \pm(1/2p)\left(4r^2p^2 - 1\right)^{1/2}$$

(observe también que si $r < 1/2p$ estas raíces no existen). Para $r > 1/2p$, éstas son dos raíces reales distintas en las que (puesto que $y_\beta(t)$ es una función par) $y_\beta(\tilde{t}_1) = y_\beta(\tilde{t}_2)$. Estas raíces corresponden entonces a una autointersección de la curva β sobre el eje de ordenadas. Para $r = 1/2p$ (las raíces $\tilde{t}_{1,2}$ son iguales a cero), la curva β, aunque no regular (de hecho $\beta'(0) = 0$), es simple.

Veamos un poco más de cerca qué ocurre cuando $r \geq 1/2p$ (es decir, cuando la curva β no es regular). En este caso la ecuación

$$1 - rk_\alpha(t) = 1 - \frac{2pr}{(1+4p^2t^2)^{3/2}} = 0$$

posee dos raíces en

$$t^*_{1,2} = \pm(1/2p)\left((2pr)^{2/3} - 1\right)^{1/2}$$

Nuevamente observamos que si $r = 1/2p$, estas raíces son iguales, y la curva β, aunque no regular (pierde su regularidad únicamente en $t^*_1 = t^*_2$), es una curva simple (en este caso las raíces $\tilde{t}_1$, $\tilde{t}_2$, t^*_1, t^*_2 son todas iguales a cero). Cuando $r > 1/2p$, las raíces t^*_1 y t^*_2 son distintas y se tiene además que $\tilde{t}_1 < t^*_1 < t^*_2 < \tilde{t}_2$. Por la simetría de la curva β respecto del eje de ordenadas, podemos concluir que la parte de la curva β entre $\tilde{t}_1$ y $\tilde{t}_2$, corresponde a un *loop* (simétrico respecto del eje de ordenadas) dentro del cual la curva pierde su regularidad en los puntos $\beta(t^*_1)$ y $\beta(t^*_2)$.

La figura 7 (tomando $p = 1$) ilustra los casos en los que $r = -1$ (curva regular paralela hacia el exterior de la parábola $y = x^2$), $r = 0.25 < 0.5 = 1/2p$ (curva regular paralela hacia el interior de la parábola) y $r = 1.8 > 1/2p$ (curva no regular paralela hacia el interior de la parábola).

Si consideramos solamente un arco de parábola (simétrico respecto del eje de ordenadas), digamos $\alpha: [-a, a] \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (t, pt^2)$, es posible hacer algunas observaciones adicionales a las anteriormente hechas en el caso general. En este caso la función curvatura $k_\alpha: [-a, a] \to \mathbf{R}$

$$k_\alpha(t) = \frac{2p}{(1+4p^2t^2)^{3/2}}$$

alcanza su máximo absoluto en $t = 0$, que vale $k_\alpha(0) = 2p$, y alcanza también su mínimo absoluto en $t = \pm a$, que vale $k_\alpha(\pm a) = 2p/(1+4p^2a^2)^{3/2}$. Llamemos q a este valor. Se tiene entonces que la curva β será regular si y solamente si $r^{-1} \notin [q, 2p]$, es decir, si $r < 1/2p$ (como en el caso general) o si $r > 1/q = (1+4p^2a^2)^{3/2}/2p$. Este valor de q es positivo, lo que indica que la curva r-paralela β está en la parte *interna* de la parábola.

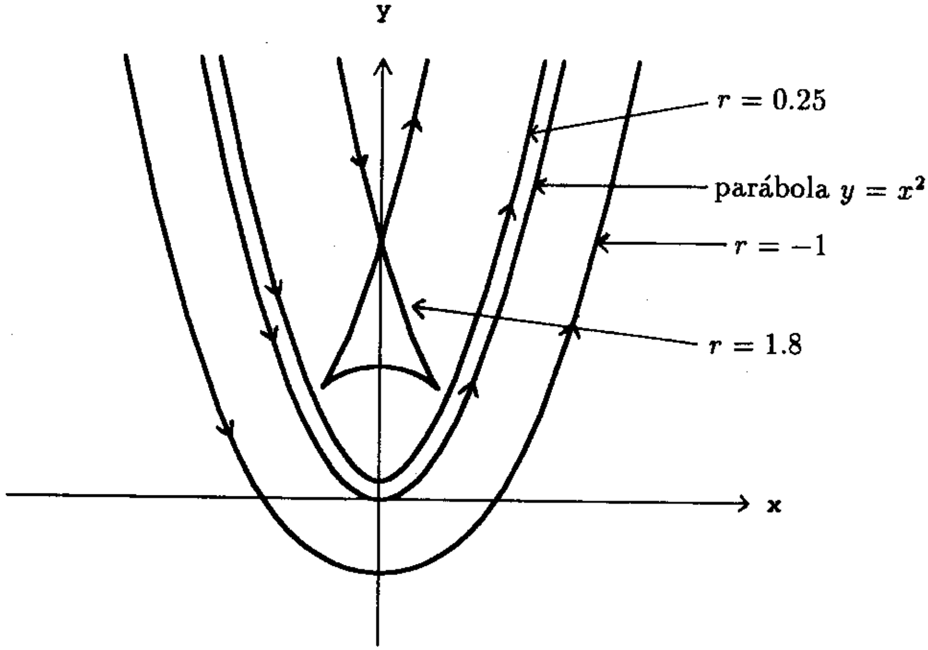

Figura 7. La parábola $y = x^2$ y sus curvas r-paralelas con $r = -1$, 0.25 y 1.8.

Es posible entonces tener una ***imagen paralela al arco de parábola $y = px^2$, que sea regular.*** Observe, sin embargo, que el valor $1/q$ es en general muy grande (del orden de $4a^3$), lo que significa que ***hay que despegarse mucho –hacia adentro, paralelamente– de la parábola para poder recuperar la regularidad de la curva r-paralela β.*** Consideremos a manera de ejemplo el arco de parábola $\alpha: [-1, 1] \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (t, t^2)$. En este caso $1/2p = 1/2$ y $q = 2/(5)^{3/2} = 0.1789$. Cuando $r < 1/2$, la curva $\beta: [-1, 1] \to \mathbf{R}^2$, r-paralela a α, es regular, estando ésta en el exterior de la parábola cuando $r < 0$ y en su interior cuando $0 < r < 1/2$. Mientras r se encuentre entre $1/2$ y $1/q = 5.59016$, la curva β (en el interior de la parábola) no será regular y ésta vuelve a ser regular para $r > 5.59016$. La figura 8 ilustra esta situación.

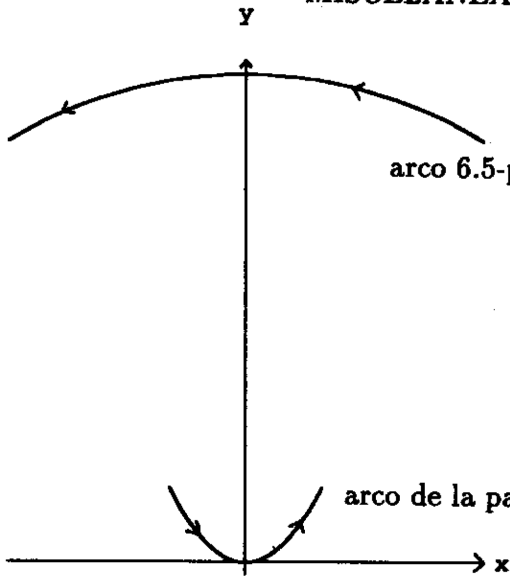

Figura 8. El arco de parábola $\alpha : [-1, 1] \to \mathbf{R}^2$, $\alpha(t) = (\ t,\ t^2)$ y su curva 6.5-paralela.

Bibliografía

[1] Do Carmo, Manfredo P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice-Hall, Inc. New Jersey (1976)

[2] O'Neill, Barrett. *Elementos de Geometría Diferencial.* Limusa-Wiley, S.A. México (1972)