

**DOI:** <https://doi.org/10.47234/mm.8205>

# Trayectoria en $\mathbb{R}^3$ del vector de raíces de una ecuación cúbica

Netzahualcóyotl Castañeda Roldán

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

BUAP

[netzac@fcfm.buap.mx](mailto:netzac@fcfm.buap.mx)

y

Carlos Hernández Garciadiego

Instituto de Matemáticas

UNAM

[chernandez@im.unam.mx](mailto:chernandez@im.unam.mx)

## 1. Introducción

En este artículo consideramos familias de ecuaciones cúbicas que tengan todas ellas tres raíces reales distintas y que además coincidan en los coeficientes de sus términos variables, distinguiéndose entre ellas únicamente por el término constante. A cada una de estas ecuaciones se le pueden asociar los seis vectores tridimensionales que tienen como coordenadas a las tres soluciones de la ecuación dada, en diferentes órdenes de permutación. La finalidad del presente trabajo consiste en identificar el lugar geométrico en  $\mathbb{R}^3$  en donde se mueven estos vectores de soluciones al variar el término constante de la ecuación y manteniendo fijos los coeficientes de sus términos de grado mayor a cero.

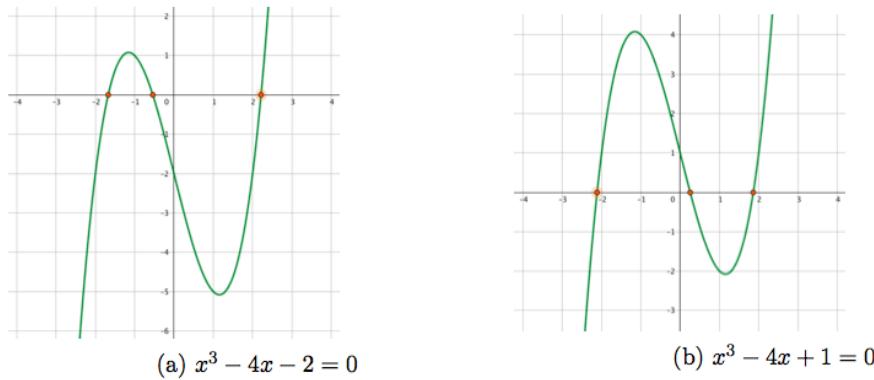
Empezando con un ejemplo, en la figura 1 se muestran las gráficas de dos polinomios cúbicos que difieren únicamente en el término constante. Al igualar los polinomios a cero, obtenemos dos ecuaciones. Las soluciones de cada ecuación se muestran en el cuadro 1.

Como se aprecia en la figura 1, cambiar el término constante de una ecuación implica modificar la función original porque equivale a realizar una translación vertical de la gráfica correspondiente. En términos

*Palabras clave:* Raíces cúbicas; Ecuación cúbica; Vector de raíces; Vector de soluciones; Superficies cuádricas.

El primer autor recibió apoyo del CONAHCYT durante la elaboración de este trabajo.

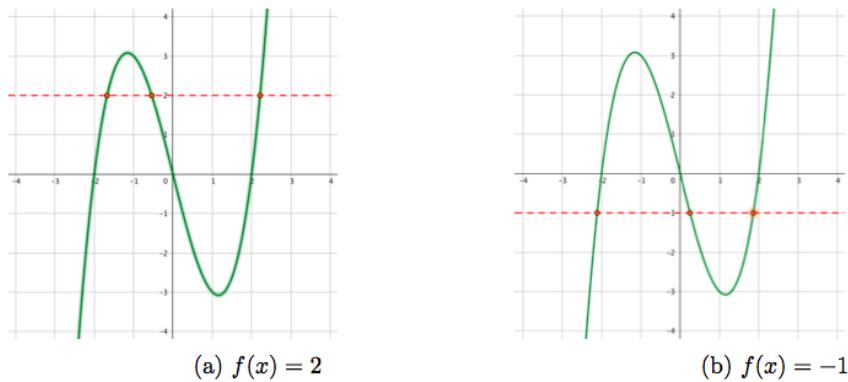
$x^3 - 4x - 2 = 0$	$x^3 - 4x + 1 = 0$
$x_1 \approx -1.6751$	$x_1 \approx -2.1149$
$x_2 \approx -0.5392$	$x_2 \approx 0.2541$
$x_3 \approx 2.2143$	$x_3 \approx 1.8608$

**Cuadro 1.** Valores aproximados de las soluciones para cada ecuación.**Figura 1.** Dos ecuaciones que solo difieren en sus términos constantes.

más precisos, si  $a, b, c, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$  y a las ecuaciones cúbicas  $ax^3 + bx^2 + cx + d_1 = 0$  y  $ax^3 + bx^2 + cx + d_2 = 0$  se les asocian las funciones  $g_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d_1$  y  $g_2(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d_2$  respectivamente, entonces las gráficas de las funciones  $g_1$  y  $g_2$  son translaciones verticales una de la otra. Un mejor enfoque es considerar una sola función para representar a todas las ecuaciones cúbicas (con coeficientes reales) que coincidan en los coeficientes de sus términos variables. En nuestro ejemplo de arriba dicha función sería  $f(x) = x^3 - 4x$ . Ahora consideraremos rectas horizontales  $y = k$  que intersecten a la gráfica de  $f(x)$  en tres puntos distintos  $(x_i, k)$ , con  $1 \leq i \leq 3$ . Diferentes valores de  $k$  producen diferentes puntos de intersección. Esto es equivalente a mover verticalmente la recta horizontal, lo que nos da una familia infinita de ecuaciones cúbicas, idénticas en sus términos variables pero distintas en el término constante. De este modo, todas estas ecuaciones están asociadas a la misma función,  $f(x) = x^3 - 4x$ . Esto se muestra en la figura 2.

Las gráficas de la figura 1 son diferentes a las de la figura 2 pero las soluciones numéricas correspondientes a cada inciso son las mismas.

Para que una ecuación cónica  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , tenga tres raíces reales distintas, es necesario que la gráfica del polinomio  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  tenga un máximo y un mínimo locales. Cada valor  $k$  que se encuentre estrictamente entre esos dos extremos,



**Figura 2.** Rectas horizontales intersectando a  $f(x) = x^3 - 4x$ .

determina una recta horizontal  $y = k$  que corta a la gráfica del polinomio en tres puntos distintos.

Con la finalidad de simplificar los cálculos, recordemos que la gráfica del polinomio  $f(x)$  es congruente a la de algún polinomio cúbico  $p(x)$  que tiene su punto de inflexión en el origen. Siempre es posible [6, cap. 5] pasar a otro sistema de coordenadas  $X'Y'$  transladando los ejes  $XY$  mediante

$$x' = x + \frac{b}{3a}; \quad y' = y - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{bc}{3a} - d.$$

Así, sin pérdida de generalidad podemos suponer que el polinomio  $f(x)$  tiene su punto de inflección en el origen. Esto significa que  $f(0) = 0$  y además  $-\frac{b}{3a} = 0$ , por lo que  $d = 0$  y  $b = 0$ . Nótese que la gráfica de un polinomio cúbico de la forma  $ax^3 + cx$  es verticalmente homotética a la gráfica de  $x^3 + (c/a)x$ . Para simplificar aún más nuestro modelo, haremos  $a = 1$  y trabajaremos con la función cúbica  $f(x) = x^3 - cx$ . La gráfica de este polinomio es simétrica con respecto al origen y por tanto su máximo y mínimo locales tienen el mismo valor absoluto. Es fácil calcular estos valores extremos derivando la función, igualando su derivada a cero, resolviendo la ecuación resultante y evaluando. De este modo, consideraremos que la función  $f(x)$  representa a la familia de ecuaciones de la forma  $x^3 - cx = k$ , donde  $c > 0$  y  $-\frac{2c}{3}\sqrt{\frac{c}{3}} \leq k \leq \frac{2c}{3}\sqrt{\frac{c}{3}}$ .

2. El lugar geométrico del vector de soluciones visto como la intersección de algunas superficies

Empezamos esta sección obteniendo seis ecuaciones en tres variables. Cada una de ellas representa una superficie en  $\mathbb{R}^3$  a la que debe de pertenecer cualquier vector  $(x_1, x_2, x_3)$  formado por las tres soluciones reales de una misma ecuación cúbica de la forma  $x^3 - cx = k$ . De tal

modo podemos identificar al lugar geométrico del vector de soluciones como la intersección de las seis superficies mencionadas.

Sea  $c > 0$  y sea  $f$  la función cúbica dada por  $f(x) = x^3 - cx$ . Supongamos que existen tres números reales distintos,  $x_1, x_2, x_3$ , a los que la función  $f$  les asigna el mismo valor. Llamémosle  $k$  a esta imagen común, es decir,  $k = f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ . Esto significa que  $x_1, x_2$  y  $x_3$  son las tres raíces distintas de la ecuación cúbica  $x^3 - cx - k = 0$ . Se sigue que

$$\begin{aligned}x^3 - cx - k &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\&= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3,\end{aligned}$$

obteniendo en consecuencia

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= -c, \\x_1x_2x_3 &= k.\end{aligned}\tag{1}$$

Por otra parte, fijando  $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ , observamos que

$$x_i^3 - cx_i = f(x_i) = f(x_j) = x_j^3 - cx_j.$$

Reordenando términos y factorizando se obtiene

$$(x_i - x_j)(x_i^2 + x_ix_j + x_j^2) = x_i^3 - x_j^3 = c(x_i - x_j).$$

Dividiendo entre  $(x_i - x_j)$  se concluye que  $x_i^2 + x_ix_j + x_j^2 = c$ . Sustituyendo ahora los valores de los índices  $i$  y  $j$  para los tres casos posibles de  $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ , llegamos a las tres igualdades siguientes:

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = c.\tag{2}$$

$$x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2 = c.\tag{3}$$

$$x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 = c.\tag{4}$$

Sumando las igualdades 2, 3 y 4 y aplicando la igualdad 1, obtenemos

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2c.$$

Lo anterior muestra que el vector  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  pertenece a la intersección de las seis superficies dadas por las ecuaciones siguientes:

$$x + y + z = 0,\tag{5}$$

$$xy + xz + yz = -c,\tag{6}$$

$$x^2 + xy + y^2 = c,\tag{7}$$

$$x^2 + xz + z^2 = c,\tag{8}$$

$$y^2 + yz + z^2 = c,\tag{9}$$

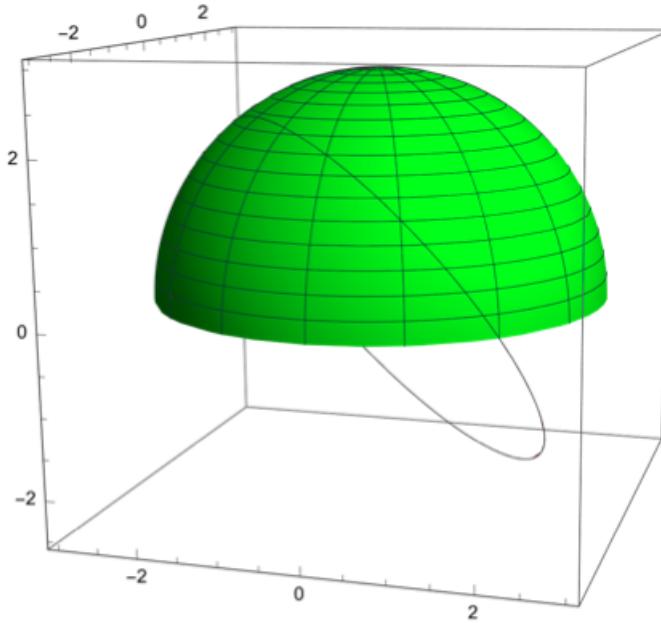
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2c.\tag{10}$$

Para simplificar la redacción sin abusar del lenguaje, en lo sucesivo utilizaremos el símbolo  $\langle(i)\rangle$  para referirnos a la superficie representada por la ecuación  $(i)$ , donde  $5 \leq i \leq 10$ . Es decir, si la ecuación  $(i)$  es  $G(x, y, z) = 0$ , el símbolo  $\langle(i)\rangle$  representará a la superficie  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x, y, z) = 0\}$ .

Nótese que cada una de estas seis ecuaciones es independiente del valor de  $k$ . Denotemos por  $\mathcal{C}$  al círculo que es la intersección del plano  $\langle(5)\rangle$  con la esfera  $\langle(10)\rangle$ . Es claro que la intersección de las seis superficies  $\langle(5)\rangle\text{-}\langle(10)\rangle$  está contenida en el círculo  $\mathcal{C}$ . Cada una de las tres ecuaciones  $(7)\text{-}(9)$  se puede obtener fácilmente despejando una variable de la ecuación  $(5)$  y sustituyendo el resultado en la ecuación  $(10)$ . Esto indica que el círculo  $\mathcal{C}$  está contenido en la intersección de las superficies  $\langle(7)\rangle\text{-}\langle(9)\rangle$ . Elevando al cuadrado la ecuación  $(5)$  se tiene

$$0 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz).$$

Aplicando ahora la ecuación  $(10)$  obtenemos la ecuación  $(6)$ . Esto implica que  $\mathcal{C}$  está contenido también en la superficie  $\langle(6)\rangle$ . De lo anterior se concluye que la intersección de las seis superficies  $\langle(5)\rangle\text{-}\langle(10)\rangle$  coincide con  $\mathcal{C}$ . En la figura 3 se muestran el círculo  $\mathcal{C}$  y la mitad superior de la esfera  $\langle(10)\rangle$ , para el valor de  $c = 4$ .

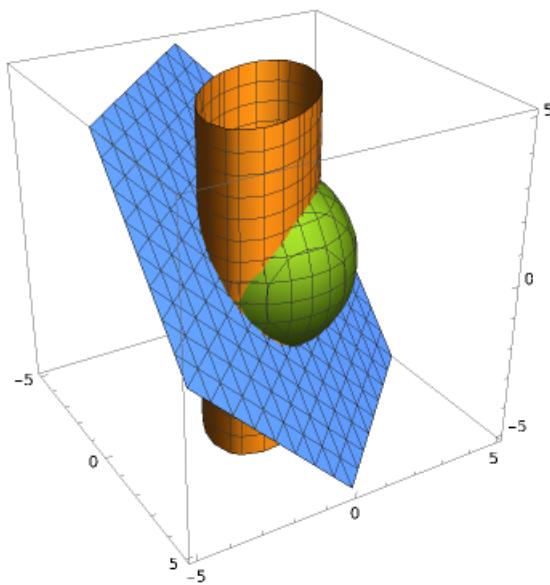


**Figura 3.** El círculo  $\mathcal{C}$  y una mitad de la esfera  $\langle(10)\rangle$ .

Como referencia general sobre ecuaciones algebraicas recomendamos los libros [1] y [12].

## 2.1 Los tres cilindros elípticos

A continuación describimos las superficies determinadas por las ecuaciones (7)-(9). Cada una de estas ecuaciones tiene dos variables. Conjuntamente abarcan a las tres variables independientes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , por lo que cada ecuación representa a algún tipo de cilindro. Como las tres ecuaciones tienen coeficientes idénticos, las tres representan el mismo tipo de cilindro. Para ver de qué tipo de cilindro se trata, consideremos la ecuación (7), restringiéndonos por el momento al plano  $XY$ , donde  $z = 0$ .



**Figura 4.** El cilindro  $\langle(7)\rangle$ , la esfera  $\langle(10)\rangle$  y el plano  $\langle(5)\rangle$ .

De acuerdo a la ecuación general de segundo grado  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , tenemos:

$$A = B = C = 1, \quad D = E = 0, \quad y \quad F = -c$$

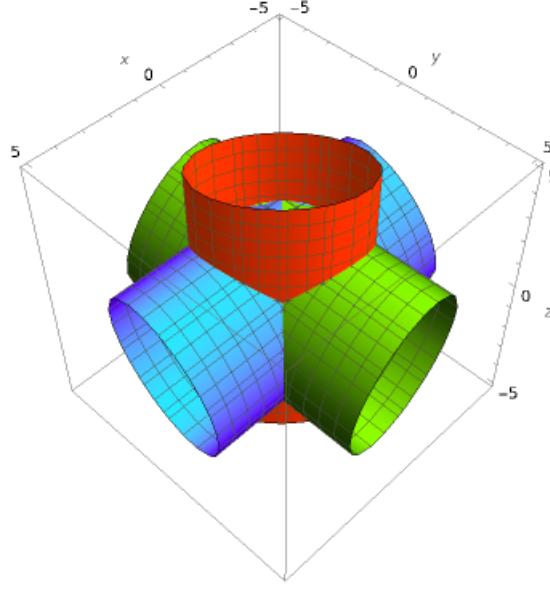
Por lo tanto el discriminante de la ecuación (7) es:

$$B^2 - 4AC = 1 - 4 = -3 < 0.$$

Esto indica que la curva  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 = c\}$  es una elipse. Nótese que esta elipse tiene su centro en el origen, ya que su ecuación es simétrica con respecto al mismo.

Podemos concluir entonces que la ecuación (7) representa un cilindro elíptico vertical que tiene como eje al eje  $Z$ . En la figura 4 se muestra dicho cilindro junto con la esfera  $\langle(10)\rangle$  (correspondientes al valor de  $c = 4$ ), así como el plano  $\langle(5)\rangle$ .

Similarmente, las ecuaciones (8) y (9) representan cilindros elípticos ortogonales entre sí y ortogonales a  $\langle\langle(7)\rangle\rangle$ . El eje del cilindro  $\langle\langle(8)\rangle\rangle$  es el eje  $Y$  y el eje del cilindro  $\langle\langle(9)\rangle\rangle$  es el eje  $X$ . En la figura 5 se muestran los tres cilindros elípticos (también correspondientes al valor de  $c = 4$ ).



**Figura 5.** Los tres cilindros elípticos  $\langle\langle(7)\rangle\rangle$ - $\langle\langle(9)\rangle\rangle$ .

Las proyecciones ortogonales del vector  $\vec{x}$  sobre los planos coordinados  $XY$ ,  $XZ$  y  $YZ$  están, respectivamente, sobre las elipses:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + xy + y^2 = c\}, \\ E_2 &= \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + xz + z^2 = c\}, \\ E_3 &= \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + yz + z^2 = c\}. \end{aligned}$$

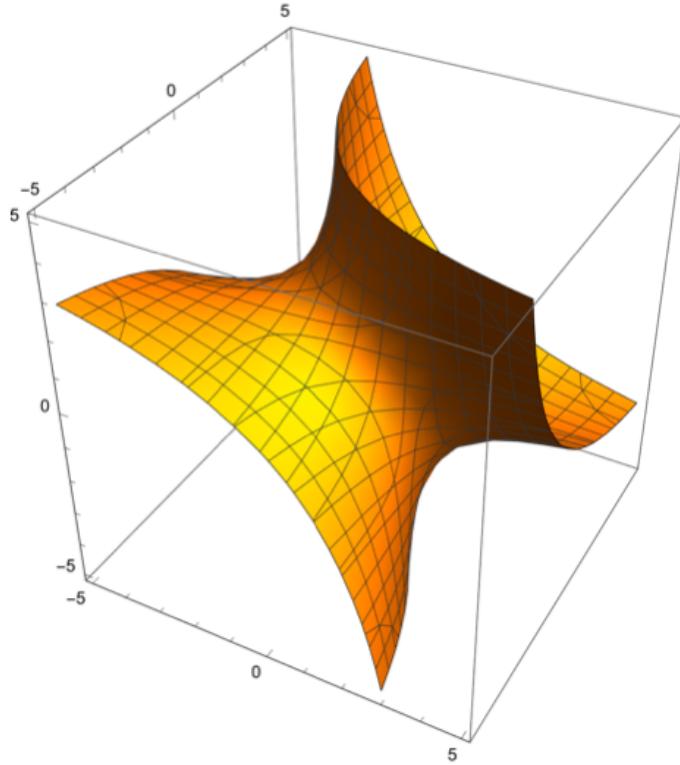
Esto significa que las proyecciones ortogonales del círculo  $\mathcal{C}$  sobre los planos coordenados son precisamente dichas elipses, ya que  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  son las intersecciones de los cilindros elípticos  $\langle\langle(7)\rangle\rangle$ ,  $\langle\langle(8)\rangle\rangle$  y  $\langle\langle(9)\rangle\rangle$  con los planos coordinados  $XY$ ,  $XZ$  y  $YZ$ , respectivamente.

Como referencia general para temas de geometría analítica, tanto en el plano  $XY$  como en  $\mathbb{R}^3$ , recomendamos los libros [4] y [6].

## 2.2 El hiperoloide de revolución

Ahora, aplicando técnicas matriciales de la teoría de formas cuadráticas a la superficie  $\langle\langle(6)\rangle\rangle$ , obtendremos una matriz de rotación que usaremos en la próxima sección para parametrizar el círculo  $\mathcal{C}$ . Dicha superficie es un hiperoloide de revolución que tiene como eje a la recta  $D =$

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ . Este hiperboloide se muestra en la figura 6 (también para el valor  $c = 4$ ) y su «cuello» es el círculo  $\mathcal{C}$ .



**Figura 6.** Hiperboloide de revolución:  $xy + xz + yz = -4$ .

La matriz asociada a la parte cuadrática del hiperboloide  $\langle(6)\rangle$  es

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de la matriz  $H$  es  $\lambda^3 - \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(\lambda - 1)(2\lambda + 1)^2$  y sus valores propios son  $\lambda = 1$  y  $\lambda = -\frac{1}{2}$ . Los vectores  $v_1 = (-1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$  y  $v_3 = (1, 1, 1)$  son vectores propios de la matriz  $H$  y además son mutuamente ortogonales. Sus normas son  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  y  $\sqrt{3}$ , respectivamente. Por tanto, sus múltiplos escalares de longitud 1 son  $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ,  $\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$  y  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ . Tomando como columnas a estos vectores ortogonales normalizados se construye la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Dado que esta matriz es ortogonal y su determinante es 1, corresponde a una rotación. Dicha rotación manda el plano  $XY$  al plano  $\langle(5)\rangle$  y el eje  $Z$  a la línea  $D$ . La rotación inversa está dada por la matriz  $Q^{-1} = Q^T$ , ya que la inversa de una matriz ortonormal es igual a su transpuesta. La rotación dada por la matriz  $Q^{-1}$  manda el hiperboloide de revolución  $\langle(6)\rangle$  a un hiperboloide cuyo eje coincide con el eje  $Z$ . La matriz asociada a la parte cuadrática de este otro hiperboloide es

$$\begin{aligned} Q^{-1}HQ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación del hiperboloide vertical que se muestra en la figura 7, es

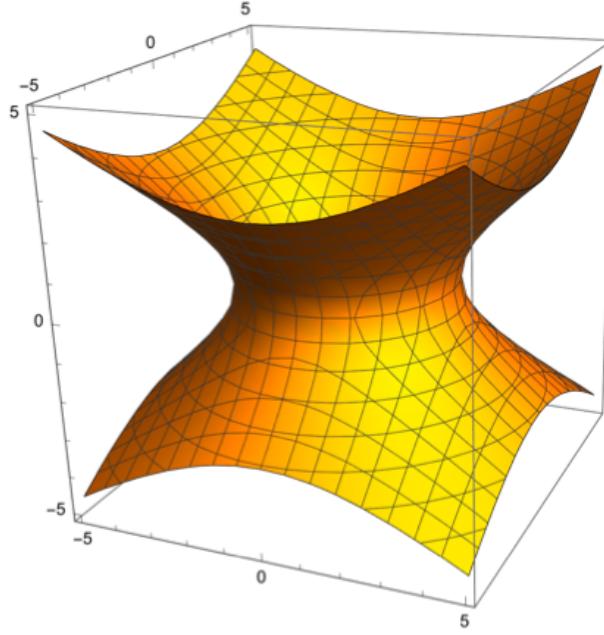
$$-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + z^2 = -4.$$

El «cuello» de este hiperboloide es un círculo en el plano  $XY$  con centro en el origen y radio  $\sqrt{2c}$ , es decir el círculo  $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 2c\}$ .

Para consultar temas de álgebra lineal elemental, recomendamos los libros [5] y [8]. Como referencia para los temas de formas cuadráticas y la representación matricial de superficies cuádricas (y sus transformaciones), recomendamos los libros [3, §6.8], [9, cap. XII], [10, §4.6 y §4.7] y el artículo [7].

### 3. La parametrización del círculo $\mathcal{C}$

El objetivo de esta sección es encontrar una parametrización del círculo  $\mathcal{C}$  como una función vectorial de una variable real, es decir  $\mathcal{C}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Dado que se trata de un círculo, es de esperarse que las funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  sean funciones trigonométricas. De preferencia, buscamos expresiones simples para estas funciones, mientras más simples mejor. Una vez contando con dichas expresiones, las utilizamos para comprobar que las coordenadas de cada punto de



**Figura 7.** Hiperboloide de revolución:  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2 = 4$ .

$\mathcal{C}$  son soluciones de la ecuación cónica  $f(u) = k$  para un mismo valor de  $k$ . Esto es, mostraremos que dado cualquier  $t \in \mathbb{R}$ , se cumple  $f(x(t)) = f(y(t)) = f(z(t))$ .

La imagen del hiperboloide vertical, bajo la rotación correspondiente a la matriz  $Q$ , es el hiperboloide  $\langle(6)\rangle$ . Similarmente, el círculo  $\mathcal{C}$ , que es el «cuello» del hiperboloide  $\langle(6)\rangle$ , es la imagen, bajo la rotación asociada a  $Q$ , del círculo  $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 2c\}$ , el «cuello» del hiperboloide vertical. De este modo tenemos

$$\mathcal{C}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2c} \cdot \cos t \\ \sqrt{2c} \cdot \sen t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{c} \cdot \cos t - \sqrt{\frac{c}{3}} \cdot \sen t \\ \sqrt{c} \cdot \cos t - \sqrt{\frac{c}{3}} \cdot \sen t \\ 2\sqrt{\frac{c}{3}} \cdot \sen t \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x(t) &= -\sqrt{c} \left( \cos t + \frac{\sen t}{\sqrt{3}} \right), \\ y(t) &= \sqrt{c} \left( \cos t - \frac{\sen t}{\sqrt{3}} \right), \\ z(t) &= 2\sqrt{\frac{c}{3}} \sen t. \end{aligned}$$

Aplicando la identidad

$$A \cos t + B \sin t = \sqrt{A^2 + B^2} \sin \left( t + \arctan \frac{A}{B} \right),$$

resulta

$$x(t) = -2\sqrt{\frac{c}{3}} \sin \left( t + \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{y} \quad y(t) = 2\sqrt{\frac{c}{3}} \sin \left( t + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Como

$$-\cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} \quad \text{y} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3},$$

aplicando ahora la identidad

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B,$$

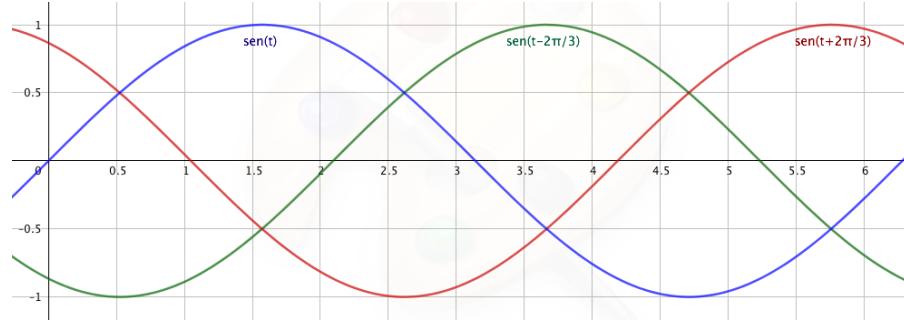
tenemos

$$x(t) = -2\sqrt{\frac{c}{3}} \sin \left( t + \frac{\pi}{3} \right) = 2\sqrt{\frac{c}{3}} \sin \left( t - \frac{2\pi}{3} \right).$$

Por lo tanto

$$\mathcal{C}(t) = 2\sqrt{\frac{c}{3}} \left( \sin \left( t - \frac{2\pi}{3} \right), \sin \left( t + \frac{2\pi}{3} \right), \sin t \right)$$

En la figura 8 se muestran las tres funciones senoidales correspondientes a las coordenadas del círculo  $\mathcal{C}(t)$ , sin incluir el factor común  $2\sqrt{\frac{c}{3}}$ .



**Figura 8.** Funciones:  $\sin \left( t - \frac{2\pi}{3} \right)$ ,  $\sin \left( t + \frac{2\pi}{3} \right)$ ,  $\sin(t)$ .

Con el fin de comprobar que la parametrización obtenida es correcta, observamos que

$$\sin \left( t - \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t$$

y

$$\sin \left( t + \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \sin t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t.$$

Por lo tanto  $x(t) + y(t) + z(t) = 0$ . Esto implica que el vector  $(x(t), y(t), z(t))$  está en el plano  $\langle(5)\rangle$ . A continuación vemos que

$$x^2(t) = \frac{4c}{3} \cdot \frac{1}{4} \left( \sin^2 t + 2\sqrt{3} \sin t \cos t + 3 \cos^2 t \right)$$

y

$$y^2(t) = \frac{4c}{3} \cdot \frac{1}{4} \left( \sin^2 t - 2\sqrt{3} \sin t \cos t + 3 \cos^2 t \right),$$

de donde se obtiene

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = \frac{c}{3} (2 \sin^2 t + 6 \cos^2 t + 4 \sin^2 t) = 2c.$$

La igualdad anterior prueba que el vector  $(x(t), y(t), z(t))$  está también en la esfera  $\langle(10)\rangle$ , por lo que podemos concluir que pertenece al círculo  $\mathcal{C}$ .

En el otro sentido, tomemos ahora un vector  $\vec{r} = (u, v, w) \in \mathcal{C}$ . Nótese que las coordenadas de dicho vector cumplen con las ecuaciones (5) y (10). Haciendo cálculos similares a los de la sección 2, se puede comprobar que la imagen de  $\vec{r}$  bajo la rotación  $Q^{-1}$ , es decir el vector

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-u+v}{\sqrt{2}} \\ \frac{-u-v+2w}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

pertenece al círculo

$$\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 2c\} = \left\{ \sqrt{2c} (\sin t, \cos t, 0) \mid 0 \leq t < 2\pi \right\}.$$

Como el vector  $(x(t), y(t), z(t))$  está sobre el círculo  $\mathcal{C}$ , dados los cálculos de la sección 2, podemos concluir que la función  $f(x) = x^3 - cx$  da el mismo resultado cuando se aplica a cada una de sus coordenadas. Esto también se puede comprobar directamente, utilizando la identidad

$$\sin^3 \theta = \frac{1}{4} (3 \sin \theta - \sin 3\theta),$$

que implica

$$\frac{4}{3} \sin^3 \theta - \sin \theta = -\frac{1}{3} \sin 3\theta.$$

De este modo

$$\begin{aligned} f(x(t)) = x^3(t) - cx(t) &= \frac{8c}{3} \sqrt{\frac{c}{3}} \sin^3 \left( t - \frac{2\pi}{3} \right) - 2c \sqrt{\frac{c}{3}} \sin \left( t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= 2c \sqrt{\frac{c}{3}} \left( \frac{4}{3} \sin^3 \left( t - \frac{2\pi}{3} \right) - \sin \left( t - \frac{2\pi}{3} \right) \right) \\ &= -\frac{2c}{3} \sqrt{\frac{c}{3}} \sin (3t - 2\pi) = -\frac{2c}{3} \sqrt{\frac{c}{3}} \sin (3t). \end{aligned}$$

De forma similar

$$f(y(t)) = y^3(t) - cy(t) = -\frac{2c}{3}\sqrt{\frac{c}{3}} \operatorname{sen}(3t).$$

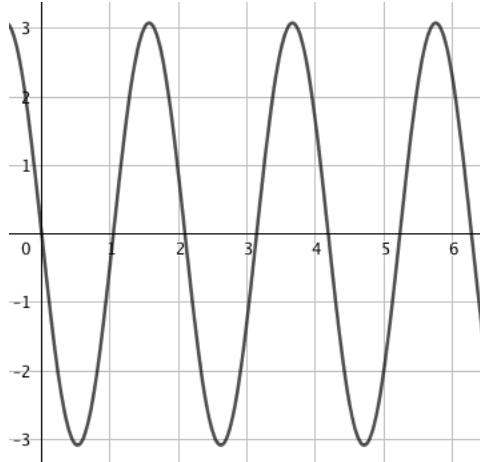
Y también

$$f(z(t)) = z^3(t) - cz(t) = -\frac{2c}{3}\sqrt{\frac{c}{3}} \operatorname{sen}(3t).$$

Con esto vemos que el valor  $k$ , que se mencionó al final de la introducción y al principio de la sección 2, se puede considerar como una función trigonométrica dependiente del mismo parámetro  $t$  con el que hemos parametrizado al círculo  $\mathcal{C}$ , es decir

$$k = k(t) = f(x(t)) = f(y(t)) = f(z(t)) = -\frac{2c}{3}\sqrt{\frac{c}{3}} \operatorname{sen}(3t).$$

En la figura 9 se muestra esta función  $k(t) = -\frac{2c}{3}\sqrt{\frac{c}{3}} \operatorname{sen}(3t)$ , para el valor de  $c = 4$ .



**Figura 9.** Función  $-\frac{16}{3\sqrt{3}} \operatorname{sen}(3t)$ .

Como referencia para los temas de trigonometría, recomendamos los libros [2] y [11].

## Conclusión

Dada la función  $f(x) = x^3 - cx$ , el punto  $(x_1, x_2, x_3)$  formado por tres raíces de la ecuación  $f(x) = k$  está sobre el círculo  $\mathcal{C}$  que es la intersección de las superficies  $\langle(5)\rangle$ - $\langle(10)\rangle$ , para cualquier valor de  $k$ . Y recíprocamente, para cualquier punto  $(x(t), y(t), z(t))$  en  $\mathcal{C}$ , se tiene  $f(x(t)) = f(y(t)) = f(z(t)) = k$  para una  $k$  entre  $-\frac{2c}{3}\sqrt{\frac{c}{3}}$  y  $\frac{2c}{3}\sqrt{\frac{c}{3}}$ .

## Agradecimiento

Los autores le agradecen a los revisores la atención detallada que le brindaron a la versión inicial del manuscrito, ya que con sus observaciones, comentarios y sugerencias han contribuido significativamente a mejorar la claridad en la exposición de los temas aquí tratados.

## Bibliografía

- [1] H. Cárdenas, E. Lluis, F. Raggi y F. Tomás, *Álgebra superior*, Biblioteca de matemática superior, Trillas, 1973.
- [2] E. A. Davis y J. J. Pedersen, *Essentials of trigonometry*, Prindle, Weber & Schmidt, Inc., 1969.
- [3] S. Friedberg, A. Insel y L. Spence, *Linear algebra*, 4.<sup>a</sup> ed., Pearson Education, 2014.
- [4] G. Fuller, *Geometría analítica*, CECSA, 1989, 9.<sup>a</sup> impresión.
- [5] S. Lang, *Introduction to linear algebra*, 2.<sup>a</sup> ed., Undergraduate texts in mathematics, Springer, 1986.
- [6] C. H. Lehmann, *Geometría analítica*, Limusa, 2005.
- [7] J. Levin, «A parametric algorithm for drawing pictures of solid objects composed of quadric surfaces», *Communications of the ACM*, vol. 19, 1976, 555–563, <https://doi.org/10.1145/360349.360355>.
- [8] M. Marcus y H. Minc, *Elementos de álgebra lineal*, Limusa, 1985.
- [9] L. Mirsky, *An introduction to linear algebra*, Dover books on mathematics, Reissue ed., Dover, 2011.
- [10] A. J. Pettofrezzo, *Matrices and Transformations*, Dover books on mathematics, Dover, 1978.
- [11] F. W. Sparks y P. K. Rees, *Trigonometría plana*, 1.<sup>a</sup> ed., Reverté, 1970.
- [12] J. V. Uspensky, *Teoría de ecuaciones*, Limusa, 1998, 7.<sup>a</sup> reimpresión.