Miscelánea Matemática **50** (2009) 27–43 SMM

Método para determinar equilibrios de Nash en juegos bimatriciales

J. Agustín Cano Garcés
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
04510 México, D.F.
jacano@servidor.unam.mx

Resumen

Se presenta un método para encontrar todos los posibles equilibrios de Nash en juegos bimatriciales de dimensión $m \times 2$ ó $2 \times n$, es decir, cuando el número de columnas o de renglones de las matrices de pago asociadas sea igual a 2. Este método, aunque algebraico, utiliza la gráfica de pagos esperados para el jugador que dispone de m ó de n alternativas, de manera análoga al método gráfico para resolver los llamados juegos rectangulares.

A diferencia de los algoritmos existentes para calcular equilibrios de Nash, el método aquí propuesto no es iterativo, ya que va descubriendo, uno a uno, los pares de estrategias, en general mixtas, que constituyen los citados equilibrios, sin tener que preocuparse con asuntos como la convergencia del proceso.

La justificación de este algoritmo es la base de una demostración nueva del teorema de Nash, pero con argumentos muy simples, únicamente válidos para el caso particular de 2 renglones o 2 columnas. Así, no es necesario hacer referencia a la teoría de puntos fijos, ni a ningún otro teorema elaborado relacionado con funciones con las características asociadas a la función de pago esperado, $E(x, y)$. Además, se demuestra que existe un número impar de equilibrios de Nash siempre y cuando el número total de éstos sea finito, para cualquier pareja de matrices de pago A y B.

Adicionalmente, es posible verificar la compatibilidad de las expresiones que se obtienen en este trabajo, con las que aparecen en otros textos que abordan el problema de la solución de juegos bimatriciales para el caso más simple, o sea, cuando ambos jugadores disponen de solamente 2 alternativas.

1. Planteamiento del problema

Considérese el juego bimatricial, denotado (A, B), donde A representa la matriz de pagos asociada al jugador I, y B la matriz correspondiente al jugador II, ambas con idéntica dimensión, $m \times 2$, es decir, el jugador I dispone de m estrategias puras, en tanto que el jugador II sólo dispone de 2. El otro caso, cuando la dimensión de ambas matrices es $2 \times n$, tiene un análisis completamente análogo.

En general, un equilibrio de Nash en estrategias puras es un par (i^*, j^*) que satisface

$$A_i^{j^*} \leq A_{i^*}^{j^*} \ \forall\, i = 1, ..., m \quad , \quad B_{i^*}^{j} \leq B_{i^*}^{j^*} \ \forall\, j = 1, ..., n$$

es decir, i^* es la mejor estrategia contra j^*, y viceversa, j^* es la mejor estrategia contra i^*. En otros términos, cuando el jugador II elige su estrategia pura j^*, al jugador I no le beneficia en nada cambiar de estrategia, es decir, se puede quedar con su elección de i^*; y al mismo tiempo, si el jugador I elige i^*, el otro jugador no tiene incentivo alguno para cambiar respecto a su elección de j^*.

Es bien sabido que algunos juegos no tienen equilibrios de Nash en estrategias puras o, por el contrario, pueden tener más de uno. Sin embargo, extendiendo la definición a estrategias mixtas, el teorema de Nash [1] afirma la existencia de al menos uno para cualquier juego bimatricial. Presentando los juegos como un arreglo rectangular de parejas de valores, donde la primera componente es el pago que recibe el jugador I, y la segunda es el pago que recibe II, he aquí algunos ejemplos:

$$\begin{pmatrix} (7,4) & (3,1) \\ (5,2) & (8,6) \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \ 2 \ \textit{equilibrios.}$$

$$\begin{pmatrix} (0,6) & (3,-1) & (4,9) & (12,2) \\ (4,5) & (-1,7) & (10,2) & (6,8) \\ (3,-2) & (10,5) & (-2,3) & (4,1) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 12 \\ 4 & -1 & 10 & 6 \\ 3 & 10 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 9 & 2 \\ 5 & 7 & 2 & 8 \\ -2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \ 1 \ \textit{equilibrio.}$$

$$\begin{pmatrix} (3,9) & (4,-1) \\ (4,2) & (1,8) \\ (-2,1) & (5,0) \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \textit{ninguno.}$$

Como el lector podrá verificar, se puede proceder de la siguiente forma para encontrar parejas de estrategias que constituyan equilibrios de Nash: se determina, para la primera columna de A, la ubicación del valor máximo, es decir, en cuál renglón se encuentra, y observando la posición correspondiente en B, se verifica si el valor ahí encontrado corresponde al máximo del renglón; en caso afirmativo, se ha encontrado un equilibrio. Y se repite el mismo procedimiento para cada una de las columnas de A.

Aplicando lo descrito al segundo de los ejemplos, se observa que el máximo para la primera columna de A es 4, ubicado en el segundo renglón, por lo que se va a la posición de primera columna y segundo renglón, pero en B, obteniendo 5, que no corresponde al máximo de ese renglón en B, por lo que ahí no hay equilibrio. Continuando, se descubre que la posición asociada al tercer renglón y segunda columna sí satisface las condiciones, por lo que esa posición representa un equilibrio de Nash, y es la única.

El tercer ejemplo no posee ningún equilibrio en estrategias puras, como se indica, pero, como se demostrará más adelante, sí existe uno al considerar estrategias mixtas, por lo que se comienza recordando la definición del conjunto de tales estrategias para un jugador que dispone de q estrategias puras:

$$S_q = \{\ \nu \in R^q \mid \sum_{k=1}^{q} \nu_k = 1,\ \nu_k \geq 0,\ k = 1, ..., q\ \}$$

Cada componente de ν, ν_k, se interpreta como la probabilidad con que debe elegirse la k-ésima estrategia pura. Una vez elegida una estrategia mixta $x \in S_m$ por parte del jugador I, y $y \in S_n$ por parte del jugador II, se pueden calcular los pagos esperados asociados a cada uno de ellos mediante la función de pago esperado

$$E_A(x, y) = x\, A\, y^t$$
$$E_B(x, y) = x\, B\, y^t,$$

por lo que se amplia la definición para los equilibrios de Nash

$$\begin{gathered}(x^*, y^*) \text{ equilibrio de Nash} \\ \Updownarrow \\ E_A(x, y^*) \leq E_A(x^*, y^*)\ \forall\, x \in S_m \\ \text{y } E_B(x^*, y) \leq E_B(x^*, y^*)\ \forall\, y \in S_n\end{gathered}$$

Con las definiciones anteriores es posible plantear el problema que se desea resolver de la manera siguiente: encontrar una pareja $(x^*, y^*) \in$

$S_m \times S_n$ que satisfaga

$$\begin{aligned} &\max_{x\in\, S_m} E_A(x, y^*) = E_A(x^*, y^*) \\ \text{y } &\max_{y\in\, S_n} E_B(x^*, y) = E_B(x^*, y^*) \end{aligned}$$

2. Características del problema

Replanteando el problema para el caso $m \times 2$, y utilizando la definición de las funciones de pago esperado, se puede expresar la búsqueda de equilibrios de Nash como el problema de encontrar parejas $(x^*, y^*) \in S_m \times S_2$ tales que:

$$\max_{x\in\, S_m} \{x_1(A_1(y^*)^t) + x_2(A_2(y^*)^t) + \ldots + x_m(A_m(y^*)^t)\} = x^* A\,(y^*)^t \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &\max_{y\in\, S_2}\{(x^* B^1)y_1 + (x^* B^2)y_2\} = \\ \max_{0\leq\, y_1 \leq 1} &\{(x^*(B^1 - B^2))y_1 + (x^* B^2)\} = x^* B\,(y^*)^t \end{aligned} \quad (2)$$

Examinando estas expresiones con atención se pueden obtener guías útiles para encontrar la solución a los problemas planteados para cada uno de los jugadores, ya que la primera, (1), indica que, dada una estrategia mixta y^*, el jugador I deberá seleccionar x^* tal que maximice su pago esperado. Pero la función a maximizar es lineal, y los coeficientes asociados a las variables no son otros que los pagos esperados para I cuando utiliza cada una de sus m estrategias puras, $(A_i(y^*)^t)$, para valores de i desde 1 hasta m.

Es evidente que solamente se necesita determinar el máximo de esas m cantidades, y si

$$\max_{i=1,\ldots,m} \{(A_i(y^*)^t)\} = (A_k(y^*)^t) \text{ para un solo índice } k$$

entonces ***la*** solución será el x^* para el que únicamente la componente de índice k vale 1, y el resto de las componentes valen 0. Si el máximo no es único, es decir, si éste se alcanza en más de un índice, por ejemplo k y q, entonces cualquier combinación de valores no negativos de las componentes k y q cuya suma sea igual a 1 podrá conformar vectores x^* alternativos, con el resto de sus componentes iguales a cero. Como hay que resolver este problema para cada valor posible de y^*, y como además y^* queda completamente definido si se proporciona su primera componente y_1^*, entonces será muy útil una herramienta auxiliar, una gráfica que ayude a visualizar los pagos esperados para cada uno de los renglones de A, en función de y_1^*,

$$(A_i(y^*)^t) = A_i^1 y_1^* + A_i^2 y_2^* = (A_i^1 - A_i^2) y_1^* + A_i^2$$

La gráfica es muy simple, ya que solamente es necesario visualizar una parte, la que corresponde a valores de la abscisa y_1^*, desde cero hasta 1. Así, el i-ésimo segmento une el punto $(0, A_i^2)$ con $(1, A_i^1)$; y se trata de identificar el segmento que se encuentre ***por arriba*** de los demás, en ese punto, para cada valor posible de y_1^*. Es interesante señalar que para $y_1^* = 0$ ese segmento corresponde al renglón, o renglones, donde se ubique el máximo de la segunda columna de A, mientras que para $y_1^* = 1$ será el renglón que contiene el máximo de la primera columna de A, ambos con posibilidades de constituir equilibrios de Nash.

Respecto a la segunda expresión, (2), el problema es aún más simple de resolver, ya que dado un vector x^*, el valor máximo de la expresión, que es una función afín, depende del signo del coeficiente de y_1^*, $x^*(B^1 - B^2)$; si es positivo, el máximo se obtiene para $y_1^* = 1$, si es negativo se obtiene para $y_1^* = 0$, y en el caso de que el coeficiente sea igual a cero, entonces cualquier valor de y_1^* puede ser seleccionado, lo que quiere decir, en este último caso, que no habría interés en cambiar el valor elegido de y_1^*.

Esta última observación resalta la importancia de elegir cuidadosamente x^* cuando es posible asignar más de un valor a dicha estrategia mixta: definir x^* de manera tal que la cantidad $x^*(B^1 - B^2)$ sea igual a cero. Resumiendo: x^* es una solución al problema planteado por la expresión (1), y para un valor dado de y_1^* esta solución es única cuando es uno solo el segmento que está ***por arriba*** de los demás, o existen soluciones alternativas cuando el punto ***por arriba*** de los demás corresponde a la intersección de dos o más segmentos; se analizan enseguida, con detalle, ambos casos.

Caso 1. Cuando x^* es solución única, es decir, cuando para un valor dado de y_1^* el punto ***por arriba*** de los demás corresponde a un solo segmento, el asociado a un renglón de la matriz A, y suponiendo que sea el k-ésimo, entonces x^* es un vector unitario, con el 1 ubicado en dicha posición. Así, para que $x^*(B^1 - B^2)$ sea igual a cero es necesario y suficiente que $B_k^1 = B_k^2$; equivalentemente, si los elementos del k-ésimo renglón de B no son iguales, entonces $x^*(B^1 - B^2)$ no será igual a cero.

Caso 2. Cuando x^* no es solución única, es decir, cuando para un valor dado de y_1^* el punto ***por arriba*** de los demás corresponde a la intersección de 2 segmentos asociados a renglones de la matriz

A, y suponiendo que sean el i-ésimo y el j-ésimo, entonces x^* será un vector con todos sus componentes nulos excepto estos dos. Además la expresión

$$x^*(B^1 - B^2) = x_i^*(B_i^1 - B_i^2) + x_j^*(B_j^1 - B_j^2)$$

puede interpretarse como una combinación lineal convexa de los valores entre paréntesis, y es un hecho conocido que no se puede obtener el valor 0 si ambos valores tienen el mismo signo, es decir, si los renglones i y j de la matriz B son ambos crecientes, o ambos decrecientes. Si los valores son de signo opuesto, entonces se debería utilizar la estrategia mixta x^* que satisfaga

$$x_i^*(B_i^1 - B_i^2) + x_j^*(B_j^1 - B_j^2) = x_i^*(B_i^1 - B_i^2) + (1 - x_i^*)(B_j^1 - B_j^2) =$$
$$x_i^*(B_i^1 - B_i^2 - B_j^1 + B_j^2) + (B_j^1 - B_j^2) = 0$$

lo que implica $x_i^* = \dfrac{(B_j^2 - B_j^1)}{(B_j^2 - B_j^1 + B_i^1 - B_i^2)}$, $x_j^* = 1 - x_i^*$

3. Método de solución

El esquema del método, que de manera secuencial va descubriendo los equilibrios de Nash en cualquier juego bimatricial de dimensión $m \times 2$, es muy simple: se inicia con una estrategia y^* que se utiliza como entrada para plantear y resolver el problema asociado a (1), obteniendo x^*, que a su vez sirve de entrada para el problema correspondiente a (2); si la solución a este último es y^*, entonces la pareja (x^*, y^*) constituye un equilibrio de Nash, pero no lo será si para obtener el óptimo se necesita una estrategia mixta diferente a y^*. Seleccionando el siguiente valor de y^* se repite el procedimiento, y así continúa hasta terminar.

¿Cómo se seleccionan los valores de y^*? En párrafos anteriores se mencionó que y^* queda completamente definido si se proporciona su primera componente y_1^*, y que se pueden visualizar los pagos esperados para cada una de las estrategias puras del jugador I, que corresponden a cada uno de los renglones de A, en función de y_1^*,

$$(A_i(y^*)^t) = A_i^1 y_1^* + A_i^2 y_2^* = (A_i^1 - A_i^2) y_1^* + A_i^2$$

Ya que únicamente tienen sentido valores de y_1^* entre 0 y 1, solamente es necesario graficar los segmentos correspondientes, por lo que el i-ésimo segmento unirá el punto $(0, A_i^2)$ con $(1, A_i^1)$. Así, para cada valor posible de y_1^*, empezando en 0 y haciendo un ***barrido*** hasta 1, se trata de identificar los puntos que se encuentren ***por arriba*** de los

Ejemplo 1

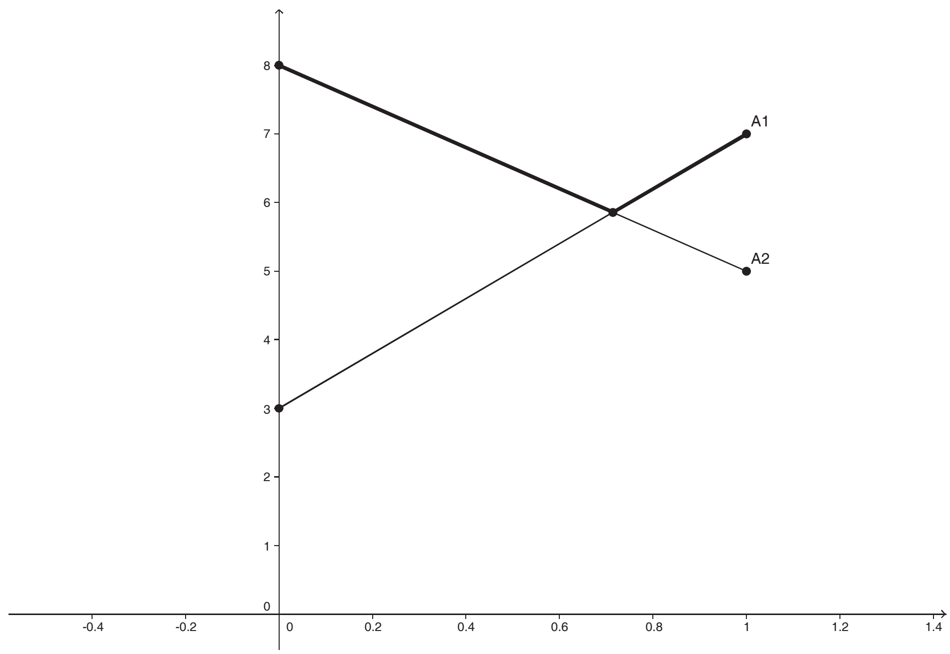

Figura 1:

demás, obteniendo, como es bien sabido [2], una función convexa, lineal por pedazos, la que puede explicitarse como

$$F(y_1^*) = \max_{i=1,\ldots,m} [(A_i^1 - A_i^2)y_1^* + A_i^2]$$

y cuya gráfica, en el caso de los ejemplos 1 y 3 presentados al inicio de este trabajo, corresponde a los trazos en línea más gruesa que aparecen en las figuras 1 y 2 respectivamente. Un concepto de fundamental importancia en la aplicación del algoritmo que sigue es el de ***punto de quiebre***, el cual se define a continuación, para cualquier función $F(y)$, continua, lineal por pedazos.

Definición. $(y, F(y))$ es ***punto de quiebre*** de la función $F(y)$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo h, $0 < h < \varepsilon$, $F'(y-h) \neq F'(y+h)$.

La primera de estas gráficas sólo tiene un ***punto de quiebre*** y los segmentos que forman la misma corresponden a los renglones 2 y 1 de la matriz A, en ese orden, mientras que para la segunda gráfica se

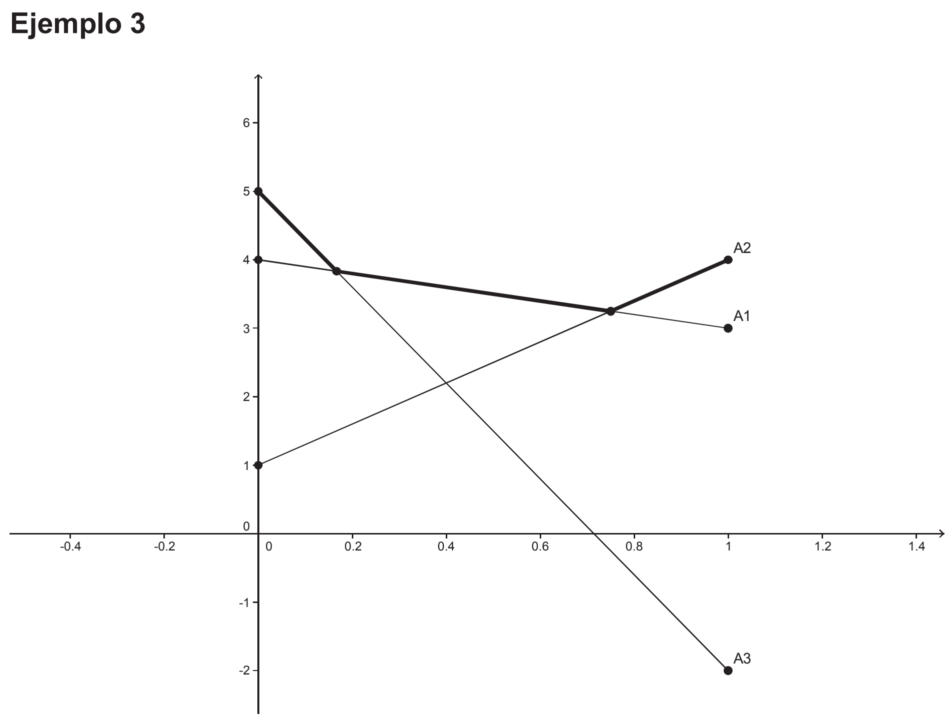

Figura 2:

tienen dos ***puntos de quiebre***, siendo los segmentos que conforman esta gráfica los asociados a los renglones 3, 1, y 2, en este orden, de la correspondiente matriz A. Naturalmente, existen casos en que la gráfica de $F(y_1^*)$ no tiene ningún ***punto de quiebre***, lo cual sucede cuando la matriz A posee una estrategia que domina a todas las demás. Habiendo ilustrado lo que se entiende aquí como ***punto de quiebre***, se procede a la presentación del algoritmo.

Algoritmo EquiNash

(0) Dadas las matrices A y B para un juego bimatricial, se obtiene la gráfica de la función

$$F(y_1^*) = \max_{i=1,\ldots,m} [(A_i^1 - A_i^2)y_1^* + A_i^2]$$

en el intervalo [0,1]. Denotando $(y_1^*)_1, (y_1^*)_2, \ldots, (y_1^*)_q$ las abscisas de los q ***puntos de quiebre*** de la gráfica, y definiendo $(y_1^*)_0 = 0, (y_1^*)_{q+1} = 1$, se denota por i_k al índice del renglón de la matriz A que corresponde al segmento de la gráfica que se encuentra entre $(y_1^*)_{k-1}$ y $(y_1^*)_k$ para todo valor de k desde 1 hasta $q+1$. Ir al paso (1).

(1) Se analiza lo que se tiene en $y_1^* = 0$. De acuerdo con la gráfica, la estrategia óptima para el jugador I es x^* definida como $x_{i_1}^* = 1$, $x_j^* = 0$,

$j \neq i_1$. De acuerdo con los argumentos presentados para el Caso 1 en la sección 2, la estrategia de II depende del signo de $x^*(B^1 - B^2)$, es decir, del signo de $(B^1_{i_1} - B^2_{i_1})$:

a) $(B^1_{i_1} - B^2_{i_1}) > 0$ No es equilibrio ($y^*_1 = 0$ no es óptimo)

b) $(B^1_{i_1} - B^2_{i_1}) < 0$ Equilibrio (x^*, y^*) con $y^* = (0, 1)$

c) $(B^1_{i_1} - B^2_{i_1}) = 0$ Equilibrio (x^*, y^*) con $y^* = (0, 1)$

Para valores en el intervalo $[(y^*_1)_0, (y^*_1)_1]$, solamente en el caso c) existirán equilibrios (x^*, y^*), una infinidad de ellos, con $y^* = (y^*_1, 1-y^*_1)$ para todo valor de y^*_1 en dicho intervalo. Establecer $k = 1$ e ir al paso (2).

(2) Si $k > q$ ir directo al paso (3), si no, analizar lo que se tiene en $(y^*_1)_k$. Ahora, de acuerdo con los argumentos presentados para el Caso 2 en la sección 2, existe una infinidad de posibles valores de x^*, y se deberá escoger el que satisfaga $x^*(B^1 - B^2) = 0$, utilizando únicamente 2 componentes no nulas, las asociadas a los índices i_k e i_{k+1}; examinando los valores en la matriz B se tiene que:

a) $(B^1_{i_k} - B^2_{i_k})(B^1_{i_{k+1}} - B^2_{i_{k+1}}) > 0$ No es equilibrio ($y^*_1 = (y^*_1)_k$ no es óptimo)

b) $(B^1_{i_k} - B^2_{i_k})(B^1_{i_{k+1}} - B^2_{i_{k+1}}) < 0$ Equilibrio (x^*, y^*) utilizando

$$\begin{aligned} y^* &= ((y^*_1)_k, 1 - (y^*_1)_k) \\ x^*_{i_k} &= \frac{(B^2_{k+1} - B^1_{k+1})}{(B^1_k - B^2_k + B^2_{k+1} - B^1_{k+1})}\,, \\ x^*_{i_{k+1}} &= 1 - x^*_{i_k},\ x^*_j = 0,\ j \neq i_k,\ i_{k+1} \end{aligned}$$

Para valores en el intervalo $[(y^*_1)_k, (y^*_1)_{k+1}]$, solamente cuando se tenga $(B^1_{i_k} - B^2_{i_k})(B^1_{i_{k+1}} - B^2_{i_{k+1}}) = 0$ existirán equilibrios (x^*, y^*), una infinidad de ellos, con $y^* = (y^*_1, 1 - y^*_1)$ para todo valor de y^*_1 en dicho intervalo. Incrementar 1 a k y repetir el paso (2).

(3) Se analiza lo que se tiene en $y^*_1 = 1$. De acuerdo con la gráfica, la estrategia óptima para el jugador I es x^* definida como

$$x^*_{i_{q+1}} = 1,\ x^*_j = 0,\ j \neq i_{q+1}.$$

Una vez más, de acuerdo con los argumentos presentados para el Caso 1 en la sección 2, la estrategia de II depende del signo de $x^*(B^1 - B^2)$, es decir, del signo de $(B^1_{q+1} - B^2_{q+1})$:

a) $(B^1_{q+1} - B^2_{q+1}) < 0$ No es equilibrio ($y^*_1 = 1$ no es óptimo)

b) $(B^1_{q+1} - B^2_{q+1}) > 0$ Equilibrio (x^*, y^*) con $y^* = (1, 0)$ **Terminar.**

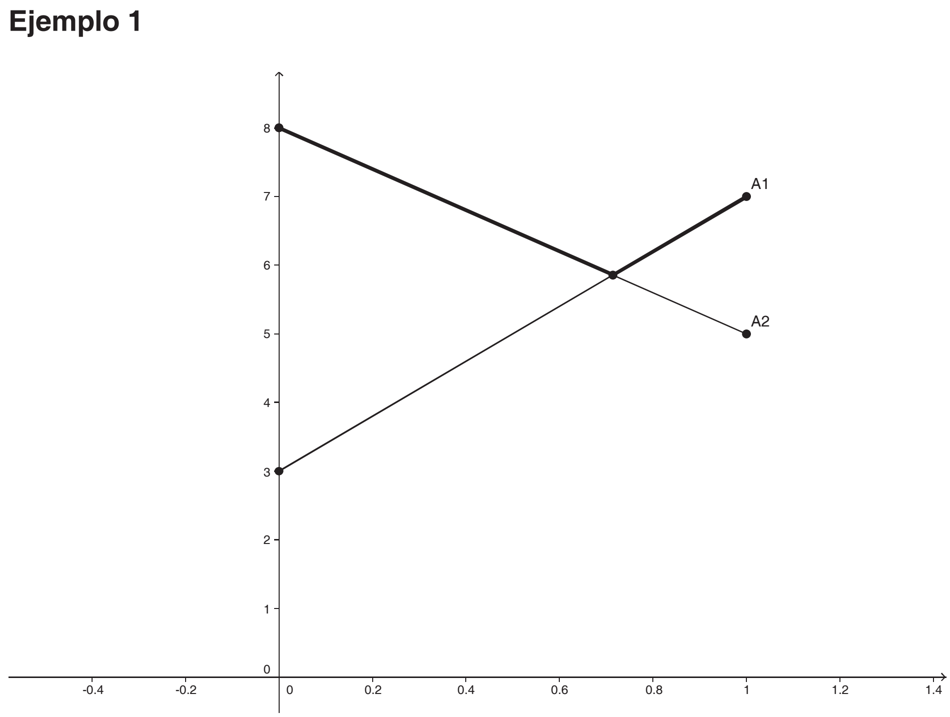

Figura 3:

4. Ejemplos de aplicación

Se aplicará el algoritmo EquiNash a los ejemplos 1 y 3 presentados en la sección 1 de este artículo, por lo que se reproduce la información en este punto para facilitar el análisis.

Ejemplo 1.

$$\begin{pmatrix} (7,4) & (3,1) \\ (5,2) & (8,6) \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\ 2\ equilibrios.$$

El número de equilibrios de Nash mencionado aquí corresponde a equilibrios utilizando únicamente estrategias puras, los que pueden descubrirse muy simplemente calculando el máximo en cada columna de A, y verificando si en la posición correspondiente en la matriz B se tiene un máximo en el renglón.

(0) Para iniciar, se obtiene la gráfica de $F(y_1^*)$, que ya se presentó en la página 33, y que se reproduce en la figura 3.

Hay un ***punto de quiebre***, por lo que $q = 1$, y los índices de los renglones de A son $i_1 = 2, i_2 = 1$. Se va al paso (1).

(1) En $y_1^* = 0$ se satisface la condición b), $(B_2^1 - B_2^2) \equiv (2-6) < 0$, por lo que ya se tiene un equilibrio (x^*, y^*) con $y^* = (0,1)$ y $x^* = (0,1)$; se establece $k = 1$ y se va al paso (2).

(2) Analizando el siguiente ***punto de quiebre*** $(y_1^*)_1$, se ve que se satisface la condición $(B_2^1 - B_2^2)(B_1^1 - B_1^2) \equiv (2-6)(4-1) < 0$, es decir, se tiene un cambio de signo en las diferencias asociadas a los segmentos que se cruzan en $(y_1^*)_1$, por lo que se ha encontrado otro equilibrio (x^*, y^*) con

$$x_2^* = \frac{(B_1^2 - B_1^1)}{(B_2^1 - B_2^2 + B_1^2 - B_1^1)} \equiv \frac{1-4}{2-6+1-4} = \frac{3}{7}\ ,$$
$$x_1^* = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7},$$

y obteniendo la abscisa del ***punto de quiebre***, $y^* = (\frac{5}{7}, \frac{2}{7})$. Se incrementa el valor de k en 1, por lo que se tiene $k = 2$, y como ya es mayor que q, en lugar de repetir el paso (2) se va al paso (3).

(3) Para el último valor, $y_1^* = 1$, se observa que se satisface la condición $(B_1^1 - B_1^2) \equiv (4-1) > 0$, por lo que se tiene otro punto de equilibrio (x^*, y^*) con $x^* = (1,0)$ junto con $y^* = (1,0)$. **Terminar.**

Las diferencias $(B_{i_k}^1 - B_{i_k}^2)$, $k = 1, ..., q+1$ resultan fundamentales para determinar si existen equilibrios asociados a los ***puntos de quiebre***, ya que solamente cuando se tiene un cambio de signo entre dos diferencias consecutivas, la del segmento previo y la del que le sigue, y solamente así, se afirma la existencia de un equilibrio. Además, podrá haber un número infinito de equilibrios asociados a un intervalo entre dos ***puntos de quiebre***, solamente cuando la diferencia correspondiente sea nula, por lo que no los hubo en este ejemplo.

Ejemplo 3.

$$\begin{pmatrix} (3,9) & (4,-1) \\ (4,2) & (1,8) \\ (-2,1) & (5,0) \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{ninguno.}$$

El número de equilibrios de Nash mencionado aquí corresponde, como en el ejemplo anterior, a equilibrios utilizando únicamente estrategias puras. Mediante la aplicación del algoritmo se encontrarán todos los equilibrios, incluyendo aquellos en estrategias mixtas.

(0) Para iniciar, se obtiene la gráfica de $F(y_1^*)$, que ya se presentó en la página 34, y que se reproduce en la figura 4.

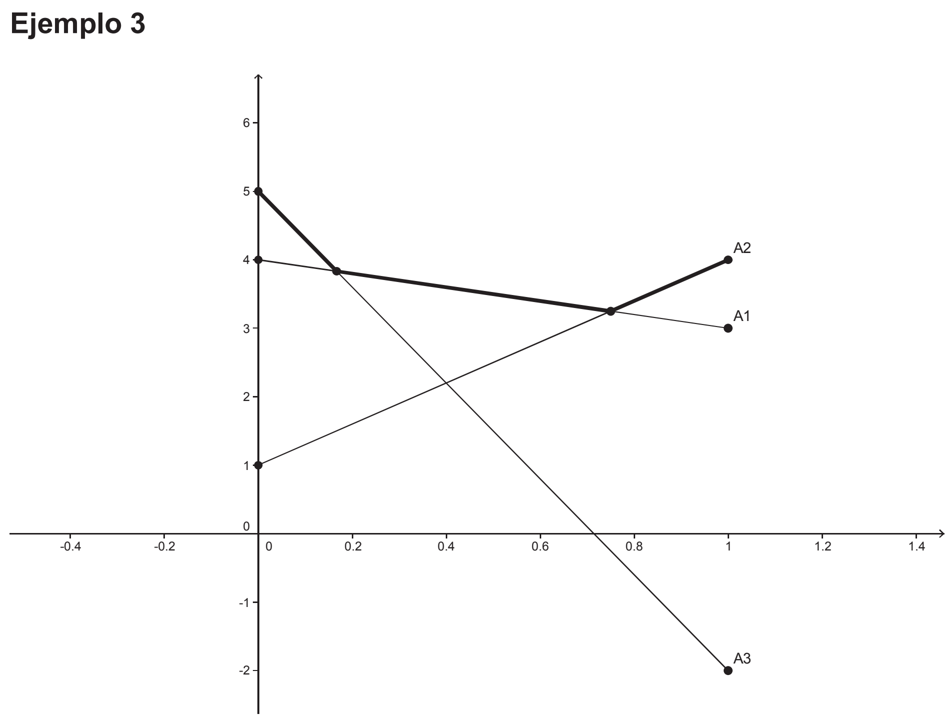

Figura 4:

Hay dos ***puntos de quiebre***, por lo que $q = 2$, y los índices de los renglones de A son $i_1 = 3,\ i_2 = 1,\ i_3 = 2$. Se va al paso (1).

(1) En $y_1^* = 0$ se tiene $(B_3^1 - B_3^2) \equiv (1 - 0) > 0$, por lo que no hay equilibrio asociado a este punto; se establece $k = 1$ y se va al paso (2).

(2) Analizando el siguiente ***punto de quiebre*** $(y_1^*)_1$, se ve que se satisface la condición $(B_3^1 - B_3^2)(B_1^1 - B_1^2) \equiv (1 - 0)(9 - (-1)) > 0$, es decir, no se tiene un cambio de signo en las diferencias asociadas a los segmentos que se cruzan en $(y_1^*)_1$, por lo que tampoco está asociado a un equilibrio. Se incrementa el valor de k en 1, por lo que se tiene $k = 2$, y se repite el paso (2).

(2) Analizando el siguiente ***punto de quiebre*** $(y_1^*)_2$ se ve que se satisface la condición $(B_1^1 - B_1^2)(B_2^1 - B_2^2) \equiv (9 - (-1))(2 - 8) < 0$; ahora sí hay un cambio de signo, y ya se tiene un equilibrio (x^*, y^*) con:

$$x_1^* = \frac{(B_2^2 - B_2^1)}{(B_1^1 - B_1^2 + B_2^2 - B_2^1)} \equiv \frac{8 - 2}{9 - (-1) + 8 - 2} = \frac{3}{8}\ ,$$

$$x_2^* = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8},\ x_3^* = 0$$

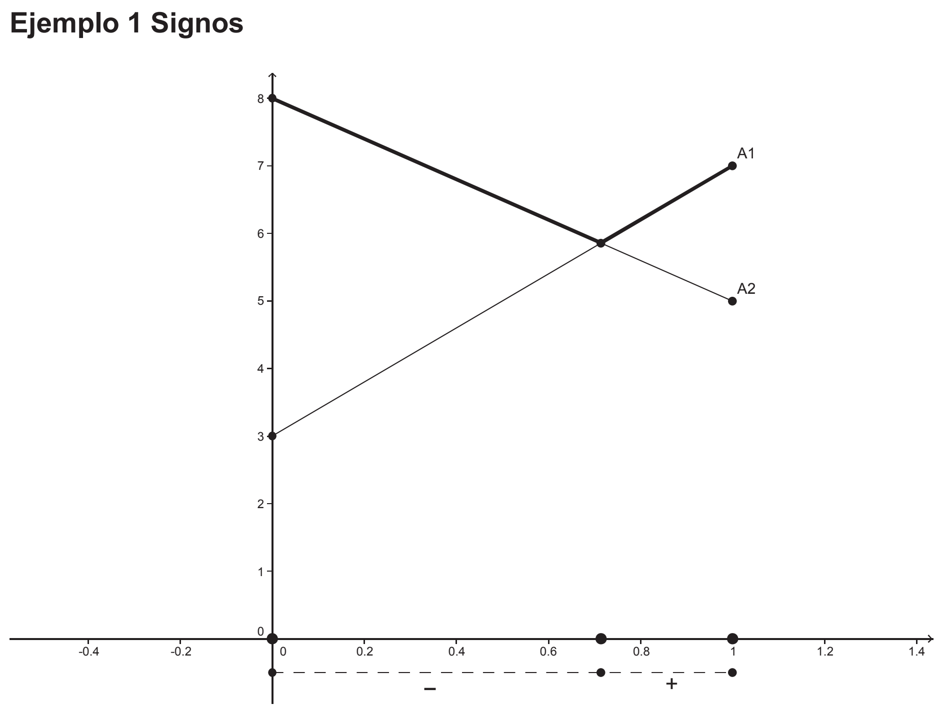

Figura 5:

y obteniendo la abscisa del ***punto de quiebre***, $y^* = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$. Se incrementa el valor de k en 1, por lo que se tiene $k = 3$, y como ya es mayor que q, en lugar de repetir el paso (2) se va al paso (3).

(3) Para el último valor, $y_1^* = 1$, se observa que se satisface la condición $(B_2^1 - B_2^2) \equiv (2 - 8) < 0$, por lo que este punto tampoco corresponde a un equilibrio. **Terminar.**

Es de gran interés darse cuenta que, como se aprecia en estos ejemplos, **no** se hace necesario determinar las coordenadas para todos los ***puntos de quiebre*** de manera explícita, ya que **solamente** algunos de ellos, quizá ninguno, corresponden a equilibrios de Nash. Además, será de gran utilidad añadir a la gráfica de $F(y_1^*)$ una indicación, sobre el eje de las abscisas, acerca del signo de las diferencias $(B_{i_k}^1 - B_{i_k}^2),\ k = 1, ..., q+1$, es decir, para cada uno de los segmentos correspondientes, ya que ahí mismo se podrán visualizar todos los puntos asociados a los equilibrios buscados. Ilustrando con los ejemplos dados:

El algoritmo EquiNash podría reinterpretarse, de manera condensada, en la gráfica representada en la figura 5: dado que el primer signo es **-** hay un equilibrio asociado a $y_1^* = 0$, luego, en el ***punto de quiebre***

Ejemplo 3 Signos

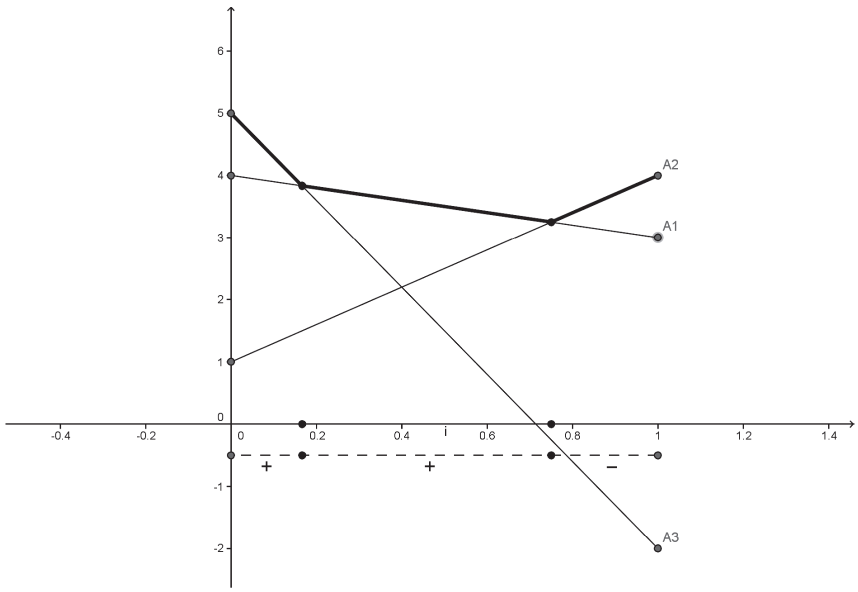

Figura 6:

se tiene un cambio de signo, por lo que también ahí le corresponde otro equilibrio, y finalmente, como el último signo es $+$, entonces existe otro equilibrio más asociado a $y_1^* = 1$.

Para el otro ejemplo, la gráfica de la figura 6, a la cual se han añadido los signos mencionados, se presenta también.

Como el primer signo es $+$ no hay un equilibrio asociado a $y_1^* = 0$, luego, en el primer ***punto de quiebre*** no se tiene un cambio de signo, por lo que tampoco ahí le corresponde equilibrio, pero en el segundo ***punto de quiebre*** sí se tiene un cambio de signo, lo que indica la existencia del equilibrio correspondiente, y finalmente, como el último signo es **-**, entonces tampoco existe equilibrio asociado a $y_1^* = 1$.

5. Método EquiNash condensado y Teoremas

Como ha quedado ilustrado con los ejemplos anteriores, el algoritmo EquiNash se puede presentar de manera condensada utilizando la gráfica de la función $F(y_1^*)$, a la que se añaden los signos asociados a cada uno de los segmentos implícitamente definidos por los ***puntos de***

quiebre, e inscritos sobre el eje de las abscisas. Asimismo, esta versión condensada permitirá una demostración muy directa y casi trivial de los dos teoremas que se presentarán en este artículo.

Algoritmo EquiNash Condensado

(0) Dadas las matrices A y B para un juego bimatricial, se obtiene la gráfica de la función

$$F(y_1^*) = \max_{i=1,\ldots,m} [(A_i^1 - A_i^2)y_1^* + A_i^2]$$

en el intervalo [0,1]. Denotando $(y_1^*)_1, (y_1^*)_2, \ldots, (y_1^*)_q$ las abscisas de los q ***puntos de quiebre*** de la gráfica, y definiendo $(y_1^*)_0 = 0, (y_1^*)_{q+1} = 1$, se denota por i_k al índice del renglón de la matriz A que corresponde al segmento de la gráfica que se encuentra entre $(y_1^*)_{k-1}$ y $(y_1^*)_k$ para todo valor de k desde 1 hasta $q+1$. Ir al paso (1).

(1) Para cada intervalo $((y_1^*)_{k-1}, (y_1^*)_k)$ se anota, bajo el eje de las abscisas, el signo que corresponda a la diferencia $(B_{i_k}^1 - B_{i_k}^2)$ para todo valor de k desde 1 hasta $q+1$. Ir al paso (2).

(2) Si el primer signo **no** es **-** ir directamente al paso (3); en caso contrario, ya se tiene un equilibrio (x^*, y^*) donde $x_{i_1}^* = 1,\ x_j^* = 0,\ j \neq i_1$, junto con $y^* = (0,1)$; continuar al paso (3).

(3) **Para cada valor** $(y_1^*)_k$ donde ocurre un cambio de signo se obtiene un equilibrio (x^*, y^*) donde $y* = ((y_1^*)_k, 1-(y_1^*)_k)$ y las coordenadas de x^* son

$$x_{i_k}^* = \frac{(B_{k+1}^2 - B_{k+1}^1)}{(B_k^1 - B_k^2 + B_{k+1}^2 - B_{k+1}^1)}\ ,$$
$$x_{i_{k+1}}^* = 1 - x_{i_k}^*,\ x_j^* = 0\ j \neq i_k,\ i_{k+1}$$

junto con

$$(y_1^*)_k = \frac{(A_{i_{k+1}}^2 - A_{i_k}^2)}{(A_{i_k}^1 - A_{i_k}^2 + A_{i_{k+1}}^2 - A_{i_{k+1}}^1)};$$

al terminar ir al paso (4).

(4) Si el último signo **no** es **+** ir directamente al paso (5); en caso contrario, también se tiene un equilibrio (x^*, y^*) donde $x_{i_{q+1}}^* = 1,\ x_j^* = 0,\ j \neq i_{q+1}$, junto con $y^* = (1,0)$; continuar al paso (5).

(5) Si para algún valor de k se tiene $(B_{i_k}^1 - B_{i_k}^2) = 0$, entonces, a cada valor de y_1^* en el intervalo $[(y_1^*)_{k-1}, (y_1^*)_k]$ le corresponde un equilibrio (x^*, y^*) dado por $x_{i_k}^* = 1,\ x_j^* = 0,\ j \neq i_k$ junto con $y^* = (y_1^*, 1-y_1^*)$, es decir, una infinidad de equilibrios; **Terminar.**

Aplicando esta versión del algoritmo EquiNash a cualquier juego bimatricial donde al menos uno de los jugadores dispone únicamente de 2 estrategias es muy fácil obtener la demostración de los 2 teoremas siguientes.

Teorema 1 *Sea (A, B) cualquier juego bimatricial tal que la dimensión de las matrices de pago A y B sea $m \times 2$. Entonces existe un equilibrio de Nash (x^*, y^*), al menos uno.*

Demostración: *Aplicando los pasos (0) y (1) del algoritmo Equi-Nash Condensado, se obtiene la gráfica con los signos bajo el eje de las abscisas. Se tienen entonces 4 posibilidades:*

a) existe al menos un cambio de signo. Si éste ocurre para $(y_1^*)_k$ entonces aplicando el paso (3) se obtiene el equilibrio (x^*, y^*) correspondiente.

b) todos los signos son **-**. *Aplicando el paso (2) se obtiene el equilibrio (x^*, y^*) correspondiente, en este caso, en estrategias puras.*

c) todos los signos son $+$. *Aplicando el paso (4) se obtiene el equilibrio (x^*, y^*) correspondiente, en este caso, también en estrategias puras.*

d) al menos una diferencia $(B_{i_k}^1 - B_{i_k}^2)$ es igual a cero, es decir, no hay signos **-** *ni signos* $+$. *De acuerdo al paso (5) existe una infinidad de equilibrios.*

Teorema 2 *Sea (A, B) cualquier juego bimatricial tal que la dimensión de las matrices de pago A y B sea $m \times 2$. Entonces el número de equilibrios de Nash, si tal número es finito, es impar.*

Demostración: *Aplicando los pasos (0) y (1) del algoritmo Equi-Nash Condensado, se obtiene la gráfica con los signos bajo el eje de las abscisas. Denominando s al número de cambios de signo en la secuencia de los signos de la gráfica, y que corresponden uno a uno con equilibrios de Nash, al aplicar el paso (3), se tienen 2 posibilidades:*

a) s es par. En este caso la secuencia de signos empieza y termina con el mismo signo; si el signo inicial y final es **-**, *entonces únicamente se tendrá un equilibrio adicional, al inicio, según el paso (2), y si este signo es* $+$, *el único equilibrio adicional estará al final, según el paso (4), por lo que el número total de equilibrios será $s + 1$, es decir, un número impar.*

b) s es impar. En este caso la secuencia de signos empieza y termina con signos diferentes; si empieza en **-** *y termina en* $+$, *entonces habrá 2 puntos de equilibrio adicionales, uno al inicio y otro al final, por lo que el número total de equilibrios será $s + 2$, es decir, un número impar. Y en el caso que la secuencia empiece en* $+$ *y termine en* **-**, *no habrá equilibrios adicionales, por lo que el total seguirá siendo s, es decir, impar.*

6. Conclusiones

El algoritmo presentado en este artículo permite calcular todos los equilibrios de Nash para cualquier juego bimatricial de dimensión $m \times 2$ o $2 \times n$, es decir, cuando el número de columnas ó de renglones de las matrices de pago asociadas sea igual a 2.

Se utiliza una gráfica, que corresponde en parte a la que se usa para representar el mejor pago esperado para el jugador I en la solución de juegos rectangulares de las mismas dimensiones, añadiendo información respecto a los pagos que recibiría el jugador II en cada caso, codificada mediante signos + y - presentados bajo el eje de las abscisas.

Es esta gráfica la que permite visualizar inmediatamente el número y la ubicación de los puntos de equilibrio asociados al juego, a la vez que facilita la demostración de los dos teoremas que se proponen en este trabajo, el primero de los cuales asegura la existencia de un equilibrio de Nash, al menos uno, para cualquier juego bimatricial con la dimensión especificada.

Finalmente, es importante señalar que se trata de un algoritmo que permite calcular los puntos de equilibrio de manera directa, sin recurrir a iteraciones ni a aproximaciones, lo que hace innecesario un mayor conocimiento de la teoría de puntos fijos, la cual sustenta la mayoría de los métodos utilizados en el caso general [3]. Consecuentemente, es muy simple utilizar cualquier lenguaje de programación que realice la parte engorrosa del proceso, dejando al usuario únicamente la tarea de identificar los segmentos que forman la gráfica de $F(y_1^*)$.

Referencias

[1] J. Nash, *Equilibrium Points in n-Person Games, Proc. Nat. Acad. Sci.*, U.S.A. 36 (1950), 48-49.

[2] R. Tyrrell Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.

[3] P. Zapata Lillo, *Economía, política, y otros juegos. Una introducción a los juegos no cooperativos*, Facultad de Ciencias, UNAM, 2007.