Miscelánea Matemática **54** (2012) 35–49 SMM

Sobre el teorema de Rolle en dimensión infinita

Olivia Gutú

oliviagutu@mat.uson.mx

Universidad de Sonora.
Luis Encinas y Rosales s/n. 83000, Hermosillo.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, diferenciable en (a, b) con el mismo valor en los extremos. El teorema de Rolle clásico afirma que existe un punto u en (a, b) tal que $f'(u) = 0$. En el caso multivariable, la formulación directa de el teorema de Rolle no es cierta para funciones $f : \overline{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $m > 1$ donde U es abierto, conexo y acotado. Por ejemplo, la función

$$f(x, y) = (x(x^2 + y^2) - x, y(x^2 + y^2) - y),$$

es diferenciable en la bola abierta $U = \{(x, y) : \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$, continua en $\overline{U}$ y además $f(x, y) = (0, 0)$ para todo (x, y) en la frontera de U. Sin embargo, un simple cálculo es suficiente para verificar que el jacobiano es distinto de la matriz cero en todo punto de U.

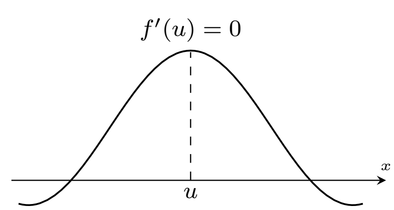

Figura 1: Ilustración del teorema de Rolle en una variable.

Para funciones con valores reales, la versión del teorema de Rolle es la siguiente: *sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, conexo y acotado, si $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ es una función continua, diferenciable en U y constante en la frontera de U, entonces existe un punto $u \in U$ donde el gradiente de f se anula.* La demostración es muy simple: la función f alcanza sus valores extremos en $\overline{U}$, por continuidad de f y compacidad de $\overline{U}$; ya que f es constante en la frontera de U, sin perder generalidad se puede suponer que el valor máximo o el mínimo se alcanza en $u \in U$. Por tanto, $\nabla f(u) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Esta última deducción resulta de reducir el problema al caso uno-dimensional al tratar cada entrada por separado [**1**, p. 304].

Para completar el cuadro finito-dimensional, resta decir que en [**15**] se presentan dos generalizaciones del teorema de Rolle para funciones con valores vectoriales $f : \overline{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, añadiendo ciertas condiciones si $m > 1$. Este trabajo termina con la conjetura de que los resultados expuestos no deben permanecer válidos en dominios infinito-dimensionales, ni siquiera para $m = 1$. El lector algo familiarizado con este tipo de espacios habrá notado que los argumentos que se han presentado al comienzo del párrafo anterior no funcionan en este caso, ya que en dimensión infinita «cerrado y acotado no implica compacto». Otras versiones del teorema de Rolle en dimensión finita se pueden encontrar en [**21**, **24**, **19**] y en [**23**].

El propósito de este escrito es ofrecer al lector una introducción a la llamada geometría de espacios normados a través de una exposición sobre la falla en el teorema de Rolle en espacios de dimensión infinita. El resto del artículo se divide en tres secciones. En la primera se establecen los conceptos elementales de la diferenciabilidad en espacios normados. La segunda sección comienza con un ejemplo concreto donde el teorema de Rolle falla y a partir de él se deduce una condición general sobre los espacios donde el teorema de Rolle no se satisface. Finalmente en la tercera sección se presenta una caracterización de dichos espacios.

1. Cálculo en dimensión infinita

Antes de continuar es necesario describir con precisión el contexto natural del teorema de Rolle en dimensión infinita. En lo que sigue, se van a considerar funciones $f : E \to \mathbb{R}$, donde E es un *espacio de Banach real de dimensión infinita*, es decir, un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ normado y completo, tal que no existe ningún conjunto finito de vectores linealmente independiente que lo generan. Un espacio vectorial normado es *completo* si toda sucesión de Cauchy converge. Si la norma $\|\cdot\|$ de un espacio de Banach E proviene de un producto interno, esto es, para todo $x \in E$:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en E, entonces se dice que E es un espacio de *Hilbert*.

Espacio	Tipo de vector	Condición	Norma
c_{00}	$(x_i)_{i=1}^{\infty}$	$\{i : x_i \neq 0\}$ es finito	$\\|x\\|_\infty = \text{máx}_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|$
c_0	$(x_i)_{i=1}^{\infty}$	$\text{lím}_{i\to\infty}\{x_i\} = 0$	$\\|x\\|_\infty = \text{máx}_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|$
ℓ_p, $p \in [1,\infty)$	$(x_i)_{i=1}^{\infty}$	$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p < \infty$	$\\|x\\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$
ℓ_∞	$(x_i)_{i=1}^{\infty}$	$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es acotada	$\\|x\\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|$
$c_{00}(\Gamma)$	$x : \Gamma \to \mathbb{R}$	$\text{supp}(x) = \{\gamma : x(\gamma) \neq 0\}$ es finito	$\\|x\\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma} \|x(\gamma)\|$
$c_0(\Gamma)$	$x : \Gamma \to \mathbb{R}$	$\{\gamma : \|x(\gamma)\| \geq \epsilon\}$ es finito, $\forall\epsilon > 0$	$\\|x\\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma} \|x(\gamma)\|$
$\ell_p(\Gamma)$, $p \in [1,\infty)$	$x : \Gamma \to \mathbb{R}$	$\sum_{\gamma\in\Gamma} \|x(\gamma)\|^p < \infty$	$\\|x\\|_p = (\sum_{\gamma\in\Gamma} \|x(\gamma)\|^p)^{\frac{1}{p}}$
$\ell_\infty(\Gamma)$	$x : \Gamma \to \mathbb{R}$	x es acotada	$\\|x\\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma} \|x(\gamma)\|$

Cuadro 1: El espacio c_{00} es un espacio vectorial normado de dimensión infinita pero no es de Banach, todos los demás sí son espacios de Banach. El símbolo Γ denota a un conjunto cualquiera. La suma $\sum_{\gamma\in\Gamma} |x(\gamma)|^p$ se define como el $\sup_F \sum_{\gamma\in F} |x(\gamma)|^p$ donde F recorre a todos los subconjuntos finitos de Γ. Se cumple que $c_{00}(\mathbb{N}) = c_{00}$, $c_0(\mathbb{N}) = c_0$ y $\ell_p(\mathbb{N}) = \ell_p$, $p \in [0,\infty]$, [**17**, p. 5 ss.].

Un ejemplo importante de espacio de Hilbert de dimensión infinita es el espacio ℓ_2 (real) definido como el conjunto de sucesiones con valores reales

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

tales que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$, con la norma proveniente del producto interno $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$, esto es:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}. \tag{1}$$

En el cuadro 1 se presentan otros ejemplos de espacios de Banach donde los vectores son también sucesiones pero con distintas normas.

En dimensión finita –para fines del teorema de Rolle– no tiene mucho sentido pensar en términos más generales de espacios vectoriales, basta considerar a $\mathbb{R}^n$ con la norma euclidiana, de hecho, es bien sabido que todos los espacios vectoriales n-dimensionales reales son isomorfos a $\mathbb{R}^n$, todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes y además la derivada de una función es invariante bajo normas equivalentes, ver [**2**, p. 55] y también [**8**, p. 16 y p. 27].

En lo que sigue, E representa a un espacio de Banach real con norma $\|\cdot\|$ y U a un abierto de E. Se dice que una función $f : U \to \mathbb{R}$ es

Fréchet diferenciable en $u \in U$ si existe una transformación lineal y continua $T_u : E \to \mathbb{R}$ y una función continua real $E(u,h)$ tal que:

$$f(u+h) - f(u) = T_u(h) + \|h\| E(u,h) \tag{2}$$

para $\|h\| < r$, donde $E(u,h) \to 0$ cuando $\|h\| \to 0$. A T_u se le llama *derivada total o derivada Fréchet* de f en u, en caso de existir es única y se denota por $f'(u)$. Esta definición se extiende naturalmente a funciones con imagen en un espacio de Banach F. En este caso, $f'(u)$ es una transformación lineal y continua de E en F. Este concepto fue originalmente establecido por M. Fréchet en [**13**].[1]

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable en u, $f'(u)$ está dada simplemente por el gradiente de f en u, esto es, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ [**1**, p. 258 ss.]:

$$f'(u)(x) = \nabla f(u) \cdot x.$$

Más aún, si f es un campo vectorial Fréchet diferenciable entonces $f'(u)$ es la transformación lineal asociada a la matriz jacobiana de f en u [**1**, p. 270 ss.]. No obstante, pueden existir el gradiente o la matriz jacobiana de una función en un punto pero la derivada Fréchet no. Un ejemplo común en la literatura es $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Para esta función existe el gradiente $\nabla f(0,0) = (0,0)$ y sin embargo no existe $f'(0,0)$ [**9**, p. 47].

Una propiedad fundamental de la derivada Fréchet es que satisface la regla de la cadena [**8**, p. 27], esto es: si f es Fréchet diferenciable en u, g es Fréchet diferenciable en $f(u)$ y además $h = g \circ f$ está definida en un entorno de u entonces la función h es también Fréchet diferenciable y

$$h'(u) = g'(f(u)) \circ f'(u).$$

A continuación se presentan algunos ejemplos sobre la derivada Fréchet de particular interés para los fines de este artículo.

1. Sea T una transformación lineal entre dos espacios de Banach E y F. Es fácil calcular:

$$T'(u)(x) = T(x).$$

[1] Una definición equivalente es la siguiente. La función f es Fréchet diferenciable en u si existe una transformación lineal y continua $f'(u)$ tal que

$$f'(u)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(u+tx) - f(u)}{t},$$

para todo x en E y además el límite es uniforme para todo x de norma 1 [**6**, p. 83]. Como comentario adicional, si el límite anterior existe para todo x, pero no necesariamente de manera uniforme sobre el conjunto de vectores de norma 1, se dice que f es Gâteaux diferenciable [**16**].

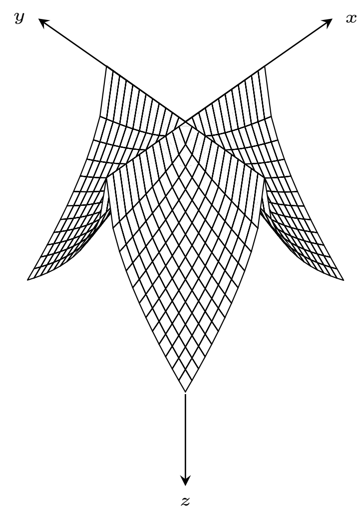

Figura 2: Gráfica de la función $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ puesta «boca abajo».

En este caso, la ecuación (2) se satisface con $E(u,h) = 0$.

2. Si H es un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces la aplicación bilineal $f : H \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \langle x, x \rangle$ es Fréchet diferenciable para todo $u \in H$. De hecho, por las propiedades algebráicas del producto interno, para todo h y u en H:
$$\langle u+h, u+h \rangle - \langle u, u \rangle = 2\langle u, h \rangle + \|h\|^2.$$
Por tanto,
$$f'(u)(x) = 2\langle x, u \rangle.$$
En particular esto prueba que la aplicación $\rho(x) = \|x\|_2$ es Fréchet diferenciable fuera del origen, para cualquier espacio de Hilbert. De hecho, por la regla de la cadena, para todo $u \neq 0$,
$$\rho'(u)(x) = \frac{1}{\|u\|_2} \langle x, u \rangle.$$
3. Es el turno de la norma de ℓ_1, definida para $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell_1$ por
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|.$$

Un hecho interesante es que la función $x \mapsto \|x\|_1$ no es Fréchet diferenciable en cada punto u de ℓ_1. Para argumentar esta afirmación se razona por contradicción. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $u \in \ell_1$ tiene norma 1. De la definición de derivada Fréchet se concluye que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|u + h\|_1 + \|u - h\|_1 \leq 2 + \epsilon\|h\|_1, \tag{3}$$

si $\|h\|_1 < \delta$. Sea $\epsilon < \frac{1}{2}$ fijo y el $\delta > 0$ correspondiente a ϵ. Como $u \in \ell_1$, existe un índice i tal que $|u_i| < \frac{\delta}{8}$. Sea $h = \frac{\delta}{2}e_i$ donde

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\substack{\uparrow \\ \text{lugar } i}}, 0, \dots).$$

Se puede verificar que $|u_i + \frac{\delta}{2}| > |u_i| + \frac{\delta}{4}$ y $|u_i - \frac{\delta}{2}| > |u_i| + \frac{\delta}{4}$. Por tanto, $\|u + h\|_1 > 1 + \frac{\delta}{4}$ y $\|u - h\|_1 > 1 + \frac{\delta}{4}$. Ya que $\|h\|_1 = \frac{\delta}{2}$, entonces por (3) se llega a la contradicción $\frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{4}$.

4. El último ejemplo concierne a la norma de ℓ_∞, definida para cada vector $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell_\infty$ por

$$\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|.$$

Se puede comprobar sin mucha dificultad que la función $x \mapsto \|x\|_\infty$ es Fréchet diferenciable en los puntos e_i, $i = 1, 2, 3\dots$, definidos como en el ejemplo anterior. De hecho, esta aplicación es Fréchet diferenciable en un conjunto denso de ℓ_∞ [**17**, p. 105]. Sin embargo, no es Fréchet diferenciable en $u = (1, 1, 1, \dots)$. Los argumentos para comprobar esta afirmación son muy parecidos a los empleados en el tercer ejemplo. Se razona igualmente por el absurdo. Dado $\epsilon < 1$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|u + h\|_\infty + \|u - h\|_\infty \leq 2 + \epsilon\|h\|_\infty \tag{4}$$

si $\|h\|_\infty < \delta$. Sea $h = (\delta, -\delta, 0, 0, \dots)$. Por tanto,

$$\|u + h\|_\infty = \|u - h\|_\infty = \text{máx}\{|1 + \delta|, |1 - \delta|, 1\} = 1 + \delta.$$

Luego, por (4) se llega a la contradicción $2 < 1$.

En la siguiente sección se establece la conexión con el asunto de la diferenciabilidad de una norma fuera del origen y la falla del teorema de Rolle en dimensión infinita.

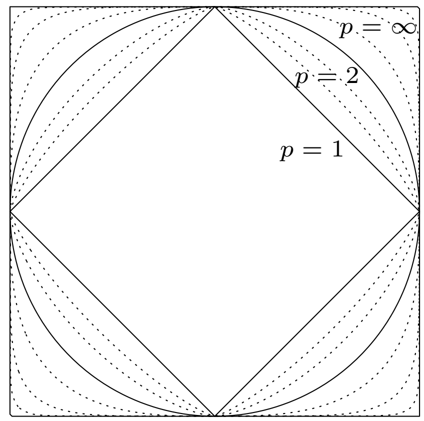

Figura 3: Ilustración de las esferas $S_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^p + y^p = 1\}$, para $p = 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 2, 3, 10, 20$ y $S_\infty = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{máx}(|x|, |y|) = 1\}$.

Para concluir esta sección y con el propósito de dejar al lector una idea de lo que pasa con otros teoremas clásicos del cálculo diferencial en el contexto infinito-dimensional, se ha de mencionar que el teorema del valor medio para funciones con valores reales se satisface independientemente de la dimensión [**14**, p. 845]. Si f toma valores en un espacio de Banach F, con un poco de más trabajo se obtiene una «desigualdad del valor medio» en analogía al caso finito-dimensional [**8**, p. 37 ss.]. Por otro lado, el teorema de la función inversa y el teorema de la función implícita se satisfacen en dimensión infinita y la demostración es básicamente la misma que en dimensión finita [**8**, p. 51 y p. 56]. Ambos teoremas involucran a funciones de clase C^1 esto es, funciones diferenciables con derivada continua. En la siguiente sección se verá que en general el teorema de Rolle falla incluso para funciones de clase C^1.

2. Falla del teorema de Rolle

Ha llegado el momento de entrar de lleno al asunto de la falla del teorema de Rolle en dimensión infinita. Al parecer, el primer trabajo que aparece en la literatura al respecto corresponde a Shkarin [**22**] donde se prueba que el teorema de Rolle falla para ciertos espacios cuya norma es diferenciable fuera del origen. Después del resultado de Shkarin, en [**12**] aparece una demostración elemental de que el teorema de Rolle falla en ℓ_2, a continuación se da el bosquejo de esta prueba.

Espacio	Tipo de vector	Condición	Norma
c_{00}	$(x_i)_{i=1}^{\infty}$	$\{i : x_i \neq 0\}$ es finito	$\|x\|_\infty = \text{máx}_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|$
c_0	$(x_i)_{i=1}^{\infty}$	$\text{lím}_{i\to\infty} x_i = 0$	$\|x\|_\infty = \text{máx}_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|$
ℓ_p, $p \in [1,\infty)$	$(x_i)_{i=1}^{\infty}$	$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p < \infty$	$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$
ℓ_∞	$(x_i)_{i=1}^{\infty}$	$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es acotada	$\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|$
$c_{00}(\Gamma)$	$x : \Gamma \to \mathbb{R}$	$\text{supp}(x) = \{\gamma : x(\gamma) \neq 0\}$ es finito	$\|x\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma} \|x(\gamma)\|$
$c_0(\Gamma)$	$x : \Gamma \to \mathbb{R}$	$\{\gamma : \|x(\gamma)\| \geq \epsilon\}$ es finito, $\forall \epsilon > 0$	$\|x\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma} \|x(\gamma)\|$
$\ell_p(\Gamma)$, $p \in [1,\infty)$	$x : \Gamma \to \mathbb{R}$	$\sum_{\gamma\in\Gamma} \|x(\gamma)\|^p < \infty$	$\|x\|_p = (\sum_{\gamma\in\Gamma} \|x(\gamma)\|^p)^{\frac{1}{p}}$
$\ell_\infty(\Gamma)$	$x : \Gamma \to \mathbb{R}$	x es acotada	$\|x\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma} \|x(\gamma)\|$

Figura 4: Clasificación de espacios de Banach con ejemplos. En ésta figura el símbolo Γ representa a un conjunto cualquiera no numerable. Las demostraciones de todas las afirmaciones que se representan en la figura se pueden encontrar en los primeros capítulos de [**17**].

Sean

$$\begin{aligned} R(x) &= (0, x_1, x_2, x_3, \cdots), \\ L(x) &= (x_2, x_3, x_4, x_5 \dots) \end{aligned}$$

transformaciones lineales definidas para cada $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell_2$ y sea $g : \ell_2 \to \ell_2$ la función

$$g(x) = \left(\frac{1}{2} - \|x\|^2\right) e_1 + R(x).$$

Naturalmente, e_1 representa al vector $(1, 0, 0, \cdots)$. Para simplificar notación, en lo que sigue se usa $\|\cdot\|$ para denotar a la norma $\|\cdot\|_2$ definida en (1). Considere ahora la función $f : \ell_2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - g(x)\|^2}. \tag{5}$$

Sin mucha dificultad se puede verificar que la aplicación g no tiene puntos fijos, por tanto, f es una función continua en ℓ_2 que además se anula en los puntos de norma 1. Note que en dimensión finita no se puede definir una función análoga a g, ya que esta se establece a través del operador T el cual «mueve» una coordenada a todo x y para ello se precisan infinitas coordenadas. Sea

$$B = \{x \in \ell_2 : \|x\| < 1\}.$$

Como se había visto en la sección anterior la función $x \to \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ es Fréchet diferenciable y ya que R es una transformación lineal y continua, g también es Fréchet diferenciable en todo ℓ_2 con derivada en u dada por

$$g'(u)(x) = -2\langle u, x\rangle e_1 + R(x).$$

La derivada del cociente y la regla de la cadena llevan a concluir que f es Fréchet diferenciable en todo ℓ_2 y en particular en B. Además, permiten el cálculo preciso de su derivada en $u \in B$. De hecho, tomando en cuenta que $\langle g(u), e_1\rangle = \frac{1}{2} - \|u\|^2$, $\langle u, R(x)\rangle = \langle L(u), x\rangle$ y $L(g(u)) = u$ se concluye que

$$f'(u)(x) = -2\frac{\langle \alpha u - \beta(L(u) + g(u)), x\rangle}{\|u - g(u)\|^4} \tag{6}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= \|u - g(u)\|^2 + \beta(1 + 2u_1 + 2\|u\|^2), \\ \beta &= 1 - \|u\|^2. \end{aligned}$$

Se supone ahora que $f'(u) = 0$ para algún $u \in B$, esto es, $f'(u)$ es la transformación lineal que satisface $f'(u)(x) = 0 \in \mathbb{R}$, para todo $x \in \ell_2$. Por la ecuación (6),

$$\sigma u - L(u) - g(u) = 0,$$

donde $\sigma = \frac{\alpha}{\beta}$. Aplicando la transformación lineal L de ambos lados de la igualdad anterior se llega a la ecuación

$$u = \sigma L(u) - L^2(u),$$

la cual define la sucesión recurrente

$$u_n = \sigma u_{n+1} - u_{n+2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

El polinomio característico asociado a esta sucesión es $t^2 - \sigma t + 1 = 0$. Finalmente, se concluye la prueba después del análisis de las posibles soluciones de la sucesión recurrente. Estas se establecen en función del signo del discriminante del polinomio, llegando a una contradicción en los tres casos. Se recomienda al lector remitirse al artículo original para ver los detalles.

Con el fin de simplificar la exposición, en lo que sigue se consideran espacios de Banach *separables*. Un espacio de Banach es separable si existe una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de vectores en E densa en E con la topología de la norma (ver figura 4). Evidentemente, el espacio $\mathbb{R}^n$ dotado de cualquier norma es separable, así que este concepto cobra importancia en espacios de dimensión infinita. La separabilidad nos permite que ciertas manipulaciones basten hacerlas sobre un conjunto numerable en lugar de considerar a todo el espacio. Por ejemplo, se sabe que si H es un espacio de Hilbert separable con producto interno $\langle\!\langle \cdot,\cdot \rangle\!\rangle$, entonces admite una base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ y para cada $x \in H$ se cumple que:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle\!\langle x, e_i \rangle\!\rangle e_i, \tag{7}$$

en analogía a $\mathbb{R}^n$ [**17**, p. 16].

A partir del ejemplo en ℓ_2 es fácil construir una función que haga que falle el teorema de Rolle en cualquier espacio de Hilbert separable H. El teorema de Riesz-Fischer nos asegura que todo espacio de Hilbert separable es isométrico a ℓ_2. En efecto, si $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ es la base ortonormal en H que satisface (7), para cada $x \in H$ la igualdad

$$T(x) = (\langle\!\langle x, e_i \rangle\!\rangle)_{i=1}^{\infty}$$

define una isomorfismo (sobre) $T : H \to \ell_2$. Además, T es una isometría, de hecho, si $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ es la norma de H [**17**, p. 17]:

$$|\!|\!|x|\!|\!|^2 = \langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle\!\langle x, e_i \rangle\!\rangle|^2 = \|T(x)\|^2.$$

Sea $B_H = \{x \in H : |\!|\!|x|\!|\!| < 1\}$ y f la función establecida en (5). La aplicación

$$h = f \circ T : H \to \mathbb{R}$$

hace que falle el teorema de Rolle en H en B_H. Se puede verificar rápidamente que h es continua en H y además que $h(x) = f(T(x)) = 0$ para todo x en la frontera de B_H, es decir si $|\!|\!|x|\!|\!| = 1$. Sea $u \in B_H$. Ya que la regla de la cadena se satisface y $T'(u)(x) = T(x)$ entonces para todo $x \in H$,

$$h'(u)(x) = f'(T(u))T(x).$$

Como $u \in B_H$ entonces $T(u) \in B$, luego $f'(T(u)) \neq 0$ y por tanto $h'(u) \neq 0$. Con esto se ha probado que *el teorema de Rolle falla en todo espacio de Hilbert separable.*

En las ideas expuestas anteriormente se habrá notado que al elevar la norma de un espacio de Hilbert al cuadrado se consigue eliminar el problema de la no-diferenciabilidad en el origen. Existe una herramienta más sofisticada que nos puede ayudar a obtener resultados semejantes más generales, a continuación se expone.

Un resultado clásico y sorprendente en la topología en dimensión infinita es que la esfera unidad

$$S_H = \{x \in H : |||x||| = 1\},$$

de cualquier espacio de Hilbert H de dimensión infinita es homeomorfa a él –¿el lector abrió los ojos?–, más aún: todo espacio de Hilbert infinito-dimensional es difeomorfo a su esfera unidad, hecho que demostró Bessaga en 1966 [**7**]. Esto quiere decir que existe un homeomorfismo diferenciable $\phi : H \to S_H$ donde ϕ^{-1} también es diferenciable, incluso se puede construir el homeomorfismo de clase C^∞ [**11**].[2]

En la búsqueda de la generalización del resultado de Bessaga y siguiendo sus pasos, en [**4**] se prueba lo siguiente: si E es un espacio de Banach de dimensión infinita que admite una norma Fréchet diferenciable ρ (no necesariamente separable), dado $r > 0$ existe un difeomorfismo de clase C^1

$$\phi : E \to E \setminus \{0\},$$

tal que $\phi(x) = x$ si $\rho(x) > r$. La frase *admite una norma Fréchet diferenciable* precisamente significa que existe una norma equivalente a la de E que es Fréchet diferenciable fuera del origen. Un hecho relevante es que si una norma es Fréchet diferenciable, entonces es de clase C^1 [**17**, p. 93].[3]

Supongamos que E admite una norma Fréchet diferenciable $\rho : E \to \mathbb{R}$. Sea

$$B_E = \{x \in E : \rho(E) < 1\}$$

y $\phi : E \to E \setminus \{0\}$ un C^1-difeomorfismo tal que $\phi(x) = x$ si $\rho(x) > \frac{1}{2}$ y $f : E \to \mathbb{R}$ la función:

$$f(x) = 1 - \rho(\phi(x)).$$

[2]El difeomorfismo $\phi : H \to S_H$ se establece formalmente en el contexto de variedades diferenciables de dimensión infinita. La esfera de cualquier espacio de Hilbert es una variedad de clase C^∞. Si H es de dimensión infinita, también lo es S_H como variedad. La definición de función diferenciable entre variedades de dimensión infinita se constituye a partir de la noción de función Fréchet diferenciable entre espacios de Banach. El lector puede encontrar las definiciones precisas de estos conceptos en los primeros capítulos de [**20**].

[3]El resultado de Bessaga no se cumple en general para cualquier espacio de Banach. Incluso existe un espacio de Banach que admite una norma Fréchet diferenciable pero que no es difeomorfo a su esfera unidad, [**3**, p. 26]. Sin embargo, se sabe que *todo espacio de Banach es homeomorfo a su esfera unidad* [**6**, p. 206].

Ya que ϕ es de clase C^1 en E y ρ es diferenciable en $E \setminus \{0\}$, entonces f es de clase C^1 en B_E y claramente continua en E. Además, $f(x) = 0$ para todo x en la frontera de B_E. Por otro lado, si $u \in B_E$ entonces,

$$f'(u) = \rho'(\phi(u)) \circ \phi'(u). \tag{8}$$

Sean $u \in B_E$ fijo y $y = \phi(u) \in E\setminus\{0\}$. De (8) se deduce que $f'(u)(x) = 0$ para todo $x \in E$ si y sólo si $\rho'(y)(\phi'(u)(x)) = 0$ para todo $x \in E$. Ya que ϕ es un difeomorfismo, tanto ϕ como ϕ^{-1} son diferenciables y entonces $\phi'(u) : E \to E$ es un isomorfismo lineal (sobre). Para verificar la última afirmación basta aplicar la regla de la cadena para derivar a $\phi \circ \phi^{-1}$ y $\phi^{-1} \circ \phi$. Por tanto, $f'(u) = 0$ si y sólo si $\rho'(y) = 0$. Como ρ es una norma, entonces es una función convexa. Por tanto, si y es un punto crítico ρ entonces ρ alcanza su mínimo global en $y \neq 0$ [**9**, p. 321], lo cual es imposible. En conclusión, *si E admite una norma Fréchet diferenciable entonces el teorema de Rolle falla en E* y en particular falla en todo espacio de Hilbert.

En vista del resultado anterior, es natural preguntarse qué espacios admiten una norma Fréchet diferenciable. Como ya se ha advertido antes, los espacios de Hilbert admiten una norma Fréchet diferenciable, de hecho su propia norma. Es oportuno comentar que el espacio c_0 y los espacios ℓ_p con $1 < p < \infty$ también admiten una norma Fréchet diferenciable. Un resultado general que caracteriza a los espacios separables que admiten una norma Fréchet diferenciable se puede consultar en [**17**, p. 97]. En la siguiente sección se toca el tema de ℓ_1 y ℓ_∞.

3. Caracterización de la falla

Un fenómeno interesante que ocurre en ℓ_1 es el siguiente: si existe un conjunto $U \subset \ell_1$ abierto y acotado y una función continua $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ Fréchet diferenciable en U entonces $f(\partial U)$ es denso en $f(\overline{U})$. En particular, si U es conexo y f es constante en la frontera de U (es decir, si las hipótesis del teorema de Rolle se cumplen) f tiene que ser constante en todo U. Por tanto, el teorema de Rolle se cumple trivialmente. Lo mismo ocurre en ℓ_∞. El lector interesado puede consultar [**6**, p. 259 ss.] para ver la prueba de estas afirmaciones a detalle.

En resumen, hay espacios de Banach donde las únicas funciones que satisfacen las hipótesis del teorema de Rolle son las funciones constantes. Esto está directamente relacionado con la existencia de *funciones meseta*. Se dice que una función $\varphi : E \to \mathbb{R}$ es una función meseta si es distinta de la función cero y su soporte:

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}$$

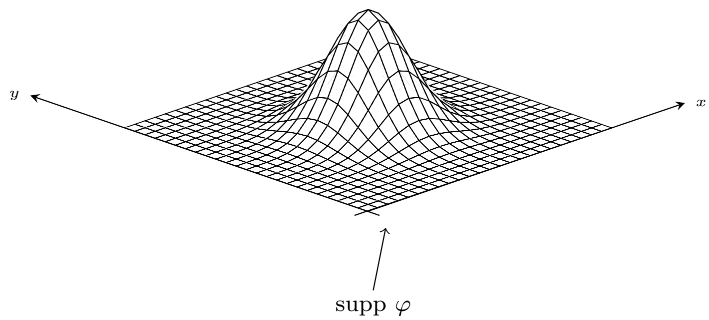

Figura 5: Gráfica de una función meseta de dos variables Fréchet diferenciable.

es acotado. En vista de lo expuesto en el párrafo anterior, ni ℓ_1 ni ℓ_∞ admiten funciones mesetas suaves.

Siguiendo esta línea, no es difícil ver que en general si un espacio de Banach E no admite una función meseta de clase C^1 entonces el teorema de Rolle se cumple en E para aplicaciones de clase C^1. Dicho de otro modo, si el teorema de Rolle falla en E para funciones de clase C^1 entonces E admite una función meseta de clase C^1. Para argumentar la afirmación anterior se razona por contradicción. Sea U un conjunto abierto, conexo y acotado de E y $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en E que se anula en la frontera de U. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función meseta de clase C^1 tal que $\operatorname{supp}\varphi \subset f(U)$. Como la derivada no se anula en U, $f(U)$ tiene interior no vacío. La aplicación $\varphi \circ f$ es entonces una función meseta de clase C^1 con soporte contenido en U y se llega así a una contradicción.

Por otro lado, si un espacio de Banach E admite una norma $\|\cdot\|$ Fréchet diferenciable (y por tanto C^1 como puntualizamos en la sección anterior), entonces E admite una colección rica de funciones meseta de clase C^1 de la forma $\phi(x) = \psi(\|x\|^2)$ donde $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función meseta de clase C^1. Sin embargo, existe un ejemplo no trivial de un espacio de Banach (no-separable) que admite una función meseta de clase C^1 pero que no admite norma Fréchet diferenciable [**18**].

En resumen, los argumentos dados a lo largo del artículo muestran que cada una de las siguientes afirmaciones implica la siguiente:

1. El espacio E no admite funciones meseta de clase C^1.
2. El teorema de Rolle se cumple para las funciones de clase C^1.
3. El espacio E no admite una norma Fréchet diferenciable.

Si E es separable, se sabe que las afirmaciones anteriores son de hecho equivalentes [**17**, p. 101] y [**10**, p. 97], aunque en general la tercera afirmación no implica la primera. Sin embargo, Azagra y Jiménez-Sevilla [**5**] probaron –hace relativamente poco– que *E admite una función meseta de clase C^1 si y sólo si existe una función $f : E \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y un abierto y conexo U de E que hagan fallar el teorema de Rolle.*

Bibliografía

1. T. Apostol, *Mathematical analysis*, 2.ª ed., tomo 2, Addison Wesley, 1974.
2. S. Axler, *Linear algebra done right*, 2.ª ed., Springer, 1996.
3. D. Azagra, «Smooth negligibility and subdifferential calculus in Banach spaces, with applications», tesis de doctorado, Universidad Complutense de Madrid, 1997.
4. D. Azagra y T. Dobrowolski, «Smooth negligibility of compact sets in infinite-dimensional Banach spaces with applications», *Math. Ann.* **312** (1998) 445–463.
5. D. Azagra y M. Jiménez-Sevilla, «The failure of Rolle's theorem in infinite-dimensional Banach spaces», *J. Functional Analysis* **181** (2001) 207–226.
6. Y. Benyamini y J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis*, tomo 1, American Mathematical Society, 2000.
7. C. Bessaga, «Every infinite-dimensional Hilbert space is diffeomorphic with its unit sphere», *Acad. Polon. Sci.* **14** (1966) 27–31.
8. H. Cartan, *Differential calculus*, Hermann, 1971.
9. K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer, 1985.
10. R. Deville, D. Godefroy, y V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, tomo 1, Pitman, 1993.
11. T. Dobrowlski, «Every infinite-dimensional Hilbert space is real-analytically isomorphic with its unit sphere», *J. Funcional Analysis* **134** (1995) 350–362.
12. J. Ferrer, «Rolle's theorem fails in ℓ_2», *Amer. Math. Monthly* **103** (1996) 161–165.
13. M. Fréchet, «La notion de différentielle dans l'analyse générale», *Ann. Sci. E. Norm. Sup.* **XLII** (1925) 293–323.
14. M. Furi y M. Martelli, «On the mean value theorem, inequality, and inclusion», *Amer. Math. Monthly* **98** (1991) 840–846.
15. M. Furi y M. Martelli, «A multidimensional version of Rolle's theorem», *Amer. Math. Monthly* **102** (1995) 243–249.
16. R. Gâteaux, «Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques», *Bull. Soc. Math. France* **50** (1922) 1–21.

17. P. Habala, P. Hájek, y V. Zizler, *Introduction to Banach spaces*, tomo 1, Matfyzpress, 1996.
18. R. Haydon, «Smooth functions and partitions of unity on certain Banach spaces», *Quar. J. Mat.* **47** (1996) 455–468.
19. A. Khovanskii y S. Yakovenko, «Generalized Rolle theorem in $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{C}$», *J. Dynamical and Control Systems* **2** (1996) 103–123.
20. S. Lang, *Fundamentals of differential geometry*, Springer, 1999.
21. M. Marden, «The search for a Rolle's theorem in the complex domains», *Amer. Math. Monthly* **92** (1985) 643–650.
22. S. A. Shkarin, «On Rolle's theorem in infinite-dimensional Banach spaces», *Mat. Zametki* **51** (1992) 128–136.
23. E. A. Silva y M. A. Teixeira, «A version of Rolle's theorem and applications», *Bol. Soc. Bra. Mate.* **29** (1998) 301–327.
24. A. Tineo, «A generalization of Rolle's theorem and an application to a nonlinear equation», *J. Aust. Math. Soc.* **46** (1989) 385–401.