

Poincaré y el problema de tres vórtices

Martin Celli

Departamento de Matemáticas
 Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
 Av. San Rafael Atlixco, 186. Col. Vicentina. Del. Iztapalapa.
 C. P. 09340. México, D.F.
 cell@xanum.uam.mx

En memoria del Dr. Ernesto Lacomba

Preguntémosle a un matemático acerca de contribuciones de Henri Poincaré al estudio de las ecuaciones diferenciales. Con frecuencia, pensará primero en teoremas generales sobre los sistemas dinámicos, o en la mecánica celeste [5]. El presente artículo quiere ser un homenaje a importantes trabajos de Poincaré en mecánica de fluidos, relativos a las interacciones entre vórtices [12].

Se puede mostrar que un fluido plano incompresible sin viscosidad es, con una buena aproximación, un conjunto de remolinos o vórtices. En el caso de un vórtice fijo, la trayectoria de cualquier partícula de fluido es una circunferencia, de centro el vórtice. Su velocidad depende de su distancia al vórtice, y de una cantidad característica del vórtice, llamada vorticidad. Si la vorticidad es positiva, la partícula recorre la circunferencia en el sentido trigonométrico. Si la vorticidad es negativa, la partícula recorre la circunferencia en el sentido de las manecillas de un reloj. Denotemos $P_1(t), \dots, P_N(t)$ las posiciones de N vórtices en el instante t y $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ sus vorticidades, constantes. Se puede mostrar que el movimiento de los vórtices es una solución de las ecuaciones diferenciales de Helmholtz:

$$P'_i = R \left(\sum_{j \neq i} \Gamma_j \frac{\overrightarrow{P_j P_i}}{P_j P_i^2} \right),$$

donde R es la rotación de ángulo 90 grados. El estudio de estas ecuaciones permite entender sistemas tan diversos como un huracán o el helio superfluido.

Es relativamente fácil resolver las ecuaciones de Helmholtz en el caso de $N = 2$ vórtices. Denotemos A la posición del primer vórtice

y B la posición del segundo vórtice. Si $\Gamma_2 = -\Gamma_1$, los vórtices tienen misma velocidad, ya que:

$$A' = R \left(\Gamma_2 \frac{\overrightarrow{BA}}{BA^2} \right) = R \left(-\Gamma_1 \frac{\overrightarrow{BA}}{BA^2} \right) = R \left(\Gamma_1 \frac{\overrightarrow{AB}}{AB^2} \right) = B'.$$

Así, el vector \overrightarrow{AB} es constante. Por lo tanto, las velocidades A' y B' también son constantes: los vórtices tienen un movimiento de traslación con velocidad uniforme.

Ahora, supongamos: $\Gamma_2 \neq -\Gamma_1$. Entonces se puede definir un punto llamado *centro de vorticidad*, aquí denotado Ω , del siguiente modo:

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} (\Gamma_1 \overrightarrow{OA} + \Gamma_2 \overrightarrow{OB}).$$

Es fácil ver que esta ecuación define un único punto Ω , que no depende del punto O elegido. Además, tenemos:

$$\begin{aligned} \Omega' &= \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} A' + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} B' \\ &= \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} R \left(\Gamma_2 \frac{\overrightarrow{BA}}{BA^2} \right) + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} R \left(\Gamma_1 \frac{\overrightarrow{AB}}{AB^2} \right) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Así, el centro de vorticidad no se mueve.

Por otro lado:

$$\begin{aligned} (AB^2)' &= (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB})' = 2\overrightarrow{AB} \cdot (B' - A') = 2\overrightarrow{AB} \cdot R \left(\Gamma_1 \frac{\overrightarrow{AB}}{AB^2} - \Gamma_2 \frac{\overrightarrow{BA}}{BA^2} \right) \\ &= \frac{2(\Gamma_1 + \Gamma_2)\overrightarrow{AB} \cdot R(\overrightarrow{AB})}{AB^2} = 0, \end{aligned}$$

ya que los vectores \overrightarrow{AB} y $R(\overrightarrow{AB})$ son perpendiculares. Así, la distancia entre los vórtices es constante, y cada vórtice recorre una circunferencia cuyo centro es el centro de vorticidad.

Ahora, examinemos el caso de $N = 3$ vórtices. Denotemos A la posición del primer vórtice, B la posición del segundo vórtice y C la posición del tercer vórtice. Para simplificar nuestros cálculos, vamos a estudiar el caso particular con vorticidades iguales $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$. Sin embargo, los argumentos que exponemos son válidos para cualquier valor de las vorticidades. Definimos las dos siguientes cantidades:

$$I = AB^2 + BC^2 + CA^2, \quad P = AB \times BC \times CA.$$

La cantidad I se llama *momento de inercia* de la configuración. La cantidad P se puede interpretar como la exponencial de la energía cinética del fluido. Vamos a mostrar que I y P son constantes a lo largo del movimiento (se dice que son *integrales primeras*):

$$\begin{aligned} I' &= 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}' + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}' + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA}') \\ &= 2 \left(\overrightarrow{AB} \cdot R \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB^2} + \frac{\overrightarrow{CB}}{CB^2} - \frac{\overrightarrow{BA}}{BA^2} - \frac{\overrightarrow{CA}}{CA^2} \right) \right. \\ &\quad + \overrightarrow{BC} \cdot R \left(\frac{\overrightarrow{AC}}{AC^2} + \frac{\overrightarrow{BC}}{BC^2} - \frac{\overrightarrow{AB}}{AB^2} - \frac{\overrightarrow{CB}}{CB^2} \right) \\ &\quad \left. + \overrightarrow{CA} \cdot R \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{BA^2} + \frac{\overrightarrow{CA}}{CA^2} - \frac{\overrightarrow{AC}}{AC^2} - \frac{\overrightarrow{BC}}{BC^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Como

$$\overrightarrow{AB} \cdot R(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} \cdot R(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{CA} \cdot R(\overrightarrow{CA}) = 0,$$

tenemos:

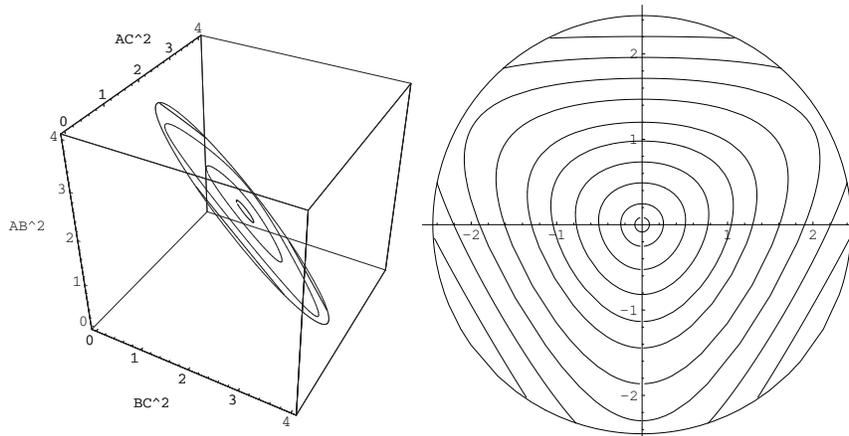
$$\begin{aligned} I' &= 2 \left(\overrightarrow{AB} \cdot R \left(\frac{\overrightarrow{CB}}{CB^2} - \frac{\overrightarrow{CA}}{CA^2} \right) + \overrightarrow{BC} \cdot R \left(\frac{\overrightarrow{AC}}{AC^2} - \frac{\overrightarrow{AB}}{AB^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \overrightarrow{CA} \cdot R \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{BA^2} - \frac{\overrightarrow{BC}}{BC^2} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} (\log(P^2))' &= (\log(AB^2))' + (\log(BC^2))' + (\log(CA^2))' \\ &= 2 \left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot (B' - A')}{AB^2} + \frac{\overrightarrow{BC} \cdot (C' - B')}{BC^2} + \frac{\overrightarrow{CA} \cdot (A' - C')}{CA^2} \right) \\ &= 2 \left(\left(\frac{\overrightarrow{BA}}{BA^2} + \frac{\overrightarrow{CA}}{CA^2} \right) \cdot A' + \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB^2} + \frac{\overrightarrow{CB}}{CB^2} \right) \cdot B' + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\overrightarrow{BC}}{BC^2} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC^2} \right) \cdot C' \right) \\ &= 2(R^{-1}(A') \cdot A' + R^{-1}(B') \cdot B' + R^{-1}(C') \cdot C') = 0. \end{aligned}$$

De modo general, podemos definir las cantidades I y P para un número cualquiera N de vórtices, y mostrar que siempre son constantes a lo largo del movimiento. En el caso particular $N = 2$, tenemos $I = P^2 = AB^2$: acabamos de mostrar, de nuevo, que la distancia entre

los vórtices era constante. Para $N = 3$, la sola conservación de I y P nos va a proporcionar el movimiento del triángulo formado por los vórtices. Cabe mencionar que aquí, sólo estamos interesados en la forma de este triángulo, no contemplamos su traslación o rotación. Conocer esta forma es equivalente a conocer los tres lados AB , BC , AC del triángulo o, de modo parecido, a conocer los cuadrados AB^2 , BC^2 , AC^2 de estos lados. Así, podemos visualizar el movimiento como una curva trazada en el espacio (de dimensión 3), donde el eje (Ox) corresponde al cuadrado AB^2 , el eje (Oy) corresponde al cuadrado BC^2 , el eje (Oz) corresponde al cuadrado AC^2 . Cada punto de la curva corresponde al triángulo formado por los vórtices en un instante dado. Sus tres coordenadas son los cuadrados de las longitudes de los tres lados de este triángulo. En la gráfica de la izquierda, se pueden observar algunas de estas trayectorias caracterizadas como intersecciones de una superficie $I = \text{constante}$ y de una superficie $P = \text{constante}$. La elección de las coordenadas AB^2 , BC^2 , AC^2 en vez de AB , BC , AC , permite ver la superficie $I = AB^2 + BC^2 + CA^2 = \text{constante}$ como un plano. Las trayectorias trazadas corresponden al mismo valor de I (por eso están en el mismo plano), pero parece claro que encontraríamos el mismo tipo de curvas en otro plano de ecuación $I = \text{constante}$. En la gráfica de la derecha, se aplicó una rotación a estas trayectorias (y a otras del mismo plano), para que se puedan visualizar con más facilidad.



Podemos trazar estas curvas aplicando el siguiente teorema que será, sobre todo, el pretexto de un bonito razonamiento geométrico:

Teorema. *Todas las curvas $\{I = I_0 = \text{constante}, P = P_0 = \text{constante}\}$ son cerradas y tienen el punto $(I/3, I/3, I/3)$ en su interior.*

Demostración. Para demostrar este teorema, tenemos que ver, primero, que ninguna de estas curvas puede «ir al infinito». En efecto, si esto

pasara, la constante I sería infinita. Además, ninguna curva se puede detener en uno de los planos de ecuación: $AB^2 = 0$, $BC^2 = 0$ o $AC^2 = 0$. Si esto se pudiera, como la curva no puede «ir al infinito», tendríamos: $P = \text{constante} = 0$. Así, en cada instante, uno de los lados del triángulo valdría 0: a lo largo del movimiento, dos vórtices tendrían la misma posición, lo que es imposible. Por lo tanto, cada curva es cerrada, o sus puntos extremos son puntos críticos de la función $P(AB^2, BC^2, AC^2)$ en el plano de ecuación: $I(AB^2, BC^2, AC^2) = \text{constante}$.

Estos posibles puntos críticos, donde las derivadas parciales se anulan, corresponden a movimientos de equilibrio relativo: las distancias entre los vórtices serían constantes. Los puntos críticos se calculan mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange: en estos puntos, los gradientes de las funciones I y P tienen que ser colineales. Es fácil checar que:

$$\nabla I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla P = \frac{1}{2P} \begin{pmatrix} BC^2 AC^2 \\ AB^2 AC^2 \\ AB^2 BC^2 \end{pmatrix}.$$

Estos vectores sólo pueden ser colineales cuando $AB^2 = BC^2 = AC^2 = I/3$, es decir cuando el triángulo de los vórtices es equilátero. Así, sólo hay un punto crítico. Por lo tanto, aunque la curva tenga puntos críticos en sus extremidades, es cerrada ya que estos puntos críticos coinciden.

En el plano de ecuación: $I = \text{constante}$, sea \bar{D} el conjunto formado por una curva cerrada γ de ecuación: $P = \text{constante}$ y por el interior D de esta curva. En el conjunto cerrado y acotado \bar{D} , la función continua P tiene un máximo y un mínimo. Como, en γ , la función P es constante, no puede alcanzar a la vez su máximo y su mínimo en esta curva. Supongamos, por ejemplo, que la función P alcance su máximo en un punto de D . Entonces este punto es un punto crítico de P . Así, sólo se puede tratar del punto $(I/3, I/3, I/3)$: acabamos de mostrar que el punto $(I/3, I/3, I/3)$ está en el interior de la curva γ . El teorema queda demostrado. \square

De hecho, los argumentos de esta demostración implican que no se pueden encontrar dos trayectorias cerradas con un punto de intersección. En particular, ninguna trayectoria puede tener la forma de un «ocho». En efecto, el punto de intersección sería un punto crítico. Pero vimos que sólo podía haber un punto crítico, de coordenadas $(I/3, I/3, I/3)$, que se encontraba en el interior de las trayectorias.

Entre todas las trayectorias en el espacio de los (AB^2, BC^2, AC^2) , tenemos que quitar las curvas formadas por «triángulos imposibles» como, por ejemplo, el «triángulo» de lados $AB = 1$, $BC = 2$, $AC = 4$,

para el cual: $AB + BC < AC$. Esto equivale a examinar sólo el dominio delimitado por la curva de los «triángulos» colineales, de área 0. Por la fórmula de Herón, estos triángulos se caracterizan por la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\sqrt{(AB^2 + BC^2 + AC^2)^2 - 2(AB^4 + BC^4 + AC^4)} \\ = \frac{1}{4}\sqrt{I^2 - 2(AB^4 + BC^4 + AC^4)} = 0, \end{aligned}$$

equivalente a:

$$(AB^2)^2 + (BC^2)^2 + (AC^2)^2 = \text{constante.}$$

¡La curva que forman es la intersección de una esfera y de un plano, es decir una circunferencia! Cabe mencionar que las trayectorias que tocan esta circunferencia se recorren en ambos sentidos: corresponden a movimientos periódicos de ida y vuelta entre dos configuraciones colineales.

Así, se pueden conocer todos los movimientos de un sistema de tres vórtices. De hecho, estos movimientos se podrían expresar mediante fórmulas: se dice que el problema de tres vórtices es *integrable*. Tal como un sistema de dos o tres vórtices, un sistema de dos (y sólo dos) planetas o un resorte son ejemplos de sistemas integrables. Pero esta situación es muy particular: con argumentos geométricos, Poincaré mostró que la mayor parte de los sistemas diferenciales no era integrable.

En su estudio del problema de tres vórtices, Poincaré no hizo exactamente el razonamiento anterior. Pero fue uno de los primeros (también cabe destacar los importantes trabajos de Walter Gröbli) que lograron entender por qué era integrable. Esta integrabilidad se puede explicar mediante consideraciones sobre las simetrías y las integrales primeras. Como las ecuaciones de Helmholtz son invariantes bajo las traslaciones, podemos cambiarlas por ecuaciones «reducidas», cuyas incógnitas son configuraciones de tres vórtices módulo traslaciones. Se puede ver una configuración módulo traslaciones como una configuración en la cual se fijó la posición de un punto (por ejemplo la integral primera del centro de vorticidad). Luego, y de modo análogo, cambiamos las nuevas ecuaciones por ecuaciones reducidas por las rotaciones. Una configuración de tres vórtices módulo traslaciones y rotaciones se describe mediante las longitudes de los tres lados del triángulo que forman. Así, logramos cambiar nuestro problema inicial por un problema con tres parámetros. Es integrable, gracias a dos últimas integrales primeras: el momento de inercia I y la exponencial de la energía P , invariantes bajo las traslaciones y las rotaciones.

Temas conexos

El problema que se resolvió aquí es la intersección privilegiada de varias áreas de las matemáticas que, muchas veces, regalan problemas elementales y accesibles a todos: estudiantes, investigadores, amateurs. Este artículo también quisiera ser una invitación a (re)descubrir estas áreas.

La geometría

Los argumentos de la demostración del teorema anterior permiten trazar las curvas de nivel de otras funciones, clásicas en geometría, tales como el producto de las distancias a los vértices de un triángulo, o su suma. Esta última función aparece en el problema histórico de los puntos de Fermat-Torricelli [4].

El problema de N vórtices

Para saber más acerca de este problema, se puede consultar el libro [9], que describe los resultados y las técnicas más importantes. El artículo [1] presenta los problemas más recientes. En [2], se demuestran resultados acerca de los equilibrios relativos (movimientos donde las distancias entre los vórtices son constantes a lo largo del tiempo). Un problema parecido al de tres vórtices consiste en estudiar las interacciones de dos polígonos regulares concéntricos, con el mismo número de vórtices, y vorticidades uniformes en cada polígono. En efecto, las simetrías e integrales primeras observadas para tres vórtices también permiten integrar este problema. ¡Los sistemas formados de dos polígonos de vórtices proporcionan una descripción del ojo de un huracán! En [6], se estudian sus equilibrios relativos. Los sistemas de vórtices son un ejemplo de modelo usado en mecánica de fluidos, para el caso plano, incompresible y sin viscosidad. Pero el movimiento de un fluido general es solución de las ecuaciones diferenciales parciales de Navier-Stokes, mucho más complejas que las ecuaciones de Helmholtz [13].

Las ecuaciones diferenciales

Existen muchas analogías entre el problema de N vórtices en mecánica de fluidos y el problema de N cuerpos en mecánica celeste, relacionado con las ecuaciones diferenciales de Newton:

$$P_i'' = \sum_{j \neq i} m_j \frac{\overrightarrow{P_i P_j}}{P_i P_j^3}.$$

Sus soluciones son posibles movimientos de planetas en interacción gravitacional [5, 7, 11]. Aquí, P_1, \dots, P_N son las posiciones de los planetas, m_1, \dots, m_N son sus masas. Sistemas de ecuaciones semejantes aparecen en electrostática, química, relatividad. Todos pertenecen a una clase de sistemas diferenciales llamados los sistemas hamiltonianos. Para cada sistema hamiltoniano, se puede definir una «energía», que es una integral primera del movimiento. Además, existe una correspondencia entre las simetrías y las integrales primeras. En el caso del problema de tres vórtices estudiado aquí, la energía es el logaritmo de la integral primera P . La ordenada del centro de vorticidad (o de su análogo vectorial si la suma de las vorticidades es cero) es la integral primera asociada a las traslaciones horizontales. La abscisa del centro de vorticidad es la integral primera asociada a las traslaciones verticales. El momento de inercia I es la integral primera asociada a las rotaciones. El libro [3] puede ser una buena introducción a estos problemas.

La geometría diferencial

En nuestra resolución del problema de tres vórtices, no demostramos que una «trayectoria» (definida aquí por un sistema de dos ecuaciones en el espacio de dimensión 3) sin punto crítico era un segmento o una recta «deformados» (con dos extremidades) o una circunferencia «deformada», sin punto doble. Aunque visualmente este resultado parezca natural, su prueba es difícil. Primero, habría que mostrar que una trayectoria sin punto crítico es localmente un segmento deformado (sin punto doble). Los objetos que tienen esta propiedad se llaman variedades de dimensión 1 (las variedades de dimensión 2 son las superficies, etc). Luego, se trataría de mostrar que todas las variedades conexas de dimensión 1 son globalmente segmentos, rectas o circunferencias «deformados». Estos dos teoremas, que se estudian al fin de la licenciatura o en posgrado, son los pilares de la geometría diferencial.

El análisis complejo

Aunque no fue necesario aquí para resolver el problema de tres vórtices, se puede notar que el campo de velocidades generado por N vórtices es el conjugado de un campo holomorfo:

$$v(z) = \mathbf{i} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \frac{z - P_j}{|z - P_j|^2} = \mathbf{i} \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{\bar{z} - \bar{P}_j}.$$

Teoremas que se enseñan en los cursos de análisis complejo de licenciatura (como la fórmula integral de Cauchy) permiten caracterizar este

campo de velocidades como el único que cumple con las siguientes condiciones:

- Se anula cuando $|z|$ es infinito.
- Su divergencia vale cero en todo \mathbb{C} (lo que incluye los vórtices). Esta condición expresa que el fluido es incompresible.
- Su rotacional es una «función» (el término técnico es «distribución») que vale cero en todo \mathbb{C} , excepto en los vórtices, pero cuya integral en \mathbb{C} vale... ¡la suma de las vorticidades! La referencia [10] propone una introducción a las propiedades muy peculiares de las distribuciones.

En [8], se estudian varios aspectos de la holomorfía de las ecuaciones de Helmholtz.

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente financiado por el proyecto CONACYT 128790.

Bibliografía

1. H. Aref, «Point vortex dynamics: a classical mathematics playground», *J. Math. Phys.*, vol. 48, 2007, 65401.1–65401.23.
2. H. Aref, P. K. Newton, M. A. Stremler, T. Tokieda y D. L. Vainchtein, «Vortex crystals», *Adv. Appl. Mech.*, vol. 39, 2002, 1–79.
3. V. I. Arnold, V. V. Kozlov y A. I. Neishtadt, *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, volume 3: Dynamical systems III)*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2006.
4. S. Cárdenas, «El punto de Fermat», *Misc. Matem.*, núm. 40, 2004, 77–85.
5. M. Celli, «Coreografías para ballet de estrellas», *Misc. Matem.*, núm. 50, 2010, 1–10.
6. M. Celli, E. Lacomba y E. Pérez-Chavela, «On polygonal relative equilibria in the N-vortex problem», *J. Math. Phys.*, vol. 52, 2011, 10310.11–10310.18.
7. A. García, «Euler y la mecánica celeste», *Misc. Matem.*, núm. 45, 2007, 67–86.
8. E. A. Lacomba, «Vórtices en fluidos y variable compleja», *Carta informativa de la SMM*, núm. 57, 2008, 1–5.

9. P. K. Newton, *The N-vortex problem: analytical techniques*, Springer-Verlag, New York, 2001.
10. J. A. Pérez, «La distribución Delta», *Misc. Matem.*, núm. 38, 2003, 1–14.
11. E. Pérez-Chavela, «Caos en el sistema solar», *Misc. Matem.*, núm. 26, 1997, 59–70.
12. H. Poincaré, *Théorie des tourbillons*, Gauthier-Villars, Paris, 1893.
13. F. M. White, *Mecánica de fluidos*, McGraw Hill, Madrid, 2008, traducido del inglés.