Miscelánea Matemática **77** (2023) 79-86 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7705

El irrazonable poder definitorio de las adjunciones

Karina García Buendía
Universidad Rosario Castellanos
karina.garcia@rcastellanos.cdmx.gob.mx
y
Francisco Marmolejo
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
quico@im.unam.mx

Hacer matemáticas es una intrincada actividad humana, la cual tiene tres pilares fundamentales: demostrar, conjeturar y definir; esto sin restarle mérito al muy importante trabajo de aplicar de regreso lo aprendido a la realidad concreta en la cual se basan las matemáticas (pero digamos que esto es desde las matemáticas y no dentro de las matemáticas). Demostrar, de manera burda, tiene más que ver con la idea que coloca a las matemáticas en un cajón aparte: ninguna afirmación puede ser considerada como cierta si no tiene su correspondiente demostración (aquí es donde entran en juego los llamados axiomas y las llamadas reglas de deducción, los y las cuales tendrán que esperar un artículo posterior).

No menos importante es el pilar de conjeturar. Alcanzar a ver qué cosas resultarán ciertas, importantes y fundamentales hacia el futuro, basados, por supuesto, en lo que sabemos hasta hoy, es una actividad cuya importancia dentro de las matemáticas es difícil exagerar. Existe, sin embargo, algo de charlatanería al respecto y cierta confusión de que solo esto es hacer matemáticas (tema para otro artículo). Pero el pilar del que vamos a intentar hablar en este texto, sin ponerlo de manera alguna por encima de los otros dos, es *definir*; al menos trataremos explicar algo de lo que el título del artículo intenta representar. Quizá hablamos poco de este aspecto fundamental dentro de las matemáticas, lo cual, por supuesto, le resta visibilidad mas no importancia.

Una *buena definición* perdura. Una definición que no es buena está condenada, en última instancia, a ser desechada. Una *buena definición* es lo más simple posible, será, si no, interpretada de manera incorrecta,

Palabras clave: Categoría, Funtor, Pares adjuntos, Topos.

aplicada donde no aplica y, en última instancia, condenada al olvido. Una *buena definición* es útil, se aplica de manera general y tiene el mínimo de casos particulares. Una *buena definición* es imprescindible: ¿cómo hemos logrado sobrevivir hasta ahora sin ella?; las definiciones le ponen nombre a las cosas. Piense el lector en la dificultad de hablar de cosas que no tienen nombre. Pero es mejor cuando el nombre se ajusta a una buena definición. Una *buena definición* está siempre dispuesta a ser generalizada, normalmente en varias direcciones.

Hablamos en este artículo, por supuesto, de definiciones matemáticas. La cantidad de trabajo que los matemáticos invierten en su vida diaria a encontrar, simplificar, generalizar y escribir de mejor manera sus definiciones es enorme. Una *buena definición* es motivo de orgullo. ¡Mira qué bonita me quedó mi definición! Una *buena definición* requiere, a veces, un muy largo recorrido para encontrarse, a veces necesita herramientas avanzadas para llegar a ser una *buena definición*. Requiere, muchas veces, discusiones interminables. Además, las definiciones son necesarias en todos los niveles de desarrollo de todos los temas matemáticos. Muchas veces, a pesar de su importancia y del tiempo invertido en encontrar buenas definiciones, leemos con prisa, o nunca, el principio del texto que a la sazón tengamos a mano para encontrar lo maravilloso: las increíbles maromas que los autores nos presentan para hacer sus demostraciones. A los matemáticos nos encantan las maromas, mientras más sofisticadas, mejor, pero quizá obscurecen la importancia y el tiempo dedicado a encontrar una *buena definición*. Encontrar una *buena definición* es tan satisfactorio como hacer una buena maroma que demuestre algo increíble.

Dado que la teoría de categorías se ha instalado en casi todas las áreas de las matemáticas, parece una ruta segura la de indicar que existen excelentes textos introductorios al tema, donde sigue resaltando, a pesar del paso de los años, el libro *Categories for the working mathematician* [7]. Recomendamos revisar la breve bibliografía al final de este texto para indagar (en caso de necesidad) las definiciones y conceptos básicos de la teoría de categorías.

La definición de la que queremos hablar en este texto, como lo indica el título, es la de *funtores adjuntos* —ella misma es una *muy buena definición* (pero no brinquemos todavía a conclusiones)—. Por supuesto que dicho concepto es uno de los más básicos de la teoría de categorías. La definición de funtores adjuntos fue dada por primera vez, en 1958, por el matemático holandés Daniel Kan (1927-2013) en el artículo *Adjoint Functors* [3].

Para poder expresar la definición de adjunción requerimos de un par de categorías A y X, y funtores en direcciones opuestas, $F\colon \mathsf{X} \to \mathsf{A}$ y $G\colon \mathsf{A} \to \mathsf{X}$.

Definición 1. Decimos que F es *adjunto izquierdo* de G (o que G es *adjunto derecho* de F) si existe un isomorfismo

$$\theta_{X,A}\colon \mathsf{A}(FX, A) \to \mathsf{X}(X, GA), \tag{1}$$

natural en $A \in \mathsf{A}$ y $X \in \mathsf{X}$. Cuando este es el caso lo denotamos mediante $F \dashv G$.

En la definición anterior $A \in \mathsf{A}$ quiere decir que A es un objeto de A, y $\mathsf{A}(A, B)$ (con $B \in \mathsf{A}$) es el conjunto de morfismos de A en B en la categoría A (y de manera similar para otras categorías). Que la asignación θ de la definición sea natural quiere decir que para cualquier morfismo $f\colon FX \to A$ en A, cualquier morfismo $a\colon A \to A'$ también en A y cualquier morfismo $x\colon X' \to X$ en X se tiene que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta_{X,A}(f)"] & GA \arrow[d, "Ga"] \\ X' \arrow[u, "x"] \arrow[r, "\theta_{X',A'}(a\circ f\circ Fx)"'] & GA' \end{tikzcd}$$

conmuta.

Una vez que salió el conejo de la chistera, los ejemplos de adjunciones proliferaron (y todavía proliferan) de una manera escandalosa. Nos topamos con el concepto de funtores adjuntos en lugares inesperados como, por ejemplo, en las nociones de par e impar. Pensemos a $\mathbb{N}$ como una categoría cuyos objetos son los elementos de $\mathbb{N}$ en la cual existe un morfismo $n \to m$ si y solo si $n \leq m$. Podemos parametrizar con los naturales a dichos conjuntos, pares e impares, con las funciones $f(n) = 2n$ y $g(n) = 2n + 1$, respectivamente. No es difícil ver que estas funciones preservan el orden, es decir, son funtores. Además, son adjunto derecho y adjunto izquierdo del funtor $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definido como

$$h(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ (n-1)/2 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Es irrazonable que los funtores adjuntos aparezca en todos lados y en ideas tan simples como en los despejes que se realizan en la secundaria. Consideremos a los números reales con la estructura usual de suma, cero y orden que denotamos como $(\mathbb{R}, +, 0, \leq)$. Como en el ejemplo anterior, podemos definir una categoría cuyos objetos son los elementos de $\mathbb{R}$ en la cual existe un morfismo $a \to b$ si y solo si $a \leq b$. En esta categoría se cumple:

$$\frac{a + c \leq b}{c \leq b - a}\,; \tag{2}$$

(léase la raya horizontal como «es lo mismo que» o «es equivalente a») esta equivalencia expresa que sumar a es adjunto izquierdo de restar

a. El ejemplo anterior se encuentra en el artículo [4] de Lawvere. En este mismo texto se explica que en los reales extendidos, $\mathbb{R}^e = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, es posible obtener cómo se operan ∞ y $-\infty$ de manera que se preserva la relación de adjunción de la ecuación (2). Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a - a = 0$; por lo que $a + (-a + b) \leq b$ y al usar la adjunción se tiene $-a + b \leq b - a$. Sin embargo, la igualdad, para todo $b \in \mathbb{R}^e$, solo se tiene si $a \in \mathbb{R}$. Para conocer los casos en los que $a = \pm\infty$ observemos que $-\infty$ es mínimo en $\mathbb{R}^e$ —el otro caso es que ∞ es máximo en la misma estructura— . De esta forma, para todo $a \in \mathbb{R}^e$ $-\infty \leq -\infty - a$. Al utilizar la adjunción tenemos que $-\infty + a \leq -\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}^e$; en particular $-\infty + \infty = -\infty$. El otro caso es similar y se puede verificar en el artículo [4].

También existen funtores adjuntos en el contexto de la lógica. La implicación es adjunto derecho de la conjunción, es decir,

$$\frac{a \wedge c \leq b}{c \leq (a \Rightarrow b)} \tag{3}$$

este ejemplo se encuentra en el libro [8]. Por lo que, en lógica se puede interpretar $x \leq y$ como $x \vdash y$, esto es, de x se deduce y, con esto la definición de implicación se traduce al teorema de la deducción. También es posible deducir algunas propiedades básicas a partir de (3), por ejemplo, al tomar $c = (a \Rightarrow b)$ obtenemos *modus ponens*, es decir, $a \wedge (a \Rightarrow b) \leq b$.

Pero los ejemplos con los que usualmente uno, como matemático, comienza su lista son los algebraicos: el funtor izquierdo es la estructura algebraica libre —para monoides, grupos, R-módulos, etcétera— y el derecho es el que olvida la estructura a conjuntos. Este ejemplo está en el libro [7].

A veces no se hace explicita la adjunción por que se considera trivial; un ejemplo clave es el de $\otimes$ y hom en el contexto de conjuntos simpliciales. Este ejemplo fue fundamental para que Kan definiera adjunción en su artículo de 1958 y es, además, un ejemplo que uno aprende muy temprano en su vida matemática, simplemente porque es extremadamente útil, además de ser relevante para nuestros propósitos. He aquí la versión para conjuntos del ejemplo de Kan.

Para conjuntos A, B, denotemos por B^A al conjunto de funciones $f\colon A \to B$. Entonces, si denotamos a la categoría de conjuntos por Con, tenemos para conjuntos A, B y C un isomorfismo

$$\mathsf{Con}(B \times A, C) \to \mathsf{Con}(B, C^A),$$

donde $\mathsf{Con}(B \times A, C)$ denota a las funciones de dominio $B \times A$ y codominio C, y $\mathsf{Con}(B, C^A)$ denota a aquellas funciones de dominio B y codominio C^A. Esto es, el isomorfismo muestra que las funciones de dos variables son funciones de una sola variable cuyas imágenes son funciones de la otra variable. Es un buen ejercicio hacer explícito el isomorfismo anterior y demostrar que es natural en el sentido que dice más arriba. Con un poco más de imaginación nos damos cuenta de que tanto $- \times A$ como $(-)^A$ son funtores $\mathsf{Con} \to \mathsf{Con}$ y concluimos que $- \times A \dashv (-)^A$.

Todo esto es relevante porque lleva a una *buena definición*.

Definición 2. Decimos que una categoría C es *cartesiana cerrada* si tiene productos finitos y para cada objeto A de C, el funtor $- \times A \colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ tiene un adjunto derecho $(-)^A \colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}$.

Por supuesto que la categoría Con, como acabamos de observar, es cartesiana cerrada. Pero existen muchas otras categorías que son cartesianas cerradas. De manera sobresaliente, la categoría de pregavillas $\mathsf{Con}^{\mathsf{D}^{\mathrm{op}}}$ con D una categoría pequeña (los objetos de $\mathsf{Con}^{\mathsf{D}^{\mathrm{op}}}$ son funtores $\mathsf{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Con}$ y los morfismos son transformaciones naturales entre tales funtores). Le dejamos al lector una sugerencia y la tarea, ni trivial ni pequeña, de verificar que se puede completar a una demostración de que la categoría $\mathsf{Con}^{\mathsf{D}^{\mathrm{op}}}$ es cartesiana cerrada: para funtores $F, G \colon \mathsf{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Con}$ y un objeto $D \in \mathsf{D}$, el funtor G^F se define como sigue:

$$G^F(D) = \mathsf{Con}^{\mathsf{D}^{\mathrm{op}}}(\mathsf{D}(-, D) \times F, G),$$

donde $\mathsf{D}(-, D) \colon \mathsf{D}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Con}$ es el funtor representado por D. [Por cierto que la sugerencia anterior es, como diría Mac Lane, inevitable. Si se acuerda uno del lema de Yoneda, lo que tenemos que hacer es suponer que sabemos quién es G^F y cómo se comporta, y luego leer las líneas horizontales en el siguiente cálculo, de nuevo, como «es lo mismo que»:

$$\begin{array}{c} \bullet \in G^F(D) \\ \hline \mathsf{D}(-, D) \to G^F \\ \hline \mathsf{D}(-, D) \times F \to G \end{array}$$

y quedarse con la sugerencia.] El siguiente paso es demostrar que esta misma línea de razonamiento lleva a la conclusión de que las categorías de gavillas de conjuntos sobre espacios topológicos resultan ser categorías cartesianamente cerradas. Y lo mismo para los topos de Grothendieck.

Como mencionamos anteriormente, la propiedad de ser cartesiana cerrada es una *buena definición* y podemos usarla para hacer otras buenas definiciones. Por ejemplo, (una de tantas versiones de) la definición de *topos elemental* es:

Definición 3. Una categoría $\mathcal{E}$ es un *topos elemental* si

- $\mathcal{E}$ tiene límites finitos.

- $\mathcal{E}$ tiene clasificador de subobjetos.
- $\mathcal{E}$ es cartesiana cerrada.

Está claro que la discusión con los lógicos respecto a la idea de que el planteamiento anterior (acerca del clasificador de subobjetos) lleva a una refundación de toda la matemática sin alusión a teoría de conjuntos nos llevaría lejos de nuestro objetivo. En consecuencia estos temas tendrán también que tomar su turno en otro artículo. La definición del segundo punto solo toma un momento.

Definición 4. Un *clasificador de subobjetos* en una categoría $\mathcal{E}$ con productos fibrados consiste de un objeto Ω junto con una flecha $\top\colon 1 \to \Omega$ (1 es el objeto terminal de $\mathcal{E}$, el cual existe porque suponemos que $\mathcal{E}$ tiene límites finitos) con la siguiente propiedad universal: para todo monomorfismo $m\colon S \rightarrowtail E$ en $\mathcal{E}$ existe un único morfismo $\chi_S\colon E \to \Omega$ tal que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d] & E \arrow[d, "\chi_S"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Una vez establecida la definición de topos queda la cuestión de cómo comparamos los topos unos con otros. En la visión más o menos tradicional de teoría de topos, en la cual cada topos es alguna clase de espacio generalizado, la respuesta tiene, como elemento central, a los *funtores adjuntos*.

Definición 5. Dados dos topos $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$, un *morfismo geométrico* $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ consiste de un par de funtores adjuntos $f^* \dashv f_*$, $f^*\colon \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ y $f_*\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, con la propiedad de que f^* preserva límites finitos.

Dada la idea que mencionamos arriba de que cada topos puede ser considerado un espacio generalizado, es usual y útil pensarlos sobre una base, esto es, nuestros objetos de estudio son morfismos geométricos $p\colon \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ con una base fija (un topos) $\mathcal{S}$. Y aunque es verdadero que todo topos $\mathcal{E} \to \mathcal{S}$, en este sentido, puede ser considerado de alguna manera como un espacio generalizado, hay ejemplos en los que el comportamiento de $p\colon \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ está mucho más cercano a la idea de una categoría de espacios $\mathcal{E}$. La naturaleza de las preguntas que uno hace sobre un espacio generalizado es muy diferente de aquellas preguntas que uno hace sobre una categoría de espacios. Después de una larga reflexión sobre estas ideas, finalmente el matemático, físico y filósofo estadounidense F. William Lawvere (1937-2023) hace una seria propuesta, la cual llama *cohesión axiomática* [6]. La idea —como en la teoría de conjuntos, donde no se define conjunto— es que no se define el concepto de *cohesión* (matemáticamente muy elusivo) sino que, en su lugar, se ofrecen axiomas que indican que existe una situación de cohesión. La esperanza es que si estudiamos suficientes de estas situaciones, llegaremos a entender algo del fenómeno de cohesión; o bien, al tomar cohesión muchas formas, la esperanza es que los axiomas nos ayudarán a comprender la cohesión como un solo fenómeno. Todo esto es relevante porque, como lo adivinó el lector, una parte central de la propuesta tiene que ver con *funtores adjuntos* (aunque existen otros axiomas).

Quizá, en aras de introducir una terminología adecuada a la idea de categoría de espacios, valga la pena traer a colación un ejemplo mínimo, el cual exhibe muchas de las cualidades de cohesión de las que estamos hablando. Denotamos por Δ a la categoría cuyos objetos son los conjuntos linealmente ordenados finitos $[n] = \{0, \ldots, n\}$ y funciones que preservan el orden. Denotamos por Δ_1 a la subcategoría plena de Δ determinada por los objetos $[0]$ y $[1]$. Entonces la categoría $\mathsf{Con}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ es la categoría de *conjuntos simpliciales*, y si lo piensa uno un poco, $\mathsf{Con}^{\Delta_1^{\mathrm{op}}}$ es la categoría de gráficas reflexivas (los objetos son gráficas en las que cada nodo tiene un lazo distinguido y los morfismos son morfismos de gráficas que preservan a estos nodos distinguidos). En este caso tenemos la siguiente sucesión de funtores adjuntos

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Con}^{\Delta_1^{\mathrm{op}}}
\arrow[d, shift right=6, "p_!"']
\arrow[d, shift right=2, phantom, "\dashv"]
\arrow[d, shift left=2, "p_*"]
\arrow[d, shift left=4, phantom, "\dashv"]
\\
\mathsf{Con}
\arrow[u, shift left=0, "p^*"]
\arrow[u, shift left=0, phantom, "\dashv"]
\arrow[u, shift right=6, "p^!"']
\end{tikzcd}
$$

(con $p_!$ pedazos o componentes conexas, p^* gráfica discreta, p_* puntos y $p^!$ gráfica codiscreta). Observamos que $p_!$ preserva productos finitos y que p^* es fiel y pleno. (Una discusión más profunda de este ejemplo se puede encontrar en el artículo [5].)

Verifique el lector que los axiomas que incorporamos en la siguiente definición se satisfacen en el ejemplo anterior.

Definición 6. Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{S}$ topos y sea $p\colon \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ un morfismo geométrico. Decimos que $\mathcal{E}$ es *pre-cohesivo* sobre $\mathcal{S}$ (o que p es *pre-cohesivo*) si se tiene la siguiente sucesión de funtores

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E}
\arrow[d, shift right=6, "p_!"']
\arrow[d, shift right=2, phantom, "\dashv"]
\arrow[d, shift left=2, "p_*"]
\arrow[d, shift left=4, phantom, "\dashv"]
\\
\mathcal{S}
\arrow[u, shift left=0, "p^*"]
\arrow[u, shift left=0, phantom, "\dashv"]
\arrow[u, shift right=6, "p^!"']
\end{tikzcd}
$$

que satisfacen los siguientes axiomas:

- p_* tiene un adjunto derecho fiel y pleno, $p^! \colon \mathcal{S} \to \mathcal{E}$ y p^* tiene un adjunto izquierdo $p_! \colon \mathcal{E} \to \mathcal{S}$.

  (Se sabe que $p^!$ fiel y pleno es equivalente a que p^* sea fiel y pleno, esto, a su vez, es equivalente a que la unidad $\alpha \colon 1_{\mathsf{Con}} \to p_* p^*$ sea invertible. Lo cual nos permite definir el compuesto

$$\theta := (p_* \xrightarrow{p_*\sigma} p_* p^* p_! \xrightarrow{\alpha^{-1} p_!} p_!),$$

  donde σ denota a la unidad de la adjunción $p_! \dashv p^*$.)
- (Nullstellensatz) El morfismo inducido $\theta \colon p_* \to p_!$ es puntualmente un epimorfismo.
- $p_! \colon \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ preserva productos finitos.

La discusión de pre-cohesión (y de cohesión, y ejemplos de estos) tendrá que esperar a otro artículo. El punto es que, de nuevo, la adjunción (varias aquí) es central en el sentido definitorio. ¿Es pre-cohesivo una *buena definición*? En realidad es pronto para saberlo; sin embargo, es más evidencia de que el concepto de funtores adjuntos tiene un irrazonable poder definitorio.

Bibliografía

[1] M. Barr y C. Wells, «Toposes, triples and theories», *Theory and Applications of Categories*, núm. 12, 2005, 1–288.

[2] H. Cartan, «Sur la théorie de kan», *Séminaire Henri Cartan*, vol. 1, 1956, 1–6.

[3] D. M. Kan, «Adjoint functors», *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 87, núm. 2, 1958, 294–329, https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1958-0131451-0.

[4] F. W. Lawvere, «State categories, closed categories, and the existence of semi-continuous entropy functions», 1984, Disponible en: https://conservancy.umn.edu/handle/11299/4672.

[5] F. W. Lawvere, «Categories of spaces may not be generalized spaces as exemplified by directed graphs», *Revista Colombiana de Matemáticas*, vol. 20, núm. 3-4, 1986, 179–186.

[6] F. W. Lawvere, «Axiomatic cohesion», *Theory and Applications of Categories*, vol. 19, 2007, 41–49.

[7] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, vol. 5, Springer–Verlag, 2013.

[8] S. Mac Lane y I. Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*, Springer–Verlag, 2012, https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0927-0.

[9] J. Van Oosten, *Basic category theory and topos theory*, 2016, Notas de clase disponibles en: https://webspace.science.uu.nl/~ooste110/syllabi/cattop16.pdf.