

DOI: <https://doi.org/10.47234/mm.7906>

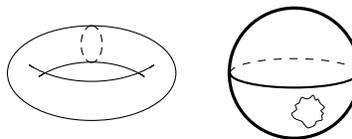
# Panorama de los solitones de Ricci

*Dedicado a mis profesores de la Unidad Académica de la Universidad Autónoma de Zacatecas*

Jonatán Torres Orozco Román  
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias  
Universidad Nacional Autónoma de México  
[jonatan.tto@gmail.com](mailto:jonatan.tto@gmail.com)

## 1. Introducción

En 1982, Richard Hamilton introduce una técnica llamada el *flujo de Ricci*, motivado a resolver la *conjetura de Poincaré*. Este último es un problema fundamental de la topología y la geometría que trata sobre la caracterización de la esfera en cualquier dimensión. A saber, se conjeturaba que la esfera es el único espacio en el que toda curva cerrada simple se puede contraer continuamente a un punto. Esto no siempre es posible, por ejemplo, sobre la figura de una dona, conocida matemáticamente como *el toro*, ningún meridiano puede deformarse a un punto. En la figura 1, la línea punteada sobre el toro es un meridiano; en la esfera podemos considerar el ecuador o cualquier otra curva cerrada, y ambas se pueden contraer a un punto. El lector más experimentado advertirá que hemos obviado algunas cosas, como que por espacio, en este contexto, nos referimos a una *variedad diferenciable compacta*.



**Figura 1.** Curvas cerradas en el toro y en la esfera.

La conjetura de Poincaré es ahora un teorema gracias a diversos trabajos, entre los que destaca la contribución de G. Perelman [15]. Usando el flujo de Ricci, Perelman resuelve el caso que faltaba, el de

---

*Palabras clave:* flujo de Ricci, métricas riemannianas, métricas de Einstein, solitones de Ricci, cohomogeneidad uno.

dimensión 3. En la resolución fue fundamental el estudio de un tipo especial de espacios geométricos, llamados *solitones de Ricci*.

Vamos a usar el juego *Adivina Quién* para motivar algunos conceptos de geometría. En el juego, cada jugador elige una carta con un personaje y cada uno hace preguntas para adivinar quién es. Las preguntas pueden referirse a características físicas o a su indumentaria: *¿Tu personaje tiene cabello azul? . . . ¿Tu personaje usa lentes?* Queremos encontrar la forma más eficiente de identificar al personaje, con menos preguntas.

Algo similar realizamos mentalmente al identificar a alguien conocido o cuando encontramos una descripción de una persona. Para ilustrar, si se nos pide de qué persona se habla al decir que es un matemático famoso que usa un traje, con moños grandes al cuello y porta una araña de metal en la solapa, pensaremos en Cédric Villani.

Desde una perspectiva más general, realizar una distinción de objetos conduce a una clasificación de ellos. Tomando el *Adivina Quién*, estarán en una misma clase aquellos personajes que tengan una característica en común, y entonces si se ha descartado que el personaje del jugador la posea, descartaremos a todos los de esa clase.

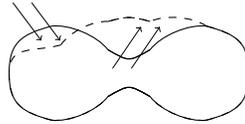
A los espacios se les puede clasificar según sus propiedades geométricas o topológicas, ignorando deformaciones continuas. Por ejemplo, la esfera y el elipsoide se consideran el mismo espacio, aunque entre ellos se diferencian por su forma. La forma es lo que consideraremos análogo a la indumentaria en una persona. Aunque una persona pueda ponerse un abrigo muy grande, el simple hecho de que no esté hecho a su medida, nos da indicios de quién se trata. La forma es como la indumentaria en una persona, lo cual conduce a buscar una manera de darles forma a los espacios para distinguirlos.

El *teorema de uniformización de superficies* da una clasificación en dimensión 2, con algunas condiciones topológicas, afirma que hay tres clases de superficies: la esfera, el plano euclidiano y el plano hiperbólico. Con la resolución de la conjetura de Poincaré también se dio una respuesta afirmativa a la *conjetura de geometrización de Thurston*. En breve, establece que todo espacio de dimensión 3 puede descomponerse en 8 piezas genéricas. No hay clasificación para dimensiones más altas.

Una manera de dar forma a un espacio es estableciendo cómo medir distancias entre puntos, y ángulos entre curvas que se intersectan. Matemáticamente, esto se realiza mediante una *métrica riemanniana* de la cual hablaremos un poco más adelante. De esta manera, al hablar de la *geometría* de un espacio, queremos referirnos a su forma, la cual quedará determinada por una métrica riemanniana.

El flujo de Ricci es una deformación de un espacio con una forma inicial, bajo ciertas reglas de transformación. Imaginemos que se tratara de una máquina que tiene programadas las reglas y que en ella colocamos el espacio durante cierto tiempo.

En dimensión 2, que corresponde a superficies, el flujo de Ricci deforma regiones cóncavas en regiones convexas; y viceversa. Entonces uno puede hacerse la idea de que el flujo de Ricci tiende a redondear los espacios. Véase la figura 2.

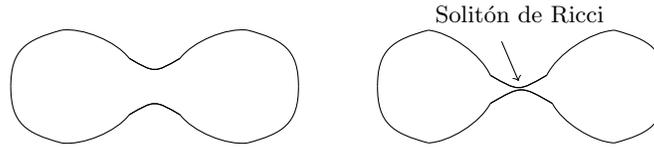


**Figura 2.** Flujo de Ricci en dos dimensiones.

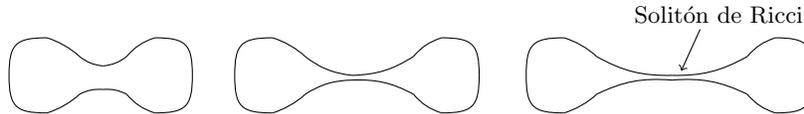
A partir de dimensión 3, el flujo de Ricci tiene muchas complicaciones técnicas, empezando con que no necesariamente se conserva el mismo espacio en el límite, o también puede presentar regiones donde el espacio sufre ciertas degeneraciones. Por ejemplo, puede ser que la deformación fue tal que rompió el espacio en varias piezas o que en ciertas regiones algunas cantidades matemáticas queden, en cierto sentido, indefinidas. Sin embargo, antes de llegar al límite, es posible detener el flujo y estudiar la región que producirá alguna degeneración, denominada una *singularidad*.

En física, los *agujeros negros* son singularidades del espacio-tiempo donde la concentración de masa es tan grande que se rompe el espacio-tiempo. Un comportamiento similar se puede tener en una singularidad al flujo de Ricci. Hasta ahora los únicos modelos conocidos de singularidades están descritos por un tipo especial de espacios geométricos, los *solitones de Ricci*. El análisis sobre ellos tuvo un papel fundamental en el trabajo de Perelman, por lo que su estudio en otros problemas de la geometría es de interés.

Una de las singularidades en dimensión 3 se da cuando la forma de una región del espacio tiende a parecerse a la de un cilindro de un radio muy pequeño, entonces la curvatura ahí va ser muy grande. Recordemos que la curvatura gaussiana de la esfera  $S^2$  de radio  $r$  es constante, igual a  $1/r^2$ . Así que, si en el interior colocamos una esfera que es tangente a los lados del cilindro, podemos comparar la curvatura y notar que en el cilindro tiene mayor curvatura al disminuir el radio. Otra posibilidad es con una expansión, estirando los extremos, de manera que la región intermedia se asemeje a un cilindro, reduciendo el radio. Véanse las figuras 3 y 4. En ambos casos, las regiones donde se producen las singularidades son solitones de Ricci.



**Figura 3.** Esquema de un solitón por una contracción.



**Figura 4.** Esquema de un solitón por una expansión.

En física, los *solitones* son ondas que mantienen su forma mientras se propagan a través de un medio, y se pueden describir como soluciones a ecuaciones diferenciales parciales. Su nombre se refiere a que son ondas solitarias. Los solitones de Ricci son lo análogo bajo el flujo de Ricci, son soluciones estacionarias al flujo.

Para más detalles sobre el flujo de Ricci recomendamos consultar [6, 16].

El objetivo de este texto es el de dar un panorama sobre los solitones de Ricci, pasando por varios ejemplos conocidos. Nos centraremos en una profunda descripción del solitón de Koiso-Cao, abordando aspectos de su curvatura y la geometría detrás de  $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ . La discusión contiene cierta medida de rigor matemático que podría ser algo técnico, sin embargo, confiamos en que las ideas principales pueden entenderse.

## 2. Variedades riemannianas y su curvatura

Una *superficie regular*  $\Sigma$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  que puede obtenerse pegando abiertos de  $\mathbb{R}^2$ , de manera que no se formen esquinas o auto-intersecciones. En una superficie regular, alrededor de cada punto  $p \in \Sigma$  hay una aplicación diferenciable que describe la geometría que hereda como subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ . Más precisamente, existe una aplicación diferenciable  $\varphi : U \rightarrow V \cap \Sigma$ , para algún abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  y una vecindad  $V \subseteq \Sigma$  de  $p$ . Adicionalmente,  $\varphi$  es biyectiva, continua y con inversa continua. Al par  $(U, \varphi)$  se le llama *parametrización local*. Como ejemplos de superficies regulares tenemos a la esfera y el toro, véase la figura 1. El término diferenciable se refiere a que tiene derivadas de todos los órdenes y son continuas. Por simplicidad nos referiremos a una superficie regular simplemente como superficie.

Un producto interno permite medir distancias y calcular ángulos. En  $\mathbb{R}^3$ , se miden distancias a través de la norma de vectores  $\|\cdot\|$ , que está inducida por un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}, \text{ para todo } \vec{v} \in \mathbb{R}^3.$$

El ángulo  $\theta$  entre dos vectores  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$  se calcula mediante la fórmula:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

La esfera de dimensión 2, cuya imagen está en  $\mathbb{R}^3$ , se puede describir como el conjunto  $S^2$  formado por puntos que están a una distancia constante del origen, con la distancia euclidiana. Sin embargo, la distancia entre puntos de  $S^2$  no es la distancia euclidiana. La diferencia está en la manera en cómo se deben pegar los abiertos de  $\mathbb{R}^3$  para formar la esfera, por los «dobles» necesarios.

Sea  $\Sigma$  una superficie y  $(U, \varphi)$  una parametrización local alrededor de  $p \in \Sigma$ . Podemos escribir  $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , donde las funciones coordenadas son vistas como funciones diferenciables de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$ . Denotamos:

$$\varphi_u := \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \varphi_v := \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

Los coeficientes de la *primera forma fundamental* de  $\Sigma$  son los coeficientes  $g_{ij}$  de una matriz simétrica y definida positiva dados por:

$$g_{11} = \|\varphi_u\|^2, \quad g_{12} = g_{21} = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \quad g_{22} = \|\varphi_v\|^2.$$

Recordemos que una matriz  $A$  de tamaño  $n \times n$ ,  $n \geq 2$  con entradas reales se dice *definida positiva* si para todo  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $\langle v, Av \rangle > 0$ .

En cada punto  $p$  de  $\Sigma$  se tiene un espacio vectorial, formado por direcciones de curvas diferenciables sobre  $\Sigma$  que pasan por  $p$ . Dada una función diferenciable  $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Sigma$  tal que  $\beta(0) = p$ , el *vector tangente*  $\beta'(0)$  a la curva  $\beta$ , en  $p$ , es una aplicación sobre  $C^\infty(\Sigma)$ , el espacio de las funciones diferenciables en  $\Sigma$ , que actúa vía la derivada direccional:

$$\beta'(0) : C^\infty(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \beta'(0)[f] = \left. \frac{d(f \circ \beta)}{dt} \right|_{t=0}.$$

El conjunto de todos los vectores tangentes en  $p$  forma un espacio vectorial de dimensión 2 llamado el *espacio tangente* en  $p$  y denotado  $T_p M$ . El *haz tangente*  $T\Sigma$  es la unión de todos los espacios tangentes a lo largo de  $\Sigma$ .

Una matriz  $A$  de  $2 \times 2$  con entradas reales, simétrica y definida positiva induce un producto interno mediante  $g(u, v) := \langle u, Av \rangle$ . Al producto interno definido por la primera forma fundamental se le llama *métrica*

*riemanniana*. Geométricamente  $g$  mide longitudes de vectores tangentes, lo que permite medir longitudes de curvas sobre  $\Sigma$ .

Una propiedad fundamental de las superficies es la siguiente. Si dos parametrizaciones  $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$  se intersectan, es decir,  $\varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2) \neq \emptyset$ , entonces existe una aplicación biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable entre  $U_1$  y  $U_2$ . Esta propiedad se tiene al usar mapas geográficos ya que, aunque se tengan dos mapas distintos, como representan la misma región geográfica, podemos llevar un mapa en el otro, por ejemplo, cambiando la escala. Es decir, aquí rescalar es una aplicación biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable.

Una *variedad diferenciable de dimensión  $n$*  es un espacio abstracto  $M$  que puede describirse a través de subconjuntos que son parecidos a abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , de tal forma que satisfacen una propiedad similar a la descrita en el párrafo anterior para superficies. Esto es, existe una aplicación biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable entre dos abiertos  $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ , siempre que su correspondiente imagen en  $M$  se intersecte. Si  $M$  se describe mediante abiertos de  $\mathbb{C}^n$ , cambiando lo diferenciable por holomorfo, diremos que es una *variedad diferenciable compleja*. Observe que, a diferencia del caso de superficies, no necesariamente  $M$  es un subconjunto de algún  $\mathbb{R}^n$ .

**Ejemplo 2.1.** Sea  $\mathbb{C}^{n+1}$  el espacio vectorial, sobre  $\mathbb{C}$ , formado por las  $n + 1$  tuplas de números complejos, bajo la suma componente a componente, y con el producto por escalar que actúa componente a componente. Consideremos la relación de equivalencia dada por:

$$z, w \in \mathbb{C}^{n+1} \text{ están relacionados si y solo si existe } k \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ tal que } z = k \cdot w.$$

El *espacio complejo proyectivo* es el espacio cociente de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ , bajo esta relación de equivalencia, y se denota por  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . Observe que los elementos de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  son líneas en  $\mathbb{C}^{n+1}$  que pasan por el origen. La clase de equivalencia de un punto  $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$  se denotará por  $[z]$ .

Se puede ver que  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  es una variedad diferenciable. Consideremos los subconjuntos de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ :  $U_i = \{[z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \mid z_i \neq 0\}$ . Entonces tenemos una biyección  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$  dada por:

$$\varphi_i([z]) = \left( \frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i} \right).$$

Así que los cambios de coordenadas:

$$\begin{aligned} \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} & : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j), \\ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(z_1, \dots, z_n) & = \left( \frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_j}{z_i}, \frac{z_{j+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right), \end{aligned}$$

son difeomorfismos, donde se ha omitido la coordenada  $i$ -ésima. Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se ve que son holomorfos. Por lo tanto,  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  es una variedad diferenciable compleja de dimensión  $n$ .

Hay una forma alternativa de describir al espacio complejo proyectivo. Primero, recordemos que la  $(2n + 1)$ -esfera en  $\mathbb{C}^{n+1}$  es el conjunto:

$$S^{2n+1} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \mid |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1\}.$$

Entonces el círculo  $S^1 = \{w \in \mathbb{C} \mid |w|^2 = 1\}$  actúa en  $S^{2n+1}$ , para cada entero  $n \geq 1$ , mediante:

$$w \cdot (z_1, \dots, z_{n+1}) = (wz_1, \dots, wz_{n+1}).$$

Entonces  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = S^{2n+1}/S^1$ . Es decir, cada línea en  $\mathbb{C}^{n+1}$  que pasa por el origen intersecta a  $S^{2n+1}$  en un círculo, de manera que un punto de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  resulta de identificar todos los puntos de ese círculo. Se puede demostrar que  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = S^2$ .  $\square$

De manera similar a superficies, en una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $n$ , se define el espacio tangente  $T_pM$ , y es un espacio vectorial de dimensión  $n$ . También hay análogos para el haz tangente  $TM$  y  $C^\infty(M)$ , las funciones diferenciables en  $M$ . Una métrica riemanniana  $g$  en  $M$  es una familia de productos internos que varían de manera diferenciable alrededor de cada punto de  $M$ , que permite medir longitudes de vectores tangentes.

A partir de ahora, y salvo que se especifique otra cosa,  $(M, g)$  denotará una variedad riemanniana de dimensión  $n$  que es compacta y no tiene frontera.

El *teorema fundamental de la geometría riemanniana* establece que dada  $(M, g)$  existe asociada una única aplicación bilineal  $\nabla$  definida en  $\mathfrak{X}(M)$ , el espacio de los campos vectoriales en  $M$ , con las siguientes propiedades:

i)  $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ , y se satisface la regla de Leibniz,

$$\nabla_X (f \cdot Y) = X(f) \cdot Y + f \nabla_X Y.$$

ii)  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ .

iv)  $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ ,  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

A  $\nabla$  se le llama la *conexión de Levi-Civita* respecto a  $g$ . Permite extender varios objetos del cálculo diferencial a las variedades riemannianas.

Notemos que, la métrica riemanniana puede tomar campos vectoriales, pues un campo vectorial en un punto asigna un vector tangente. En cierto sentido, las ecuaciones anteriores y aquellas que involucren campos vectoriales pueden pensarse que se aplican en cada punto.

Si  $f \in C^\infty(M)$ , el *gradiente de  $f$* , denotado por  $\nabla f$ , es el único campo vectorial tal que:

$$g(X, \nabla f) = X(f), \text{ para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

El *hessiano* de  $f$  se define por:

$$\text{Hess}(f)(X, Y) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f),$$

y usando la propiedad ii) de  $\nabla$  se puede verificar que es simétrico. Entonces, para cada  $p \in M$  hay una matriz simétrica de componentes  $(f_{ij}(p))_{i,j=1}^n$ . Afirmamos que existe un sistema de coordenadas donde el hessiano de  $f \in C^\infty(M)$  tiene coordenadas  $f_{ij}$  dadas por:

$$f_{ij}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p).$$

El *laplaciano* con respecto a  $g$  de una función  $f \in C^\infty(M)$  se denota por  $\Delta_g$ , y en este sistema de coordenadas tiene la forma:

$$\Delta_g f(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial (x^i)^2}(p).$$

En general, para un sistema de coordenadas cualquiera se demuestra que el laplaciano es, en cierto modo, es la traza del hessiano:

$$\Delta_g f(p) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(p) f_{ij}(p),$$

donde  $g^{ij}(p)$  son las componentes de la inversa de  $g$  en  $p$ .

## 2.1 Curvatura

La curvatura es un fenómeno local, describe los cambios en la geometría del espacio. Intuitivamente describe que tan alejado es el espacio de ser  $\mathbb{R}^n$  (ó  $\mathbb{C}^n$ ). Por ejemplo, se puede comparar el ángulo entre curvas o el crecimiento del volumen de esferas alrededor de un punto, con respecto a lo que ocurre en  $\mathbb{R}^n$ .

Recordemos que, dada una curva diferenciable, su curvatura en un punto está dada por la magnitud de su vector aceleración, es decir, los términos de segundas derivadas describen dicho fenómeno. O bien, podemos visualizar la curvatura en un punto como medir la variación de su línea tangente en el punto, con respecto a su línea normal. Estas perspectivas tienen sus análogos en variedades riemannianas.

La curvatura de una superficie está determinada por la *curvatura gaussiana*. Dada una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  y un punto  $p \in \Sigma$ , consideramos las curvas sobre  $\Sigma$  que pasan por  $p$ , y sus curvaturas. Sean  $\kappa_{\min}(p)$  y  $\kappa_{\max}(p)$  la menor y la mayor de las curvaturas. Entonces la curvatura gaussiana  $K$  es:

$$K(p) = \kappa_{\min}(p) \cdot \kappa_{\max}(p).$$

En variedades riemannianas de dimensiones más altas es más complicado. Dado  $p \in M$ , un subespacio vectorial  $\Pi_p$  en  $T_p M$  de dimensión 2,

determina una variedad  $S$  de dimensión 2, formada por las geodésicas que salen de  $p$  tangentes a  $\Pi_p$ . Gracias al *teorema egregio de Gauss*,  $S$  se puede realizar (alrededor de  $p$ ) como una superficie  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^3$ . La *curvatura seccional* en  $p$ ,  $sec(\Pi_p)$ , con respecto a  $\Pi(p)$  es la curvatura gaussiana de  $\Sigma$  en  $p$ .

Sea  $v \in T_p M$  un vector tangente unitario fijo, y  $\{v, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  una base ortonormal (con respecto a  $g$ ) de  $T_p M$ . La *curvatura de Ricci* es el promedio de las curvaturas seccionales de planos generados con  $v$ :

$$Ric_g(p) = \sum_{i=1}^{n-1} sec(\text{gen}\{v, v_i\})$$

donde  $\text{gen}\{v, v_i\}$  denota el subespacio de dimensión 2 generado por  $v$  y  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Se demuestra que la curvatura de Ricci en  $p$  se puede ver como una aplicación bilineal simétrica que varía de manera diferenciable alrededor de  $p$ ,  $Ric_g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ . Por lo que, en algún sistema de coordenadas tiene una matriz simétrica de componentes  $R_{ij}$ .

La *curvatura escalar* es una función diferenciable  $S_g : M \rightarrow \mathbb{R}$ . En un sistema de coordenadas alrededor de  $p \in M$  es:

$$S_g(p) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(p) R_{ij}(p).$$

Es el promedio de todas las curvaturas seccionales en  $p$ .

## 2.2 Variedades Kähler

Sea  $M$  una variedad diferenciable compleja. Una métrica riemanniana  $g$  en  $M$  es una *métrica hermitiana* si existe una aplicación  $J : TM \rightarrow TM$  tal que  $J^2 = -\text{Id}_{TM}$  y

$$g(JX, JY) = g(X, Y),$$

para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . La aplicación  $J$  es llamada una *estructura casi-compleja*. Precisamos que, punto a punto define una transformación lineal  $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$  tal que  $J_p^2 = -\text{Id}_{T_p M}$ .

Asociada a una métrica hermitiana existe una 2-forma diferencial  $\omega_g$ , es decir, una aplicación bilineal antisimétrica, dada por:

$$\omega_g(X, Y) = g(JX, Y).$$

Una variedad compleja  $M$  dotada de una métrica hermitiana  $g$ , con una estructura casi compleja  $J$ , es una variedad *variedad Kähler* si y solo si:

$$\nabla_X JY = J\nabla_X Y, \text{ para todos } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

De hecho, esto es equivalente a que  $\omega_g$  sea cerrada.

La *forma de Ricci* de una variedad Kähler manifold es una 2-forma cerrada  $Ric(\omega_g)$  definida por:

$$Ric(\omega_g)(X, Y) = Ric_g(JX, Y), \text{ para todos } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

### 3. Solitones de Ricci

El flujo de Ricci fue introducido por Hamilton en el artículo «Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature» [10], como hemos dicho, se formula a través de una ecuación diferencial que describe un proceso de deformación. Sea  $\mathcal{M}$  el conjunto de todas las posibles métricas riemannianas que admite una variedad diferenciable  $M$ . Dada una métrica riemanniana inicial  $g_o$  en  $M$ , una solución al *flujo de Ricci* es una curva  $g(t)$  en  $\mathcal{M}$ , con  $g(0) = g_o$ , definida en algún intervalo  $(-\epsilon, \epsilon)$  y cuya variación con respecto a  $t$  satisface la ecuación:

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric_{g(t)}, \quad (3.1)$$

donde  $Ric_{g(t)}$  es la curvatura de Ricci de la métrica  $g(t)$ , calculada en el tiempo  $t$ . El término  $-2Ric_{g(t)}$  puede interpretarse como un vector tangente a  $g(t)$  en el tiempo  $t$ .

Una *variedad de Einstein* es una variedad riemanniana  $(M, g)$  cuya curvatura de Ricci cumple la ecuación:

$$Ric_g = \lambda g,$$

para alguna constante real  $\lambda$ .

Los puntos fijos del flujo de Ricci son métricas de Einstein con constante  $\lambda = 0$ , de hecho, son métricas donde

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric_{g(t)} = 0, \text{ para todo } t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Un *solitón de Ricci* sobre una variedad riemanniana compacta y sin frontera  $(M, g)$ , de dimensión  $n$  tal que satisface la ecuación:

$$-2Ric_g = Hess_g(f) + 2\lambda g \quad (3.2)$$

para alguna constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  y una función diferenciable  $f$  en  $M$ . Según el signo de  $\lambda$ , si es negativo, cero o positivo, es un solitón *de expansión*, *estable* o *de contracción*, respectivamente.

Si  $f$  es una función constante, su hessiano se anula y obtenemos una métrica de Einstein. Lo que significa que un solitón de Ricci puede considerarse como una generalización de una métrica de Einstein.

**Nota 3.1.** *En general, también pueden definirse solitones de Ricci en variedades no compactas y con frontera. De hecho, los solitones de Ricci son métricas que satisfacen una ecuación similar a (3.2). En lugar*

del hessiano de una función, aparece un término que depende de un campo vectorial  $X$ , y que en el caso en que  $X = \text{grad}(f)$ , para alguna  $f \in C^\infty(M)$ , se obtiene la ecuación (3.2). A estos últimos se les llama solitones gradiente. Sin embargo, Perelman [15] demostró que al considerar variedades compactas, todos los solitones son gradiente. Referimos al lector a [6] o [16] para ver la definición general y su relevancia en el flujo de Ricci. En este sentido, también mencionaremos algunos ejemplos no compactos. En lo que resta de la sección especificaremos cuando se trate de un solitón compacto o no compacto, o un solitón gradiente. También, a partir de ahora, por solitón entenderemos un solitón de Ricci.

### 3.1 Ejemplos

#### a) Puro/cigarro de Hamilton [11]

Consideremos  $\mathbb{R}^2$  con la métrica  $g_\rho = \rho^2(dx^2 + dy^2)$ , donde  $\rho^2 = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ . La curvatura gaussiana es:

$$K_{g_\rho}(x, y) = \frac{2}{1 + x^2 + y^2}.$$

Si  $f = -\log(1 + x^2 + y^2)$ , entonces  $\text{Ric}_g = K_g \cdot g$ . El Puro de Hamilton es el solitón estable  $(\mathbb{R}^2, g_\rho)$ . Se demuestra que es el único solitón gradiente, de simetría rotacional, salvo homotecias de la métrica. Tiene curvatura positiva y es asintótico en el infinito a un cilindro de radio finito.

#### b) Solitón gaussiano

Consideremos  $(\mathbb{R}^n, g_o)$  con la métrica euclidiana. Si tomamos como función potencial  $f = \frac{\|x\|^2}{4}$ , obtenemos el solitón Gaussiano de contracción. Mientras que si  $f = -\frac{\|x\|^2}{4}$ , es de expansión.

#### c) Solitón de Bryant [3]

La métrica redonda en  $S^n$ , la esfera de dimensión  $n$ , es la métrica  $g_o^n$  que se obtiene de restringir la métrica euclidiana de  $\mathbb{R}^{n+1}$  a  $S^n$ . Consideremos la métrica  $g = dr^2 + \phi(r)g_o^n$ , definida en  $(0, \infty) \times S^n$ , con  $\phi$  una función radial en  $S^n$ . El solitón de Bryant es un solitón gradiente estable, de simetría rotacional en  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) y de curvatura seccional positiva (en todo punto). Si  $f$  es la función potencial, entonces la solución a la siguiente ecuación produce el solitón:

$$f'' = (n-1)\frac{\phi''}{\phi}, \quad \phi\phi'f' = -(n-2)(1 - (\phi')^2) + \phi\phi''.$$

A. Betancourt, A. Dancer y M. Wang [2] obtuvieron que  $\phi$  es de la forma:

$$\phi^2(r) = a((r+b) \coth(c \cdot (r+d)) - e)$$

para ciertas constantes  $a, b, c, d$  y  $e$ ; con  $a, c$  y  $e$  positivas. Y el potencial del solitón es:

$$f(r) = \log((\coth^2(c \cdot r) - 1)(t \coth(c \cdot r) - e)).$$

d) **Solitón de Koiso-Cao**

M. Koiso y de manera independiente H.-D. Cao construyeron un solitón de contracción no Einstein en la suma conexa  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$  con simetría rotacional  $U(2)$  y curvatura de Ricci positiva [14, 4]. Es el único solitón de cohomogeneidad uno en dimensión 4 conocido. Más generalmente, Koiso y Cao construyeron solitones de Kähler-Ricci,  $U(2)$ -invariantes en haces lineales torcidos proyectivos sobre  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ ,  $n \geq 2$ , bajo una acción de cohomogeneidad uno. El método de Cao consiste en encontrar un potencial Kähler  $U(n)$ -invariante el cual, como se tiene una acción de cohomogeneidad uno, se reduce a una función  $u : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Similarmente, el potencial del solitón será una función  $U(n)$ -invariante  $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$Ric(\omega_g) - \omega_g = Hess_g(f - u).$$

Se requiere que  $\nabla f$  sea holomorfo, y  $u$  satisfaga algunas condiciones asintóticas en  $-\infty$  y  $\infty$ . La existencia de ambas funciones es equivalente a la existencia de soluciones de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{u'''}{u''} + \left( \frac{n-1}{u'} + c \right) u'' = n - u'$$

para una constante  $-1 < c < -1/2$  que numéricamente se calcula que es aproximadamente  $c \approx -0.527619$ .

e) **Solitón de Wang-Zhu**

Wang and Zhu construyeron un solitón con estructura Kähler sobre  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 2\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$  con simetría  $U(1) \times U(1)$  [18]. La métrica no es explícita, se determina como solución a una ecuación diferencial compleja de Monge-Ampère.

f) M. Feldman, T. Ilmanen y D. Knopf construyeron un solitón gradiente de contracción con estructura Kähler. Se trata de una métrica invariante bajo la acción del grupo unitario de dimensión  $n$ ,  $U(n)$  (Véase la próxima sección para métricas invariantes) [8].

- g) En [7], A. Dancer and M. Y. Wang generalizaron los ejemplos dados por Koiso y Cao. Construyeron solitones no compactos (completos) con estructura Kähler en haces fibrados sobre productos de métricas Kähler-Einstein de primera clase de Chern positiva. Son de cohomogeneidad uno (véase la siguiente sección).

Los solitones (compactos) homogéneos, se reducen a métricas de Einstein, por lo que el siguiente caso de estudio son los que tienen cohomogeneidad uno. Resultados de Hamilton [12] e Ivey [13] muestran que solitones gradientes compactos estables o de expansión son Einstein. M. Fernández-López y E. García-Río demuestran que un solitón completo de contracción es compacto si y solo si es acotado, en cuyo caso tiene grupo fundamental finito [9]. También invitamos a consultar el artículo panorámico de Cao [5].

#### 4. Un paseo por variedades de cohomogeneidad uno

Una acción de un grupo  $\Gamma$  sobre un conjunto  $X$  es, en abstracto, un homomorfismo de grupos  $\Gamma \rightarrow \text{Sym}(X)$ , donde  $\text{Sym}(X)$  es un grupo de simetrías. Por simetría podemos pensar, por ejemplo, un homomorfismo o difeomorfismo. Es decir, alguna característica que se preserva bajo las transformaciones inducidas por el grupo.

**Definición 4.1.** Un difeomorfismo  $F : M \rightarrow M$  es una *isometría* de una variedad diferenciable  $M$  con métrica  $g$  si

$$g(X, Y) = g(dF(X), dF(Y))$$

para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

En la definición anterior  $dF$  es la diferencial de  $F$ . Más generalmente, una aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciables,  $F : M_1 \rightarrow M_2$ , induce una aplicación lineal  $dF_p : T_p M_1 \rightarrow T_{F(p)} M_2$ , que geoméricamente transforma vectores tangentes en  $M_1$  en vectores tangentes en  $M_2$ , a través de  $F$ .

**Definición 4.2.** Un *grupo de Lie* es una variedad diferenciable  $\Gamma$  con una adicional estructura de grupo, de tal manera que su producto y la operación de invertir elementos son aplicaciones diferenciables. Es decir, si las aplicaciones:

$$\Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma, (x, y) \mapsto x \cdot y; \quad \Gamma \rightarrow \Gamma, x \mapsto x^{-1}$$

son diferenciables.

Para los fines de este trabajo, nos centraremos principalmente a los grupos de Lie compactos y conexos.

**Nota 4.3.** *Detrás de esta definición está un hecho sencillo de probar:* el producto cartesiano de dos variedades diferenciables es una variedad diferenciable, de dimensión igual a la suma de las dimensiones de sus factores.

**Ejemplo 4.4.** Como subconjunto de  $\mathbb{C}$ , el círculo  $S^1 = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  es un grupo de Lie de dimensión 1, bajo el producto complejo.

**Ejemplo 4.5.** El *grupo ortogonal en dimensión  $n$*  es el subconjunto de matrices  $A$  de tamaño  $n \times n$  (de componentes reales) con  $A \cdot A^t = I_n$ , donde  $I_n$  es la matriz identidad de tamaño  $n \times n$  y  $A^t$  es la transpuesta de  $A$ . Se denota por  $O(n)$ . El *grupo especial ortogonal en dimensión  $n$* ,  $SO(n)$ , es el subgrupo de  $O(n)$  de matrices con determinante igual a 1. Daremos las ideas para mostrar que ambos son grupos de Lie.

Es claro que ambos son grupos (abstractos), bajo la multiplicación matricial. Ahora, consideremos la función determinante  $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $M_n(\mathbb{R})$  es el conjunto de las matrices  $n \times n$  con entradas reales. Dado que el determinante de una matriz es un polinomio en sus componentes, es una función diferenciable. Así,  $O(n)$  es la unión de  $\det^{-1}(1)$  y  $\det^{-1}(-1)$ . El espacio  $M_n(\mathbb{R})$  es una variedad diferenciable, de hecho, de dimensión  $n^2$ , las coordenadas de un punto en  $M_n(\mathbb{R})$  son  $(x^1, \dots, x^{n^2})$ . Entonces  $\det$  es una aplicación diferenciable de  $M_n(\mathbb{R})$  a  $\mathbb{R}$ . Se demuestra que en cualquier punto de  $\det^{-1}(1)$  o de  $\det^{-1}(-1)$ , la diferencial de  $\det$  es diferente de cero. Esto demuestra que tanto  $O(n)$  como  $SO(n)$  son variedades diferenciables. Ver que el producto matricial y la operación de invertir matrices son aplicaciones diferenciables se verifica directamente.  $\square$

**Definición 4.6.** Una *acción de un grupo de Lie* (compacto y conexo)  $\Gamma$  sobre  $M$  es una acción de grupos  $\psi : \Gamma \times M \rightarrow M$  (como grupo abstracto), tal que  $\psi$  es una aplicación diferenciable.

**Definición 4.7.** Para una acción de un grupo de Lie sobre  $M$ ,  $\psi : \Gamma \times M \rightarrow M$ , decimos:

- i) Es una *acción isométrica* si para cada  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\psi(\gamma, \cdot) : M \rightarrow M$  es una isometría en  $M$ .
- ii) Es de *cohomogeneidad uno* si tiene al menos una órbita de dimensión  $n - 1$ .
- iii) Para una acción de cohomogeneidad uno, una órbita se llama *principal* si tiene dimensión exactamente  $n - 1$ .
- iv) Una aplicación  $F : M \rightarrow M$  es  $\Gamma$ -equivariante si  $\psi(\gamma, F(x)) = F(\psi(\gamma, x))$ .

Invitamos al lector más interesado a ver un tratado más general de la teoría de cohomogeneidad uno en el libro de texto de M. Alexandrino y R. Bettiol [1].

Observemos que una acción sobre  $M$  induce una acción sobre su haz tangente,  $\bar{\psi} : \Gamma \times TM \rightarrow TM$  dada por:

$$\bar{\psi}(\gamma, (x, v)) := (\psi(\gamma, x), d(\psi_x^\gamma)v),$$

donde  $\psi^\gamma : M \rightarrow M$  está dada por  $\psi^\gamma(x) = \psi(\gamma, x)$ .

**Proposición 4.8.** *Las órbitas de una acción isométrica en  $(M, g)$  son subvariedades de  $M$ . Si es de cohomogeneidad uno, admite solo dos tipos de órbitas: órbitas principales y órbitas de dimensión estrictamente menor a  $n - 1$ . La unión de las órbitas principales forma un abierto denso  $M_0$  en  $M$ .*

A las órbitas de dimensión estrictamente menor a  $n - 1$  se les llama *órbitas singulares*.

Para recuperar  $M$ , con una acción de cohomogeneidad uno, se requiere una adecuada compactificación de  $M_0$  en  $M$ .

**Ejemplo 4.9.** El grupo  $SO(2)$  actúa en  $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ , la esfera de dimensión 2, mediante:

$$SO(2) \times S^2 \rightarrow S^2, (A, (x, y, z)) \mapsto (A(x, y), z).$$

Los puntos  $(0, 0, 1)$  y  $(0, 0, -1)$  son los únicos puntos fijos de la acción, mientras que la órbita de un punto  $(x, y, z)$  con  $x^2 + y^2 > 0$  es un círculo paralelo al plano  $xy$  a una altura  $z$ . Por lo tanto, es una acción de cohomogeneidad uno, cuyas órbitas principales son círculos, y los polos de  $S^2$  son órbitas singulares de dimensión 0. En tanto que  $M_0$  es difeomorfo a  $(-1, 1) \times S^1$ .  $\square$

**Teorema 4.10.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable (no necesariamente compacta) que admite una acción de cohomogeneidad uno por un grupo de Lie  $\Gamma$ . Entonces el espacio de órbitas es (difeomorfo a) alguno de los siguientes: i)  $M/\Gamma = \mathbb{R}$ , ii)  $M/\Gamma = S^1$ , iii)  $M/\Gamma = [0, \infty)$ , iv)  $M/\Gamma = [-1, 1]$ .*

En i) y ii), todas las órbitas son principales. Si  $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$  es la aplicación cociente, en el caso iii)  $M$  es no compacta y existe una sola órbita singular que corresponde a  $\pi^{-1}(0)$ ; y en el caso iv) hay exactamente dos órbitas singulares que corresponden a  $\pi^{-1}(-1)$  y  $\pi^{-1}(1)$ . En el caso ii),  $M$  tiene necesariamente grupo fundamental infinito.

Además de ser  $M$  compacta y sin frontera, asumiremos que tiene grupo fundamental finito, lo que en la teoría implica que el espacio de órbitas es un intervalo cerrado.

Todas las órbitas principales resultan ser difeomorfas entre ellas, así que basta tomar una distinguida  $P$ . Se demuestra que se tienen los

siguientes difeomorfismos equivariantes:

$$M_0 = (-1, 1) \times P, \quad \text{y } M_0/\Gamma = (-1, 1). \quad (4.1)$$

Denotaremos por  $\Gamma \cdot x$  a la  $\Gamma$  órbita de un punto  $x \in M$ ; y por  $\Gamma_x$  al estabilizador de  $x \in M$ , es decir, es el subgrupo de  $\Gamma$  dado por:

$$\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot x = x\}.$$

Se verifica que puntos en una misma órbita tienen estabilizadores iguales, salvo conjugación, es decir, si  $y \in \Gamma \cdot x$ , entonces  $\Gamma_y = \gamma\Gamma_x\gamma^{-1}$  para algún  $\gamma \in \Gamma$ . Más aún, puntos arbitrarios en  $M_0$  tienen mismo estabilizador, salvo conjugación. Llamaremos *isotropía principal* a  $H := \Gamma_x$ , para  $x \in M_0$ . Los estabilizadores de puntos  $\pi^{-1}(-1)$  y  $\pi^{-1}(1)$ , las órbitas singulares, son las *isotropías singulares* y las denotaremos respectivamente por  $K_+$  y  $K_-$ . Se tienen los siguientes difeomorfismos equivariantes:

$$P = \Gamma/H, \quad \pi^{-1}(\pm 1) = \Gamma/K_{\pm}.$$

Si además, la acción de  $\Gamma$  es por isometrías, entonces por (4.1) la métrica se descompone:

$$g = dt^2 + g_t$$

donde  $g_t$  es una familia de métricas invariantes en  $P = \Gamma/H$ , con condiciones asintóticas en  $\pm 1$ , de manera que  $g$  se extiende de manera diferenciable a las órbitas singulares.

**Teorema 4.11.** *Una variedad diferenciable  $M$  admite una acción de cohomogeneidad uno bajo  $\Gamma$  si y solo si existen subgrupos  $H, K_-$  y  $K_+$  tales que  $H \subseteq \{K_-, K_+\}$  como subgrupos y los cocientes  $K_{\pm}/H$  son difeomorfos a esferas.*

Si  $S \subseteq M$  es una subvariedad de  $M$  de dimensión  $n - k$ , entonces  $T_x S \subseteq T_x M$ , para cada  $x \in S$ . Dada una base ortonormal  $\mathcal{B}_x$  de  $T_x S$ , mediante el Proceso de Gram-Schmidt, existen  $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq T_x M$  tales que  $\mathcal{B}_x \cup \{v_1, \dots, v_k\}$  es una base ortonormal de  $T_x M$ . Denotamos  $\nu_x S := \text{gen}\{v_1, \dots, v_k\}$ . Entonces:

$$T_x M = T_x S \oplus \nu_x.$$

A la unión  $\nu S := \bigcup_{x \in M} \nu_x$  se le llama el *haz normal*, y en cierto sentido es un complemento ortogonal de  $TS$  en  $TM$ . Sea  $B_{\varepsilon}(0)$  una bola de radio  $\varepsilon$  en  $\nu_x$ , para  $\varepsilon$  pequeño. Entonces,  $B_{\varepsilon}(0)$  está formado por direcciones de curvas sobre  $M$ , y determina una subvariedad  $Z_x$ , llamada *rebanada normal*.

En la figura 5 damos una representación geométrica de una variedad de cohomogeneidad uno. Como se tienen los difeomorfismos (4.1), representamos a  $M_0$  como un cilindro circular. Así que las órbitas principales son los círculos que lo forman. Aunque están representadas así,

pueden ser más generales y, por supuesto, posiblemente de mayor dimensión. En este caso, los círculos (con su interior) son subvariedades en  $\mathbb{R}^3$  de dimensión 2. Las órbitas singulares corresponden a los círculos que están en los extremos. Para dar la noción de que tienen menor dimensión que las órbitas principales, los dibujamos de menor tamaño. Si en particular  $S$  es una órbita singular, entonces  $Z_x$  es una subvariedad que contiene a  $S$ . Recordemos que puntos fuera de una órbita singular pertenecen a órbitas principales, entonces  $M$  se obtiene de pegar las dos órbitas singulares de la acción, a lo largo de la órbita principal  $P$ .

La descomposición puede darse incluso en términos de las isotropías de la acción. Para el lector más experimentado, mencionaremos un poco acerca de esto. Se demuestra que si  $M$  es una variedad de cohomogeneidad uno, existe una descomposición equivariante mediante la unión de dos haces asociados:

$$M = \Gamma \times_{K_-} D_- \bigcup_{G/H} \Gamma \times_{K_+} D_+, \tag{4.2}$$

dónde  $D_{\pm}$  son las rebanadas normales a las órbitas singulares. Los correspondientes haces principales son  $K_{\pm} \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma/K_{\pm}$ .

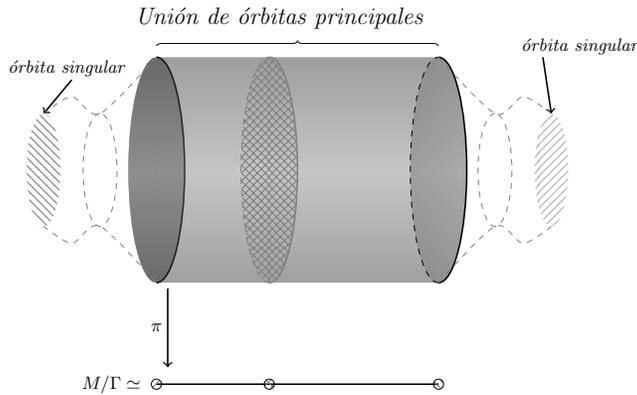


Figura 5. Representación de una variedad de cohomogeneidad uno.

## 5. El solitón de Koiso-Cao. Geometría y análisis

Sea  $U(n)$  el conjunto de las matrices unitarias, es decir, matrices  $A$  de tamaño  $n \times n$  con entradas complejas tales que:  $AA^* = A^*A = I_n$ , donde  $A^*$  denota la transpuesta conjugada de  $A$ , y la matriz  $I_n$  es la matriz identidad de tamaño  $n \times n$ . Es un grupo de Lie compacto y conexo.

Consideremos los grupos:

$$\Gamma = U(2), \quad H = U(1), \quad K_+ = K_- = U(1) \times U(1).$$

Aquí los subgrupos  $H$  y  $K_+ = K_-$ , como subgrupo de  $U(2)$  se ven a través de los encajes:

$$e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad \text{y } (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Dado que  $K_{\pm}/H = U(1) = S^1$ , estos grupos inducen una acción de cohomogeneidad uno en una variedad  $M$  de dimensión 4, cuyas órbitas principales son difeomorfas a  $S^3$ , y las órbitas singulares son ambas difeomorfas a  $S^2$ . Por la descomposición (4.2),  $M$  es equivariantemente difeomorfa al  $S^2$ -haz:

$$M \simeq S^3 \times_{S^1} S^2 \bigcup_{S^3} S^3 \times_{S^1} S^2 \simeq S^3 \times_{S^1} S^2.$$

donde  $S^1$  actúa en  $S^2 = \{(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + x^2 = 1\}$  mediante:

$$S^1 \times S^2 \rightarrow S^2, \quad (e^{i\theta}, (z, x)) \mapsto (e^{i\theta} z, x).$$

Por lo tanto,  $S^3 \times_{S^1} S^2$  es el haz asociado a la fibración de Hopf clásica  $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ . De hecho, los únicos  $S^2$ -haces son el haz trivial  $S^2 \times S^2$  y  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ . Resulta que  $M = \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ . Denotaremos el espacio de órbitas por  $M/U(2) = [\alpha, \beta]$ .

En esta sección, seguimos la descripción dada en [17]. Consideremos  $h : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  la única solución (diferenciable) positiva a la ecuación:

$$2hh'' + 4h'^2 - 4 + h^2(1 + ch'^2) = 0. \quad (5.1)$$

que satisface  $h'(\alpha) = h'(\beta) = 0$  y  $h(\alpha)h''(\alpha) = -h(\beta)h''(\beta) = -1$ . Aquí  $c$  es la única raíz de la función:

$$\xi(x) = e^{2x}(2 - 4x + 3x^2) - 2 + x^2.$$

Se puede ver que  $-1 < c < -1/2$ . Se obtiene  $h(\alpha) = \sqrt{6}$  y  $h(\beta) = \sqrt{2}$ . Sean  $g_o$  y  $g_o^2$  las métricas redondas en  $S^1$  y  $S^2$ , respectivamente. Se demuestra que con  $f = -hh'$ , la métrica

$$g = dt^2 + f^2(t)g_o + h^2(t)g_o^2,$$

con las condiciones sobre  $h$  antes mencionadas, determina un solitón de Ricci  $U(2)$ -invariante, con estructura Kähler, sobre  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ . De hecho, la condición Kähler es equivalente a la relación  $f = -hh'$ . El trabajo de X. J. Wang and X. Zhu [18] implica directamente que esta métrica debe ser el solitón de Koiso-Cao.

La métrica  $U(2)$ -invariante  $g_t = f^2(t)g_o + h^2(t)g_o^2$  es tal que la fibración de Hopf

$$(S^1, f^2(t)g_o) \hookrightarrow (S^3, g_t) \longrightarrow (S^2, h^2(t)g_o^2)$$

es una submersión riemanniana.

Con esta perspectiva se pueden dar aspectos del solitón de Koiso-Cao de forma explícita. Mencionaremos algunos.

- El potencial del solitón es la función  $f = -\frac{ch^2}{2}$ .
- La curvatura de Ricci está acotada por:

$$0 < 1 + c \leq Ric_g \leq 1 - c$$

- El volumen del solitón es  $16\pi^2$ .
- La curvatura escalar, en términos de  $h$ , está dada por:

$$S_g = 4ch'^2 + 2chh'' + 4.$$

## 6. Preguntas y problemas sobre solitones de Ricci

### Topología

Se sabe que la existencia de una métrica de Einstein en dimensión 4 es una condición necesaria para que se satisfaga la *desigualdad de Hitchin-Thorpe*. La pregunta correspondiente al respecto de solitones permanece abierta. Algunos resultados parciales se han obtenido, imponiendo alguna condición adicional.

### Curvatura

Los solitones de Ricci que no se reducen a una métrica de Einstein aparecen como solitones de contracción. Si estos además son métricas Kähler, se demuestra que necesariamente la variedad subyacente tiene primera clase de Chern positiva, y por tanto curvatura de Ricci positiva. Sin embargo, en el caso general, es decir, si no es necesariamente una métrica Kähler, no se sabe si un solitón que no se reduzca a una métrica de Einstein debe tener curvatura de Ricci positiva.

### Estructura Kähler

Los únicos ejemplos de solitones no triviales son métricas Kähler. Entonces no se sabe si todos deban ser necesariamente métricas Kähler.

## Ejemplos

Los únicos ejemplos explícitos conocidos en dimensión 4 son el solitón de Koiso-Cao y el solitón de Wang-Zhu. Esto en el sentido de que se sabe la variedad subyacente dónde se construyen. La métrica explícita para el de Wang-Zhu no se conoce. En dimensiones más altas, como se mencionó, existen en los espacios totales de ciertos haces fibrados. Sin embargo, no se conoce la variedad sobre la que se construyen.

## Problemas conformes

Se sabe que la *Ecuación de Yamabe* en una variedad de Einstein tiene una única solución, salvo homotecias. Para el caso de solitones de Ricci, el único caso resuelto es el del solitón de Koiso-Cao (véase [17]), para métricas invariantes por la acción de cohomogeneidad uno de  $U(2)$ . Otros problemas conformes como el problema de la  $Q$ -curvatura prescrita tampoco ha sido resuelto en el contexto de solitones.

## Bibliografía

- [1] M. M. Alexandrino y R. G. Bettiol, *Lie groups and geometric aspects of isometric actions*, Springer, Cham, 2015.
- [2] A. Betancourt de la Parra, A. S. Dancer y M. Y. Wang, «A Hamiltonian approach to the cohomogeneity one Ricci soliton equations and explicit examples of non-Kähler solitons», *J. Math. Phys.*, vol. 57, núm. 12, 2016, 122501, 17.
- [3] R. Bryant, «Local existence of gradient ricci solitons», *Unpublished*, 1987, .
- [4] H.-D. Cao, «Existence of gradient Kähler-Ricci solitons», *Elliptic and parabolic methods in geometry (Minneapolis, MN, 1994)*, A. K. Peters, Wellesley, MA, 1996, 1–16.
- [5] ———, «Recent progress on Ricci solitons», en *Recent advances in geometric analysis*, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 11, Int. Press, Somerville, MA, 2010, 1–38.
- [6] B. Chow y D. Knopf, *The Ricci flow: an introduction*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 110, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [7] A. S. Dancer y M. Y. Wang, «On Ricci solitons of cohomogeneity one», *Ann. Global Anal. Geom.*, vol. 39, núm. 3, 2011, 259–292.
- [8] M. Feldman, T. Ilmanen y D. Knopf, «Rotationally symmetric shrinking and expanding gradient Kähler-Ricci solitons», *J. Differential Geom.*, vol. 65, núm. 2, 2003, 169–209.
- [9] M. Fernández-López y E. García-Río, «A remark on compact Ricci solitons», *Math. Ann.*, vol. 340, núm. 4, 2008, 893–896.
- [10] R. S. Hamilton, «Three-manifolds with positive Ricci curvature», *J. Differential Geometry*, vol. 17, núm. 2, 1982, 255–306.
- [11] ———, «The Ricci flow on surfaces», en *Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986)*, Contemp. Math., vol. 71, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, 237–262.
- [12] R. S. Hamilton, «The formation of singularities in the Ricci flow», en *Surveys in differential geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993)*, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, 7–136.
- [13] T. Ivey, «Ricci solitons on compact three-manifolds», *Differential Geometry and its Applications*, vol. 3, núm. 4, 1993, 301–307.

- [14] N. Koiso, «On rotationally symmetric Hamilton's equation for Kähler-Einstein metric», *Recent topics in differential and analytic geometry, Advanced Studies in Pure Mathematics, Academic Press, Boston, MA*, vol. 18, núm. 1, 1990, 327–337.
- [15] G. Perelman, «The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications», 2002.
- [16] P. Topping, *Lectures on the Ricci flow*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 325, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [17] J. Torres Orozco, «Invariant solutions of the Yamabe equation on the Koiso-Cao soliton», *Differential Geom. Appl.*, vol. 56, 2018, 142–154.
- [18] X.-J. Wang y X. Zhu, «Kähler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class», *Adv. Math.*, vol. 188, núm. 1, 2004, 87–103.