

DOI: <https://doi.org/10.47234/mm.8005>

Alebrije matemático

Víctor F. Breña Medina

Departamento Académico de Matemáticas
ITAM

victor.brena@itam.mx,

Pablo Castañeda

Departamento Académico de Matemáticas
ITAM

pablo.castaneda@itam.mx,

Leobardo Fernández

Departamento Académico de Matemáticas
ITAM

leobardo.fernandez@itam.mx

y

Maira Madriz Mendoza

Departamento Académico de Matemáticas
ITAM

maira.madriz@itam.mx

1. Introducción

Este breve ensayo repasa un ejercicio interesante que nos topamos hace algún tiempo en manos de uno de los grandes matemáticos mexicanos, Santiago López de Medrano, profesor de la Facultad de Ciencias de la UNAM y además investigador del IMATE. Aunque no pudimos dar con las notas originales sobre la construcción **de** su «monstruo», la variante aquí presentada es simplemente una alegoría onírica de aquel recuerdo, es un *alebrije para Santiago*.

Es también un reflejo de nuestra formación en la Facultad de Ciencias de la UNAM así como un eco de la herencia para la carrera de matemáticas aplicadas del ITAM. Hemos ayudado en su desarrollo por al menos una décima parte de su existencia; todo un lustro. De hecho, sumando nuestros aportes, podríamos decir que hemos contribuido como docentes más de tres quintas partes de su vida.

Palabras clave: funciones de prueba, conjuntos de dimensión nula, funciones singulares, teorema del valor medio, teorema fundamental del cálculo, series de Taylor.

Rehilamos estas dos ideas, en esta ilustración figurada, al presentar objetos singulares: funciones que se anulan en una infinidad de lugares, sin embargo, son $\mathcal{C}^\infty([0, 1])$, es decir, tan suaves como queramos en su dominio de definición. Por si fuera poco, estos monstruos y alebrijes tienen la característica de que su integral suma uno. Para ello, usaremos técnicas de Cálculo Diferencial e Integral II, materia que hemos impartido de manera coordinada.

El estudio de las relaciones de correspondencia entre conjuntos es una de las tareas fundamentales de todo estudiante de matemáticas y áreas afines. Una de las razones cruciales de esto yace en el hecho de que una amplia diversidad de fenómenos naturales y no naturales, al igual que sus características, pueden ser representadas por funciones. Ejemplos de esto se pueden encontrar en muchas áreas del conocimiento humano, por ejemplo: cuando utilizamos el *Sistema de Posicionamiento Global*, las funciones hiperbólicas juegan un papel fundamental; al hacer una búsqueda en alguna plataforma musical, la teoría de gráficas y el análisis de Fourier son sumamente útiles; o bien, cuando queremos averiguar sobre el alcance del intelecto humano y sus posibles implicaciones filosóficas, la teoría de conjuntos y sus fundamentos suelen arrojar interrogantes y respuestas sumamente alucinantes. Este ensayo tiene el objetivo de hacer un recorrido de algunas de las herramientas estudiadas en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral y, con esto, hacer una representación de cómo todos esos ejercicios que hacemos durante y fuera de clase acumulan ideas y conocimiento que nos permiten entender retos de diversa índole.

En la sección 2 daremos una breve introducción y la construcción geométrica de un conjunto muy famoso en diversas áreas de las matemáticas, nos referimos al extravagante y fascinante *Conjunto de Cantor*. Dicho conjunto representa el cimiento de nuestros monstruos y alebrijes.

Una vez presentados el conjunto de Cantor y los conjuntos n -arios de Cantor, en la sección 3 recordaremos los ingredientes básicos de una de las series más sencillas e importantes: la *serie geométrica*. En la exposición se incluye también un ejemplo geométrico que tiene como objeto hacer una conexión entre los conjuntos de Cantor y la convergencia que dicha serie provee.

Rumbo a la sección 4, discutimos las características que debe satisfacer una *función de prueba*. El enfoque que seguimos es sustentado por medio de un ejemplo particular. Los argumentos esenciales aquí presentados descansan principalmente en las propiedades de traslación, elongación y composición de las funciones, junto con sus propiedades geométricas.

A continuación, en la sección 5 presentamos nuestro alegórico alebrije para Santiago, donde las ideas arrojadas en las discusiones de las secciones anteriores convergen. De este modo, en la sección 6 discutimos, por medio de métodos directos y, con la finalidad de ilustrar, que diferentes estrategias de análisis dan lugar al entendimiento de las propiedades de interés, particularmente, las que conciernen a la diferenciabilidad. Para lograr este objetivo, haremos uso de la función de prueba clásica, presentada también en la sección 4. Asimismo, en el dominio donde es diferente de cero, exhibimos las condiciones que permiten representar la integral de dicha función por medio de una serie de Taylor con el fin de obtener un valor aproximado de dicha integral.

Finalmente, concluimos este ensayo con algunos comentarios en la sección 7, donde dejamos el lápiz a mano para que se puedan construir otros monstruos y alebrijes del imaginario matemático.

2. El conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor fue construido a fines del s. XIX por George Cantor para resolver un problema que se había planteado en el umbral de la topología. Dicho problema tenía el objetivo de averiguar si existía un subconjunto compacto no vacío de \mathbb{R} que fuera totalmente desconexo y denso en sí mismo. Digamos que fue el primer tratamiento sistemático de la topología de la recta real. Ya en el s. XX, no solo había mostrado la existencia de tal conjunto, sino que demostró que todos los conjuntos con estas características son topológicamente equivalentes.

Consideremos el intervalo unitario $C_0 = [0, 1]$ en la recta real y lo dividimos en tres subintervalos iguales, con el fin de obtener los intervalos $[0, 1/3]$, $(1/3, 2/3)$, $[2/3, 1]$. El primer paso de la construcción del conjunto de Cantor consiste en quitar el subintervalo abierto de en medio, es decir, quitamos a $I_{1,1} = (1/3, 2/3)$. Llamamos $C_1 = [0, 1] \setminus I_{1,1} = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ y así cada intervalo tiene longitud $1/3$ y la longitud de C_1 es $2/3$.

El segundo paso de la construcción consiste en repetir el proceso en cada uno de los intervalos de C_1 . Esto es, a cada intervalo de C_1 lo dividimos en tres partes iguales y le quitamos los tercios medios, $I_{2,1} = (1/3^2, 2/3^2)$ y $I_{2,2} = (7/3^2, 8/3^2)$.

Luego, el conjunto C_2 es la unión de 2^2 intervalos «compactos»

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 \setminus (I_{2,1} \cup I_{2,2}) \\ &= \left[0, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2}, 1\right] \end{aligned}$$

de longitud $1/3^2$, con lo cual la longitud de C_2 es $(2/3)^2$.

Al repetir el proceso, a cada intervalo de C_2 lo dividimos en tres partes iguales y a C_2 le quitamos los tercios medios, a saber,

$$I_{3,1}, \left(\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3}\right), I_{3,2} = \left(\frac{7}{3^3}, \frac{8}{3^3}\right), I_{3,3} = \left(\frac{19}{3^3}, \frac{20}{3^3}\right), I_{3,4} = \left(\frac{25}{3^3}, \frac{26}{3^3}\right).$$

Así obtenemos el tercer paso de la construcción, 2^3 intervalos compactos, esto es:

$$\begin{aligned} C_3 &= C_2 \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{2^3-1} I_{3,k} \right) \\ &= \left[0, \frac{1}{3^3}\right] \cup \left[\frac{2}{3^3}, \frac{3}{3^3}\right] \cup \left[\frac{6}{3^3}, \frac{7}{3^3}\right] \cup \left[\frac{8}{3^3}, \frac{9}{3^3}\right] \\ &\quad \cup \left[\frac{18}{3^3}, \frac{19}{3^3}\right] \cup \left[\frac{20}{3^3}, \frac{21}{3^3}\right] \cup \left[\frac{24}{3^3}, \frac{25}{3^3}\right] \cup \left[\frac{26}{3^3}, 1\right]. \end{aligned}$$

Notemos que cada intervalo de C_3 tiene longitud $1/3^3$ y la longitud total de C_3 es $(2/3)^3$.

Si continuamos la construcción, notamos que para cada $n \geq 1$, se construye C_n dividiendo en tres partes iguales a cada intervalo de C_{n-1} y eliminando los correspondientes tercios medios $I_{n,m}$ para algunas $m \in \mathbb{N}$. De manera que C_n es la unión de 2^n intervalos compactos, cada uno de ellos de longitud $1/3^n$, mientras que la suma de las longitudes de los intervalos que componen a C_n es igual a $2^n (1/3)^n = (2/3)^n$. Además, nótese que $C_n \subset C_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

El proceso se puede seguir indefinidamente. El **conjunto de Cantor**, lo denotaremos con la letra \mathcal{C} y se define como

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$



Figura 1. Cuatro iteraciones del conjunto de Cantor.

Cantor introduce en un pie de página de un artículo, la famosa caracterización de los elementos del conjunto de Cantor, a saber, que $x \in \mathcal{C}$ si y solo si existe una sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ con cada $a_k \in \{0, 2\}$ tal que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}. \quad (1)$$

Mostrar la convergencia aquí es una labor respetable, sin embargo, lo dejamos ahora en el tintero para retomar ideas semejantes en la sección 3.

La suma de las longitudes de los intervalos abiertos eliminados en este proceso es 1, de manera que, el conjunto de Cantor es de medida de Lebesgue 0.¹

El conjunto de Cantor es no numerable, esto lo podemos ver en la ecuación (1), porque cada a_k se puede elegir de dos formas y tenemos una cantidad numerable de a_k , es decir, tenemos 2^{\aleph_0} formas distintas en (1). No es difícil convencerse de que si tenemos dos sucesiones distintas $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, entonces podemos encontrar una k en donde $a_k \neq b_k$, lo que implica que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \neq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k},$$

es decir, cada una de estas sucesiones determina un único punto en \mathcal{C} .

En términos generales, el conjunto de Cantor es un espacio métrico, no vacío, compacto, perfecto (cerrado y denso en sí mismo) y totalmente desconexo (que sus componentes conexas son solo puntos). Más aún, entre las cosas más interesantes que podemos destacar de dicho conjunto encontramos que, si un espacio topológico X tiene todas las propiedades antes citadas, entonces X es homeomorfo al conjunto de Cantor. Además, todo espacio métrico y compacto es una imagen continua del conjunto de Cantor. Para un estudio detallado de este peculiar conjunto véase [8]. En [6] se discuten propiedades importantes del conjunto de Cantor cuando dejamos que la dinámica discreta actúe sobre él.

Hay otros conjuntos tipo Cantor mejor conocidos como los «conjuntos n -arios de Cantor», que son generalizaciones del Conjunto de Cantor.

El conjunto n -ario de Cantor, inicia partiendo el intervalo $F_0 = [0, 1]$ en un número impar de subintervalos iguales, digamos $n = 2p + 1$ con $p = 1, 2, 3, \dots$ y eliminamos los intervalos abiertos

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \left(\frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right), \dots, \left(\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}\right),$$

tal que

$$F_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

es el segundo conjunto importante a considerar.

En el siguiente paso, subdividimos a cada uno de los $p + 1$ intervalos restantes en n subintervalos iguales y eliminamos los subintervalos

¹Recordemos que esta medida es la forma estándar de asignar una longitud, véanse [2, 3].

abiertos pares (el segundo, el cuarto, \dots , el $2p$ -ésimo subintervalo), obteniendo así la unión de subintervalos cerrados F_2 . Continuando ininterrumpidamente, se obtiene que la intersección de todos los intervalos cerrados obtenidos en cada etapa de la nueva construcción; es otro conjunto tipo Cantor que goza de las mismas propiedades topológicas que el conjunto de Cantor. Luego, el **conjunto n -ario de Cantor** se define como

$$\mathcal{F}_n = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_k,$$

donde F_k está formado por $(p+1)^k$ intervalos cerrados ajenos de longitud $(1/n)^k$.

3. Sumas y series

En la sección anterior, la ecuación (1) representa a los elementos del conjunto de Cantor, la cual está dada en términos de una serie. Analizarla no es tarea sencilla, es decir, verificar rigurosamente que esta representación efectivamente es convergente requeriría una discusión detallada; véanse, por ejemplo, [5, 8]. Sin embargo, podemos explorar su naturaleza a través de la serie geométrica.

Recordemos que cuando tenemos una serie geométrica, esta es de la forma

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} ar^k \quad \text{con } a \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

cuya suma converge si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, donde

$$s_n = \sum_{k=1}^n ar^k.$$

No es difícil convencerse, haciendo la diferencia de la suma parcial s_n menos r veces esta, que

$$s_n = \frac{a(r - r^{n+1})}{1 - r}$$

y, si $|r| < 1$, entonces

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(r - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{ar}{1 - r} \quad (3)$$

converge.

En este artículo, las sumas que nos interesan son

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Veamos un ejemplo geométrico de cómo construir la segunda suma: dividamos en cuatro partes iguales un cuadrado con lados de tamaño uno. De esta manera, se tiene que cada uno de los subcuadrados resultantes tiene área $1/4$, tal como se observa en el cuadrado sombreado en el panel izquierdo s_1 de la figura 2. Ahora, en esta misma figura, el cuadrado negro se divide en cuatro partes iguales, tal como se puede ver en el panel central, denotado por s_2 ; de este modo, cada uno de los subcuadrados tiene área $1/16$. Si repetimos este proceso iterativamente, entonces tenemos el paso n -ésimo tal como se ilustra en el panel derecho s_n . Notemos, además, que al sumar las áreas de todos los subcuadrados sombreados, como se muestra esquemáticamente en el panel s_n , esta es igual a $1/3$ cuando $n \rightarrow \infty$. Este cálculo es equivalente a determinar el valor de la serie geométrica (2) con $a = 1$ y $r = 1/4$.

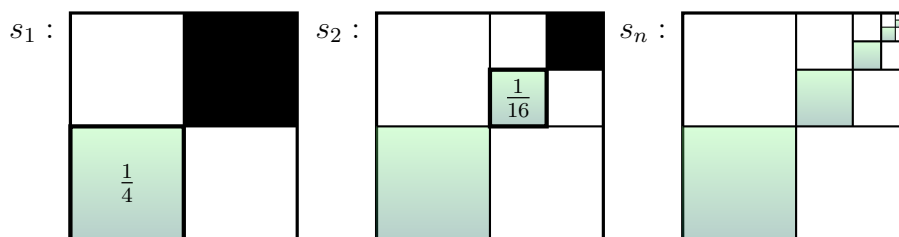


Figura 2. La suma de las áreas de los cuadrados sombreados es igual a la suma de las áreas de los cuadrados por arriba (de los cuadrados sombreados) e igual a la suma de las áreas de los cuadrados por abajo. Por lo tanto, la suma de las áreas de los cuadrados sombreados es $1/3$.

En particular, el proceso para construir la sucesión de la suma de las áreas de los cuadrados sombreados es análoga a la construcción de un conjunto de Cantor, de esta forma, se infiere que la convergencia de la serie que determina sus elementos (1) está íntimamente relacionada con la serie geométrica.

4. Nuestra función de prueba

Para entrar en detalles, necesitamos explicar qué es una *función de prueba*. Estas, a diferencia de lo que su nombre puede sugerir erróneamente, son objetos que resultan fundamentales en áreas como el análisis funcional, la teoría de distribuciones y la física matemática, entre otras. ¿Y qué son? Simplemente funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto, lo cual las convierte en objetos muy útiles para localizar el comportamiento de diversos fenómenos. Su exponente

clásico es

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{x^2}{x^2 - 1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad (4)$$

que pertenece a $\mathcal{C}_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R})$ y cuyo soporte (es decir, el cerrado donde es distinta de cero) es el intervalo $[-1, 1]$, como se discutirá detalladamente en la sección 6.

En esta sección, construiremos otra función con características análogas y que nos permitirá trabajar con ella de manera distinguida. Para ello, recordamos la tangente hiperbólica

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

la cual es una función impar, de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y cuya imagen es $I = (-1, 1)$, donde sus asíntotas horizontales son $y = -1$ para $x \rightarrow -\infty$ y $y = 1$ para $x \rightarrow \infty$, véase la figura 3(a).

Consideramos la variable

$$u(x) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1 - x^2} \quad \text{para } x \in (-1, 1),$$

que transforma I en todo \mathbb{R} como imagen. De manera que la $\tanh(u(x))$ manda el intervalo I en sí mismo; ver figura 3(b). Además, como la composición es una función impar, se sigue que las áreas sombreadas en la figura 3(b) son iguales.

Finalmente, reescalamos la función obtenida a la mitad junto con la función del intervalo $(-1, 0)$ en I , a través de $y(x) = 2x + 1$, con lo cual (al sumarle uno a la función resultante y dividirla entre dos) obtenemos una función del intervalo $(-1, 0)$ a $(0, 1)$ expresada por

$$x \longmapsto \frac{1}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}(2x + 1)\right)}{1 - (2x + 1)^2}\right) \right],$$

tal que el área bajo su curva es un medio; pues resulta ser la mitad del área del cuadrado $[-1, 0] \times [0, 1]$. Esto se ve gráficamente en la figura 3(c) al ver el reescalamiento comparado con la figura 3(b).

Para simplificar la expresión anterior y reescribir nuestra función, recordamos que $\text{sen}(\star + \pi/2) = \text{cos}(\star)$ y que la tangente hiperbólica es impar. Solamente nos hace falta tomar la otra mitad al reflejar y ampliar el intervalo de definición. De este modo, tenemos la función $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{\text{cos}(\pi x)}{4|x|(1 - |x|)}\right) \right] \quad \text{para } x \in [-1, 1], \quad (5)$$

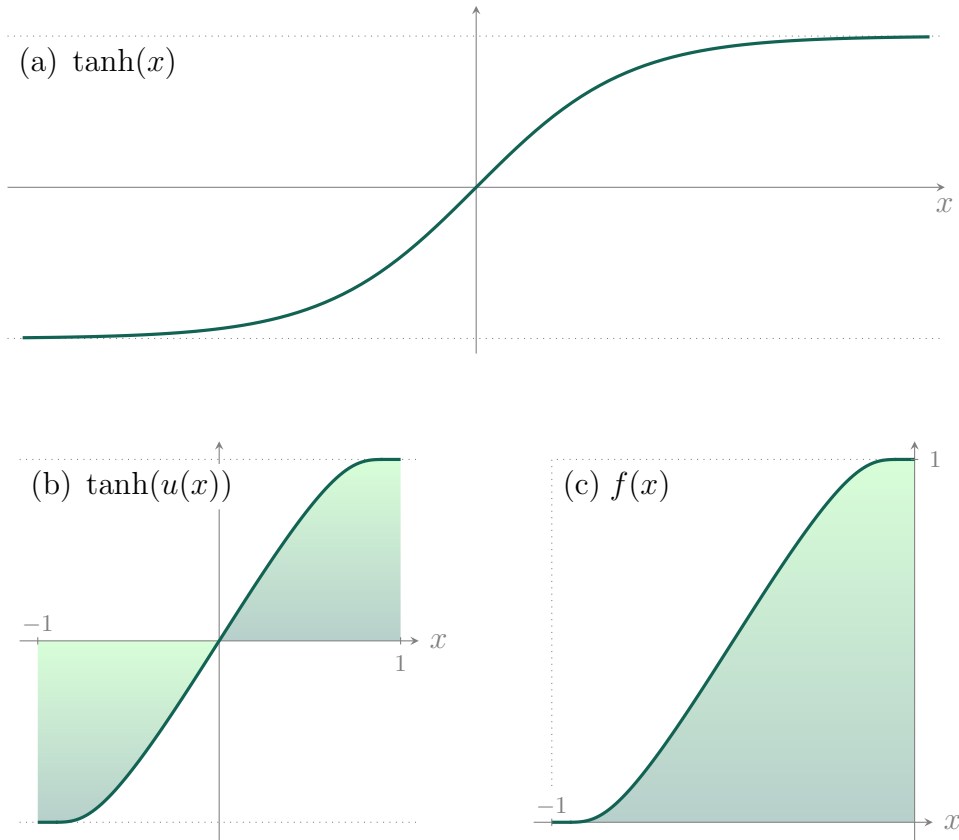


Figura 3. Desde el recuadro (a) hasta el (c) mostramos el camino con el cual garantizamos que el área bajo la curva de $f(x)$ en $[-1, 0]$ es un medio. Notamos que las áreas son iguales en el recuadro (b), debido a que la función es impar.

que, al definir $f(\pm 1) = 0$ y $f(0) = 1$, es una función continua en el cerrado. Su gráfica está en la figura 4.

Derivamos la función en la figura 3(b), es decir,

$$\frac{d}{dx} \tanh(u(x)) = \operatorname{sech}^2(u(x)) \frac{\pi(1-x^2) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 4x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2(1-x^2)^2}$$

y notamos que el límite de la secante hiperbólica tiende a cero cuando x se acerca a ± 1 , sin embargo, la fracción diverge. Puede mostrarse que la fracción es aproximada por fracciones de polinomios, por lo cual la secante hiperbólica «ganará». Este argumento sugiere que esta derivada, así como las de orden mayor, se anulan cuando $x \rightarrow \pm 1$. Es decir, a través del producto de funciones hiperbólicas que se anulan en los límites con funciones racionales, podemos entender que

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{d^n}{dx^n} f(x) = 0 \quad \text{se satisface para toda } n \in \mathbb{N}$$

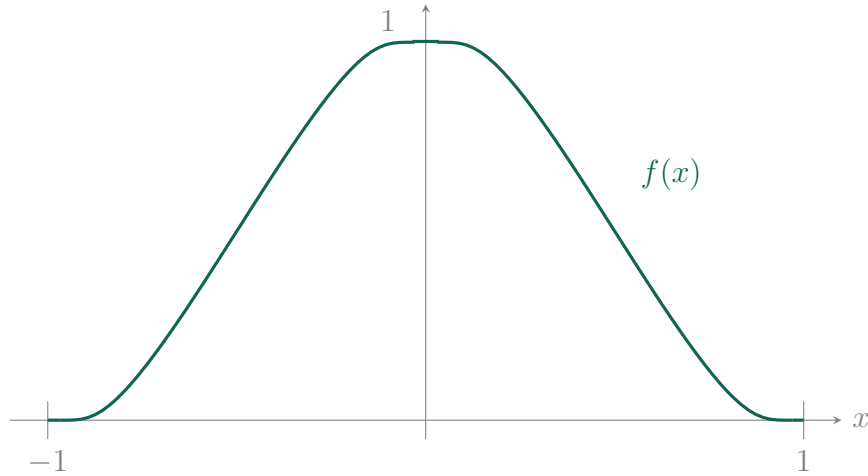


Figura 4. Nuestra función de prueba $f(x)$.

y lo mismo sucede cuando x se aproxima a 0 por ambos lados.

Dado que además tenemos para (5) que la integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{\cos(\pi x)}{4|x|(1-|x|)} \right) \right] dx = 1,$$

hemos mostrado el siguiente resultado.

Proposición 4.1. *La extensión $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de la función (5) como $f(x) \equiv 0$ para toda $x \notin [-1, 1]$ es una función de prueba unitaria, es decir, es $C_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ con soporte $[-1, 1]$ y tal que $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ se satisface.*

5. La construcción del alebrije

Queremos una curva distinta de cero fuera del conjunto de Cantor \mathcal{C} y que conserve sus propiedades de diferenciabilidad, es decir, que sea $C^\infty([0, 1])$. Además, queremos que su integral valga exactamente uno. Debemos entonces reescalar nuestra función en cada uno de los vacíos dejados por \mathcal{C} . Una manera muy bonita de sumar uno es con los ejemplos de la sección 3. Esta es una reminiscencia de las paradojas del movimiento de Zenón,² a partir de la cual se deduce que $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$. En este sentido, las series geométricas muestran no solamente que Aquiles no le gana a la tortuga, sino que también nos ayudarán a garantizar

²Recordemos que una de las paradojas más populares de Zenón consiste en que Aquiles compite en una carrera con la tortuga, donde ese le concede a esta que tenga siempre una ventaja, es decir: el corredor más rápido nunca puede superar a la corredora más lenta, puesto que los pies ligeros de Aquiles deben de llegar primero al punto donde la parsimoniosa tortuga comenzó a correr y esta, a su vez, habrá andado un tanto que Aquiles tendrá que recorrer dejándola avanzar un poco más. Bajo estas condiciones, el lector podrá deducir por sí mismo la serie geométrica y su valor; para mayores detalles de esta y otras paradojas similares, recomendamos por ejemplo, [10].

que el área de la región determinada por la curva y el eje de las abscisas de nuestro alebrije esté acotada.

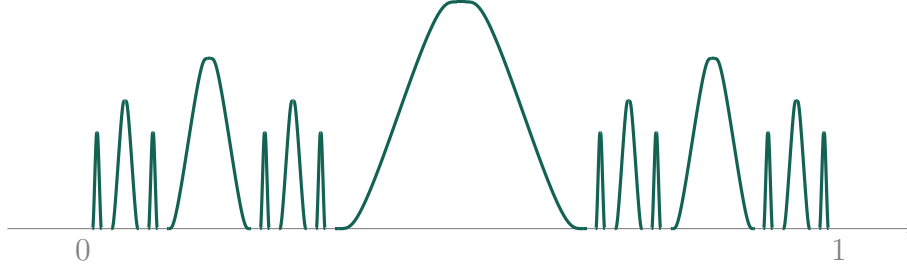


Figura 5. El alebrije para Santiago tiene «escamas como Quetzalcóatl». Realmente es mucho más espinoso, la escala vertical presentada aquí es diez veces mayor pues $h_k = 4(3/4)^k$ y su altura máxima es 4.

En la figura 4, reescalando la base de $[-1, 1]$ para que tenga una longitud b y que la altura en lugar de uno sea h , se tiene que nuestra función tiene área (bajo la curva): $A = bh/2$. Para el intervalo vacío $(1/2, 2/3)$ tendríamos una de nuestras curvas, pero cuando los vacíos tienen longitud $1/3^2$ hay dos, cuatro para $1/3^3$ y, en general, hay 2^{k-1} cuando este espacio tiene longitud $1/3^k$, como vimos en la sección 2. Llamemos b_k a las longitudes de la base y h_k a la altura que buscamos. Nuestro propósito es que la suma de las áreas sea uno, es decir,

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \frac{b_k h_k}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-2} \frac{h_k}{3^k} = \frac{1-r}{r} \sum_{k=1}^{\infty} r^k = 1,$$

al despejar y colocar $a = r/(1-r)$ en (3). Igualando término a término, tenemos que

$$2^{k-2} \frac{h_k}{3^k} = \frac{1-r}{r} r^k, \text{ lo que implica que } h_k = 4 \frac{1-r}{r} \left(\frac{3r}{2} \right)^k \quad (6)$$

satisface nuestras expectativas. Así, tenemos una visión del alebrije en la figura 5.

Vemos que la función es demasiado «espinosa», aún siendo completamente suave. Entonces podemos tomar otras proporciones, por ejemplo, cuando en la serie geométrica tomamos $r = 1/4$ y $a = 3$, obtenemos entonces el resultado de la figura 6.

6. Otra alternativa de clase $\mathcal{C}_{\text{loc}}^{\infty}(\mathbb{R})$ y los monstruos

Como se puede apreciar en la sección 4, la función de prueba $f(x)$ (que le dio vida a los alebrijes) parece ser de una naturaleza algebraica nada

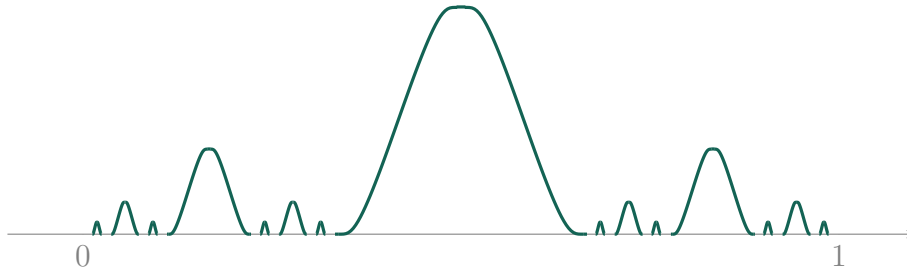


Figura 6. Otra versión del alebrije para Santiago al tomar las alturas con un decaimiento más rápido. Aquí $h_k = 12(3/8)^k$ y el área también converge a uno. La escala vertical hay que multiplicarla por treinta; la altura reescalada en el medio es la misma que la reescalada en la figura 5.

sencilla. Alternativamente, en esta sección discutiremos las propiedades de otra función con las mismas características, es decir, una función infinitamente diferenciable en un intervalo cerrado y acotado. Esta función es la que yace en el recuerdo como la que usa Santiago para crear sus monstruos.

A lo largo de la sección veremos que no únicamente esta función alterna comparte las mismas propiedades, sino que además utilizaremos conceptos clave y sencillos con el fin de ilustrar algunos cálculos que se pueden llevar a cabo por medios analíticos en contraposición a los geométricos expuestos en la sección 4.

Primero, observemos que la función de prueba (5), por decirlo de alguna manera, hereda sus propiedades de diferenciabilidad a partir de la función exponencial a través de la definición de $\tanh(\star)$. Tomando este argumento como inspiración, en este sentido, consideremos a la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada en (4). Los objetivos que buscamos para esta función consisten en: (a) verificar la diferenciabilidad en todo orden sobre su intervalo de soporte y (b) determinar el valor o una aproximación de su integral en dicho intervalo de soporte.

Con el fin de verificar si se satisfacen los objetivos anteriores, hagamos nuestra primera observación: el dominio de $g(x)$ es \mathbb{R} . Siendo $I_s = [-1, 1]$ el intervalo de soporte, pues $g(x) = 0$ para todo $|x| \geq 1$.

Ahora, debido a que $g(x)$ es una función par, consideraremos solamente el intervalo $I_0 = [0, \infty)$. De este modo, vemos que $g(x) = 0$ para todos los valores de $x \geq 1$, lo cual conduce a que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 0,$$

mientras que, si tomamos en cuenta cuando $x \rightarrow 1^-$, entonces el argumento de la exponencial

$$u = \frac{x^2}{x^2 - 1} \rightarrow -\infty, \quad (7)$$

puesto que el límite lateral izquierdo implica que $x < 1$, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0.$$

Observemos, además, que la composición $g \circ u$ transforma el intervalo I_0 como sigue: $u(I_0) = (-\infty, 0]$, lo cual significa que $g(u(I_0)) = (0, 1]$. En consecuencia, la función $g(x)$ es continua en todo el intervalo I_0 y, por lo tanto, en todo \mathbb{R} .

A continuación, vemos que para todo $x \in (0, 1)$, se tiene que

$$\frac{d}{dx}g(x) = -\frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2} < 0 \quad (8)$$

y, como consecuencia de la paridad de g , su derivada es impar, lo que se verifica a partir de (8). De esta manera, existe un único punto extremo en el punto $(0, g(0))$, el cual corresponde a un máximo global, es decir,

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \{g(x)\} = g(0).$$

Más aún, la imagen de esta función corresponde al intervalo cerrado y acotado dado por $[0, 1]$. Este resultado se resume como sigue.

Proposición 6.1. *La función $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ dada en (4) con soporte compacto I_s es continua en todo \mathbb{R} .*

Debido a que $g(x)$ es una función par, se tiene que todas las derivadas de orden impar se anulan en $x = 0$, como puede comprobarse por medio de la identidad $g(-x) = g(x)$.

Por otro lado, vemos que la función derivada (8) corresponde a un cociente de funciones diferenciables y debido a que $x \rightarrow 1^-$, se hace presente una forma indeterminada del tipo $0/0$. Por lo cual, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{d}{dx}g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x)}{(x^2 - 1)^2} (-2x), \quad (9)$$

donde el segundo factor en el argumento del límite está definido en una vecindad de $x = 1$. En consecuencia, veamos que el primer factor en el límite (9) puede calcularse por medio de observar que el argumento de $g(x)$, dado en (7), puede escribirse como $u = 1 - v$, donde $v = 1/(1 - x^2)$, de tal modo que definimos

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x)}{(x^2 - 1)^2} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{ev^2}{e^v} = 0,$$

como puede verificarse de manera sencilla por medio de la regla de L'Hôpital. Es decir, la primera derivada de $g(x)$ por la izquierda de $x = 1$ se anula.

Por otro lado, tomando en cuenta la fórmula (8), obtenemos que se satisface

$$\frac{d^2}{dx^2} g(x) = \frac{g(x)}{(x^2 - 1)^4} (6x^4 - 2). \quad (10)$$

Esta derivada (10) consiste en el producto de una función definida en todo \mathbb{R} y un cociente de funciones diferenciables, lo que conduce a la forma indeterminada del tipo $0/0$ cuando $x \rightarrow 1^-$. En consecuencia, podemos notar que al derivar n -veces la función $g(x)$ obtenemos una expresión de la forma

$$\frac{d^n}{dx^n} g(x) = \frac{g(x)p(x)}{(x^2 - 1)^{2n}},$$

donde $p(x)$ es una función polinomial definida en todo \mathbb{R} . Esto indica que, al calcular el límite cuando $x \rightarrow 1$, el límite lateral derecho será siempre cero, puesto que I_s es el intervalo de soporte, mientras que el límite lateral izquierdo conduce a calcular el límite

$$L_{2n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x)}{(x^2 - 1)^{2n}} \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Notemos que, por medio de la transformación $u = 1 - v$ utilizada para calcular el valor de la primera derivada cuando $x \rightarrow 1^-$, obtenemos que

$$L_{2n} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{ev^{2n}}{e^v},$$

el cual es nulo como consecuencia nuevamente de la regla de L'Hôpital. El resultado anterior se resume en la siguiente proposición.

Proposición 6.2. *La función $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ dada en (4) con soporte compacto I_s es diferenciable para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $x \in \mathbb{R}$.*

En la figura 7 se puede ver la gráfica de $g(x)$. Además, notemos que las proposiciones 6.1 y 6.2, el Teorema Fundamental del Cálculo y el Teorema de Taylor garantizan que la función $G(x)$, definida por

$$G(x) = \int_0^x g(u) du,$$

corresponde a la serie de Taylor de $G(x)$ alrededor de $x = 0$, dada por

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n G}{dx^n} \right|_{x=0} x^n \\ &= G(0) + \left. \frac{dG}{dx} \right|_{x=0} x + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 G}{dx^2} \right|_{x=0} x^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 G}{dx^3} \right|_{x=0} x^3 + \cdots, \end{aligned} \quad (11)$$

la cual converge uniformemente.

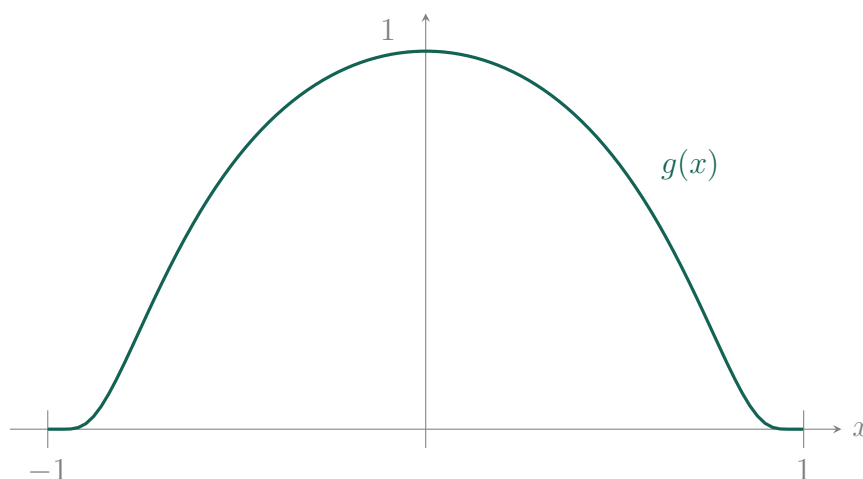


Figura 7. Gráfica de la función de prueba alternativa $g(x)$. Obsérvese que el área está determinada por el doble de la evaluación de la primitiva $G(x)$ en $x = 1$, es decir, $A = \int_{-1}^1 g(x) dx = 2G(1)$.

De este modo, notemos que el área de $g(x)$ en todo I_s está determinada por $2G(1)$. Siendo de esta forma, tenemos que el valor aproximado a orden cinco está dado por los primeros sumandos en (11). Es decir, considerando las expresiones (8) y (10), la derivada

$$\frac{d^4}{dx^4}g(x) = \frac{g(x)}{(x^2 - 1)^8} [4(30x^{10} + 45x^8 - 132x^6 + 58x^4 + 6x^2 - 3)],$$

junto con el resultado que dice que toda función impar tiene coeficientes de Taylor solamente de grado impar, tenemos que

$$\begin{aligned} G(0) = 0, \quad \frac{dG}{dx}\Big|_{x=0} = 1, \quad \frac{d^2G}{dx^2}\Big|_{x=0} = 0, \\ \frac{d^3G}{dx^3}\Big|_{x=0} = -2, \quad \frac{d^4G}{dx^4}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^5G}{dx^5}\Big|_{x=0} = -12. \end{aligned}$$

Por lo tanto, encontramos una aproximación de quinto orden del área de $g(x)$ en todo I_s , la cual está dada por

$$A = \int_{-1}^1 g(x) dx = 2G(1) \approx \frac{17}{15} = 1.1\bar{3} = A_s, \quad (12)$$

donde denotamos el área exacta por A y esta aproximación por A_s .

Numéricamente obtenemos, a través de la regla de cuadratura de Simpson, el valor de la integral en (12) como $A_{\text{num}} = 1.20690032244$ con precisión de máquina. De este modo, el valor aproximado de A_s en (12) tiene un error de orden 10^{-2} respecto al calculado numéricamente. A

saber, $|A_{\text{num}} - A_s| \leq 0.07356698910\bar{6}$, garantizando una aproximación adecuada.

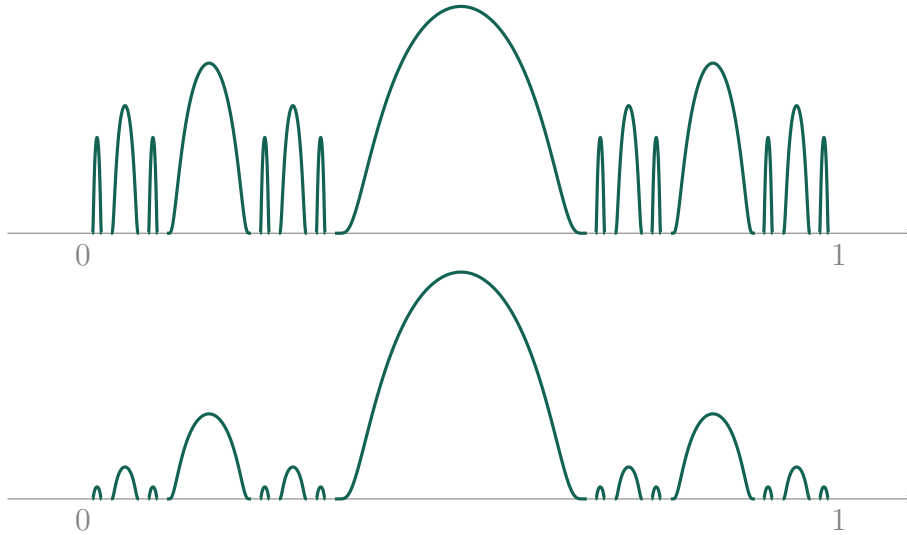


Figura 8. Los monstruos de Santiago son menos espinosos que los alebrijes. También se reescalan para que la máxima altura se conserve. En el primer caso, la altura original es poco más de ocho veces mayor, casi veinticinco veces en el segundo caso. Las alturas son $h_k = 4(3/4)^k/A$ para el monstruo de arriba y $h_k = 12(3/8)^k/A$ para el de abajo, conservando así con la escala el mayor de los elementos. Aquí A es el área de $g(x)$ en la figura 7, cuyo valor calculado numéricamente es $A_{\text{num}} = 1.20690032244 \approx A_s$.

7. A modo de despedida

Las ideas aquí planteadas son parte de la espina dorsal de los cursos de Cálculo Diferencial e Integral. En particular, los dos primeros de estos cursos evolucionarán como parte de «Cálculo Univariado» en la nueva versión de la carrera de Matemáticas Aplicadas del ITAM, véase [4]. En esta visión moderna, junto con la ayuda numérica que se incluirá para interpretar resultados, serán siempre importantes los textos clásicos. De ellos hay muchos, por ejemplo, las notas sobre cálculo del propio Santiago, [7].

Siempre podremos continuar y profundizar en otras direcciones, por ejemplo, en [9] se presenta un juego un poco distinto al nuestro, pero que genera cuestiones importantes. Los autores se ocupan en construir una función que tenga derivada, pero que esta sea discontinua.³ El

³De hecho, la raíz de este problema aparece en los textos de Volterra, quien exhibe una función con derivada acotada pero no integrable, su ejemplo puede consultarse en [3]. Los argumentos radican en la diferencia entre la integral de Riemann y la de Lebesgue, véase por ejemplo [1].

argumento, tomado al contrario nos hace preguntarnos qué sucede con las derivadas de los monstruos y alebrijes.

Notamos, ya sea en $f(x)$ o $g(x)$ (en (5) o (4), respectivamente) que al evaluarlas en $x = -1$ su valor es cero y que para $x = 0$, la altura es uno. Siguiendo el Teorema del Valor Medio podemos garantizar, en ambos casos, que existe un valor $c \in (-1, 0)$ tal que su derivada vale uno. ¿Qué sucede con la pendiente de los puntos respectivos a c cuando reescalamos $f(x)$ o $g(x)$ en los pequeños vacíos del conjunto de Cantor?

Recordamos de la sección 2 que la longitud de los k -ésimos intervalos es $1/3^k$ y, por otro lado, en (6) tenemos el reescalamiento de la altura. De esta manera, tenemos que la pendiente en c para ambos casos es

$$m_k = \frac{h_k}{b_k/2} = \frac{4 \frac{1-r}{r} \left(\frac{3r}{2}\right)^k}{\frac{1}{2 \cdot 3^k}} = 8 \frac{1-r}{r} \left(\frac{9r}{2}\right)^k.$$

Del cociente entre paréntesis, vemos que la pendiente diverge cuando $r > 2/9$ y converge cuando $r \leq 2/9$ se satisface. Por consiguiente, aunque los alebrijes en las figuras 5 y 6 y los monstruos en la figura 8 son completamente suaves, podemos encontrar puntos donde su derivada es mayor al valor que se quiera; en el límite dejan de ser $\mathcal{C}^\infty([0, 1])$.

Podemos jugar con las piezas de este ensayo y determinar cotas para la derivada, en digamos, un conjunto quinario de Cantor para construir un monstruoso *mûmakil*.⁴ En este caso, los intervalos tienen longitud $b_k = 1/5^k$ y tenemos $2 \cdot 3^{k-1}$ intervalos en cada iteración, véase la sección 2. De este modo, para que el área bajo la curva sume uno, necesitamos controlar las alturas h_k de modo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{k-1} \frac{b_k h_k}{2} A = A \sum_{k=1}^{\infty} 3^{k-1} \frac{h_k}{5^k} = \frac{1-r}{r} \sum_{k=1}^{\infty} r^k = 1.$$

Es decir, buscamos

$$h_k = \frac{3(1-r)}{Ar} \left(\frac{5r}{3}\right)^k,$$

lo que nos lleva a la medida de las pendientes con

$$m_k = \frac{\frac{3(1-r)}{Ar} \left(\frac{5r}{3}\right)^k}{\frac{1}{2 \cdot 5^k}} = \frac{6(1-r)}{Ar} \left(\frac{25r}{3}\right)^k,$$

⁴Para los monstruos y alebrijes usamos el conjunto de Cantor clásico. Ahora tenemos uno de naturaleza distinta, es por ello que lo hemos nombrado en homenaje como un monstruo de nuestro imaginario, el «olifante» de J.R.R. Tolkien.

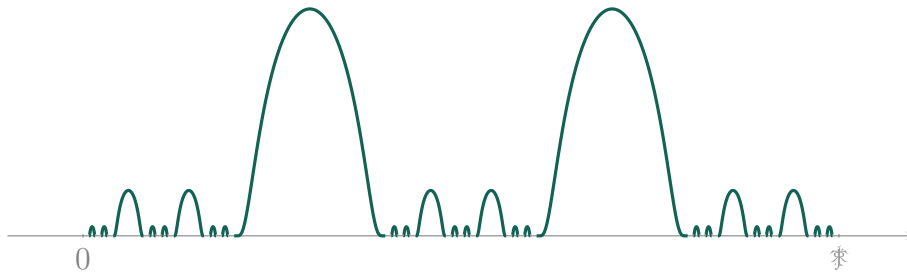


Figura 9. «Mr. Frodo, look! It's an Oliphant!» El *mûmakil* usa \mathcal{F}_5 y todas las funciones $g(x)$ utilizadas mantienen la misma proporción. La altura original es poco más de cuarenta y cinco veces esta, pues $h_k = (22/4)(1/5)^k$.

con lo cual, en la serie geométrica, usaremos $r = 3/25$ y $a = 3/22$, para que las derivadas de la función de prueba no crezcan sin cota, sino que se conserven. El monstruo así generado está representado en la figura 9.

Cabe hacer notar que en la sección 3 discutimos un ejemplo geométrico que condujo a una conexión interesante: la idea central de los conjuntos de Cantor, pero con una diferencia fundamental, no es exactamente la misma construcción. Más aún, por medio de las observaciones ahí planteadas, vemos que el valor de la serie geométrica puede ser deducido por medio de observar un proceso iterativo que permite partir a un conjunto en tres porciones idénticas. Dicho de otra manera, la convergencia capturada por la construcción de los alebrijes, los monstruos y el *mûmakil* es heredada a partir de la serie geométrica, mientras que las propiedades de las funciones de prueba sobre conjuntos de Cantor son caracterizadas principalmente por argumentos simples, desde el ojo clínico de una teoría desarrollada durante alrededor de 200 años, pero que finalmente culminó con las contribuciones de dos grandes pensadores del s. XVII: Isaac Newton y Gottfried Leibniz.

Por otro lado, es grandioso el poder de las matemáticas cuando se combinan distintas áreas para producir conocimiento. Aunque en la sección 3 tenemos un modo analítico de sumar la serie geométrica, se destaca la formulación cuando r es un cuarto a través de un juego geométrico representado en la figura 2. El poder de la geometría se revela plenamente en la sección 4 cuando evaluamos la integral de nuestra función de prueba, de modo exacto. En la sección 6 vemos que el camino analítico para la función de prueba clásica no es trivial. Es aquí donde la magia de Santiago López de Medrano actuaba para encontrar mejores cotas y, de este modo, construir su monstruo.

Agradecimientos

Queremos agradecer a Rubén Martínez Avendaño por dirigir exitosamente la edición de este número tan especial celebrando el 50 aniversario de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas en el ITAM. Asimismo estamos muy agradecidos por las dos revisiones detalladas que colegas anónimos han realizado y que han mejorado sustancialmente este trabajo. Este trabajo ha sido apoyado por la Asociación Mexicana de Cultura A.C.

Bibliografía

- [1] C. Bosch y J. Kucera, «De una integral a otra ¿cuál escoger? (el dilema entre la integral medidora y la integral de Riemann)», *Miscelánea Mat.*, núm. 28, 1999, 1–10.
- [2] R. Courant y F. John, *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, vol. 1, Limusa, 1976.
- [3] F. Galaz García, «Definiciones originales de la integral y medida de Lebesgue», *Miscelánea Mat.*, núm. 44, 2007, 83–100.
- [4] C. L. García, «Matemáticas Aplicadas en el ITAM. Quincuagésimo aniversario», *Miscelánea Mat.*, núm. 80, 2024, 1–8.
- [5] G. Grabinsky, «Euler, el prestidigitador de las series», *Miscelánea Mat.*, núm. 45, 2007, 55–66.
- [6] J. E. King Dávalos y H. Méndez Lango, *Sistemas dinámicos discretos*, Las prensas de ciencias, 2015.
- [7] S. López de Medrano, «Notas de cálculo», *Miscelánea Mat.*, núm. 12, 1977, 1–143.
- [8] J. Mateo Cortés, *Propiedades del conjunto de Cantor*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1997.
- [9] J. C. Ponce Campuzano y A. Rivera Figueroa, «Casos en los que no es aplicable la fórmula $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ », *Miscelánea Mat.*, núm. 48, 2009, 59–74.
- [10] R. M. Sainsbury, *Paradoxes*, 2.^a ed., Prensa de la Universidad de Cambridge, 2003.