Miscelánea Matemática **55** (2012) 45–63 SMM

Modelos de duopolio de Cournot con evasión de impuestos

Benjamín A. Itzá Ortiz*
Centro de Investigación en Matemáticas
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Pachuca de Soto, Hidalgo, 42090
México
itza@uaeh.edu.mx

Yaneli Mera Lorenzo
ilenay05@hotmail.com

Resumen

En el presente artículo analizamos modelos estático y dinámico del duopolio de Cournot con evasión de impuestos y se discuten las interpretaciones económicas de los resultados. En el caso del modelo dinámico, se introduce un tiempo de retardo y se presentan fórmulas para calcular el polinomio característico de su linealización.

Introducción

En nuestro país los ingresos que obtiene el gobierno federal han sido históricamente insuficientes para cubrir sus gastos y fomentar el desarrollo económico, lo cual resulta notorio ante las condiciones de pobreza de un alto porcentaje de la población [**2**]. No hay duda de que la evasión fiscal es un problema mayúsculo en las economías de las naciones, por lo que en nuestro país, el Servicio de Administración Tributaria (SAT) anualmente da a conocer en detalle los niveles de evasión fiscal

*Este trabajo fue parcialmente financiado por el PROMEP Oficio Num. 103.5/07/2584

en México. Dichos estudios son elaborados por instituciones académicas de prestigio en el país, de acuerdo con lo establecido en el Art. 29 de la Ley del SAT [**3**].

En el ámbito académico existe una extensa literatura que aborda el tema de la evasión fiscal y propone soluciones, ver por ejemplo [**5**, **7**, **9**, **10**, **12**]. En este artículo analizaremos modelos de duopolio de Cournot en los que se considera el pago de impuestos y la evasión de los mismos por parte de las dos empresas que conforman un duopolio del mercado.

Dividimos este artículo en dos secciones. En la primera introducimos terminología y planteamos un modelo estático de duopolio de Cournot con evasión de impuestos. También daremos una interpretación a nuestros resultados. En la segunda sección introducimos la versión dinámica con tiempo de retardo y proponemos fórmulas para el cálculo del polinomio característico de la linealización. Varios ejemplos de nuestros resultados se discuten al final de esta sección.

1. Un modelo estático de duopolio de Cournot con evasión de impuestos

El modelo de duopolio de Cournot es un ejemplo clásico en teoría de juegos [**4**, **8**]. Un duopolio es un mercado donde dos empresas venden un producto a un número grande de consumidores. El primer estudio de un duopolio se debe a Antoine Augustin Cournot, quien en 1838 propuso que las empresas ajustan sus niveles de producción de tal forma que cada una de ellas maximiza sus beneficios tomando la producción de la empresa rival dada. A una pareja (x_1, x_2) de niveles de producción que satisface estas condiciones se le llama un equilibrio de Cournot. En este caso, la primer empresa maximiza sus beneficios produciendo x_1 unidades al considerar que la segunda empresa produce x_2 unidades. De igual forma, la segunda empresa maximiza sus beneficios produciendo x_2 unidades al considerar que la primer empresa produce x_1 unidades.

Comenzamos por denotar por $x_i \geq 0$ al nivel de producción de la firma i, $i = 1, 2$. La función de demanda inversa, denotada por p, determina el precio del producto en el mercado dependiendo de la cantidad del producto que se introduce al mercado. La función p se asume dos veces diferenciable y estrictamente decreciente, y como además satisface la ley de la oferta y la demanda, existen números no negativos a y b, uno de ellos o ambos pueden ser infinito, tales que

$$\lim_{x \to a} p(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} p(x) = b.$$

La cantidad a puede interpretarse como aquella cantidad de productos en el mercado a partir de la cual el precio se desploma a cero, mientras que la cantidad b puede interpretarse como el precio que llega a alcanzar un producto cuando tiende a desaparecer del mercado. Supondremos también que para $i = 1, 2$, la función de demanda inversa satisface

$$p'(x_1 + x_2) + x_i p''(x_1 + x_2) \leq 0, \tag{1}$$

pues esta ecuación tiene una interpretación económica importante sobre las producciones de las empresas en el duopolio [**5**, **11**]. Puesto que la función de demanda inversa es estrictamente decreciente, también es verdad que $p'(x) < 0$. Junto con la suposición (1) obtenemos

$$2p'(x_1 + x_2) + x_i p''(x_1 + x_2) < 0. \tag{2}$$

El costo para producir x_i productos para la empresa i se denotará por $C_i(x_i)$, que se asume dos veces diferenciable, estrictamente creciente, convexa y satisface $C_i(0) = 0$. Las entradas de la empresa i están dadas por lo tanto por la fórmula $x_i\, p(x_1 + x_2)$ y sobre esta cantidad es sobre la cual se calcula el impuesto a pagar. Sin embargo, la empresa i elige declarar que sus entradas fueron por la cantidad z_i, de modo que $z_i \leq x_i\, p(x_1+x_2)$. Note que se permite que z_i sea una cantidad negativa, lo que significaría que la empresa i le reporta pérdidas al gobierno.

Vamos a suponer que el gobierno impone un impuesto $0 < \sigma < 1$ sobre la cantidad declarada sujeta a gravamen y que con probabilidad $0 < q_i < 1$ el gobierno sorprende a la empresa i evadiendo impuestos.

En caso de detectar que la empresa i incurrió en evasión fiscal, el gobierno procede a cobrar una penalidad sobre la cantidad $x_i p(x_1+x_2)-z_i$ evadida al fisco. Denotaremos por F a esta función de penalidad y la supondremos positiva, diferenciable, estrictamente creciente y estrictamente convexa. Además se supondrá que $F(0) = 0$, de modo que quien haga una declaración honesta no tenga por que pagar sanción alguna.

La función $P_i = P_i\,(x_1, x_2, z_1, z_2)$ de beneficio de la empresa i ($i = 1, 2$), consiste en la suma de dos términos. El primer término consiste en multiplicar la probabilidad $1-q_i$ de no ser detectado evadiendo impuestos por la ganancia esperada, donde por ganancia esperada se entiende el resultado de substraer a las entradas $x_i p(x_1 + p_2)$ de la empresa i el costo $C_i(x_i)$ y la cantidad a pagar de impuestos σz_i. El segundo término está dado por el producto de la probabilidad q_i de que la empresa i sea descubierta evadiendo impuestos multiplicada por la ganancia resultante, la cual se calcula substrayendo de las entradas $x_i\, p(x_1 + x_2)$ de la empresa i el impuesto $\sigma\, x_i\, p(x_1 + x_2)$ que honestamente se debe pagar, el costo de producción $C_i(x_i)$ y la multa $F\left(x_i p(x_1+x_2)-z_i\right)$ sobre la cantidad de impuesto evadida. Luego, la función de beneficio para la empresa i está dada por la fórmula:

$$\begin{aligned}
P_i\left(x_1, x_2, z_1, z_2\right) &= \left(1-q_i\right)\big(x_i\, p(x_1+x_2) - C_i(x_i) - \sigma z_i\big) \\
&\quad + q_i \Bigg((1-\sigma)\, x_i\, p(x_1+x_2) - C_i(x_i) \\
&\quad - F\left(x_i\, p(x_1+x_2) - z_i\right) \Bigg) \\
&= \left(1 - q_i\, \sigma\right) x_i\, p\left(x_1+x_2\right) \\
&\quad - q_i\, F\left(x_i\, p\left(x_1+x_2\right) - z_i\right) \\
&\quad - (1-q_i)\sigma z_i - C_i(x_i). \qquad (3)
\end{aligned}$$

Un equilibrio de Cournot en un duopolio con evasión de impuestos consiste en una pareja de niveles de producción (x_1, x_2) y una pareja de montos a declarar (z_1, z_2) de tal forma que la empresa i maximiza sus beneficios produciendo x_i unidades y declarando un monto z_i al considerar que la empresa j produce x_j unidades y declara un monto z_j. El problema de encontrar un equilibrio de Cournot con evasión de impuestos se reduce a la solución de ciertas ecuaciones como se establece a continuación. Cabe mencionar que la siguiente proposición se demuestra en [**5**] para el caso general en que se tengan $n \geq 2$ firmas compitiendo en el mercado (oligopolio), sin embargo, en dicho artículo los autores suponen que las funciones de costo son de manera particular de la forma $C_i(x_i) = cx_i$ con $c > 0$ constante, cosa que nosotros no necesitamos. También mencionamos que la siguiente proposición aparece sin demostración en [**7**, Proposición 1], sin embargo, la autora omite suponer la desigualdad (1) aunque los ejemplos presentados en dicho artículo si la satisfacen.

Proposición 1.1. *Los valores óptimos de x_1, x_2, z_1 y z_2 del problema del duopolio de Cournot planteado arriba se obtienen al solucionar el sistema de ecuaciones*

$$\begin{gathered}
\big(1 - q_i\sigma - q_i F'\left(x_i\, p\left(x_1+x_2\right) - z_i\right)\big) \qquad (4) \\
\big(p(x_1+x_2) + x_i\, p'(x_1+x_2)\big) - C_i'(x_i) = 0 \\
-(1-q_i)\,\sigma + q_i\, F'(x_i p(x_1+x_2) - z_i) = 0
\end{gathered}$$

donde $i = 1, 2$.

Demostración. Para encontrar la solución, se deben resolver las ecuaciones $\dfrac{\partial P_i}{\partial x_i} = 0$ y $\dfrac{\partial P_i}{\partial z_i} = 0$, para $i = 1, 2$; estas ecuaciones forman el sistema de ecuaciones (4) de la proposición. Solo falta por demostrar que la solución de dicho sistema efectivamente es la que optimiza el problema del duopolio de Cournot, es decir, debemos verificar que las funciones P_1 y P_2 alcanzan su máximo en la solución del sistema de ecuaciones (4). Por el Criterio de las Segundas Derivadas Parciales, basta mostrar que $\frac{\partial^2 P_i}{\partial z_i^2} < 0$ y $\frac{\partial^2 P_i}{\partial z_i^2}\frac{\partial^2 P_i}{\partial x_i^2} - \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial x_i \partial z_i}\right)^2 > 0$. Pero observe que

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial z_i^2} = -q_i F''\left(x_i p(x_1+x_2) - z_i\right) < 0,$$

es negativo pues la segunda derivada de F es positiva por ser F estrictamente convexa. Más aún, se verifica que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P_i}{\partial z_i^2}\frac{\partial^2 P_i}{\partial x_i^2} - \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial x_i \partial z_i}\right)^2 &= -q_i F''\left(x_i p(x_1+x_2) - z_i\ \right) \\ &\quad \Big((1-\sigma)\big(2p'\left(x_1+x_2\right) + x_i p''\left(x_1+x_2\right)\big) - C_i''(x_i)\Big) > 0,\end{aligned}$$

es positiva ya que la segunda derivada de F es positiva por lo dicho en el párrafo anterior, mientras que el factor $(1-\sigma)(2p'(x_1+x_2)+x_i p''(x_1 + x_2)) - C_i''(x_i)$ es negativo por (2) y por ser C_i convexa. □

A continuación demostraremos el resultado principal de esta sección, que nos permitirá discutir sobre la solución del sistema (4) de la proposición anterior.

Teorema 1.2. *El sistema de ecuaciones (4) puede reescribirse como* ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} p(x_1+x_2) + x_i p'(x_1+x_2) &= \frac{C_i'\left(x_i\right)}{1-\sigma} \\ F'\left(x_i\, p\left(x_1+x_2\right) - z_i\right) &= \frac{1-q_i}{q_i}\ \sigma. \end{aligned} \tag{5}$$

Más aún, el sistema de ecuaciones (4) induce el siguiente sistema de ecuaciones ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} x_i p\left(x_1+x_2\right) &= \frac{C_i\left(x_i\right)}{1-\sigma} \\ F\left(x_i\ p\left(x_1+x_2\right) - z_i\right) &= F\left(x_i\ p\left(x_1+x_2\right)\right) - \left(\frac{1-q_i}{q_i}\right)\sigma z_i \\ F\left(x_i\ p\left(x_1+x_2\right) - z_i\right) &= \left(\frac{1-q_i}{q_i}\right)\left(\frac{\sigma C_i(x_i)}{1-\sigma}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

Demostración. Para $i = 1, 2$, de la segunda ecuación del sistema (4) obtenemos

$$F'\left(x_i\, p\left(x_1 + x_2\right) - z_i\right) = \frac{1 - q_i}{q_i}\sigma, \tag{7}$$

y sustituyendo (7) en la primera ecuación del sistema (4) se deduce

$$p(x_1 + x_2) + x_i\; p'(x_1 + x_2) = \frac{C_i'(x_i)}{1 - \sigma}. \tag{8}$$

Observe que la ecuación anterior (8) puede reescribirse como

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i p\left(x_1 + x_2\right)\right) = \frac{C_i'(x_i)}{1 - \sigma}$$

y ahora integrando ambos lados con respecto de x_i y usando que $C(0) = 0$, se obtiene

$$x_i\, p(x_1 + x_2) = \frac{C_i(x_i)}{1 - \sigma}$$

como se quería.

Por otro lado, la ecuación (7) puede reescribirse como

$$-\frac{\partial}{\partial z_i}\Big(F\left(x_i\, p\left(x_1 + x_2\right) - z_i\right)\Big) = \frac{1 - q_i}{q_i}\sigma,$$

por lo que al integrar con respecto de z_i se obtiene

$$F\left(x_i p\left(x_1 + x_2\right)\right) - F\left(x_i\, p\left(x_1 + x_2\right) - z_i\right) = \left(\frac{1 - q_i}{q_i}\right)\sigma z_i$$

equivalentemente,

$$F\left(x_i\;p\left(x_1 + x_2\right) - z_i\right) = F\left(x_i\;p\left(x_1 + x_2\right)\right) - \left(\frac{1 - q_i}{q_i}\right)\sigma z_i.$$

Para completar la prueba, multiplicamos (7) y (8) para obtener

$$F'(x_i\, p(x_1{+}x_2){-}z_i)\,\Big(p(x_1{+}x_2){+}x_i p'(x_1{+}x_2)\Big) = \left(\frac{C_i'(x_i)}{1 - \sigma}\right)\left(\frac{1 - q_i}{q_i}\right)\sigma$$

integrando ambos lados respecto de x_i y sustituyendo $F(0) = 0 = C_i(0)$, concluimos que

$$F\left(x_i\, p\left(x_1 + x_2\right) - z_i\right) = \left(\frac{1 - q_i}{q_i}\right)\left(\frac{\sigma C_i(x_i)}{1 - \sigma}\right).$$

□

Ahora podemos demostrar el siguiente corolario que tendrá interpretaciones económicas interesantes.

Corolario 1.3. *El sistema de ecuaciones (5) induce, para* $i = 1, 2$ *y* $j = 1, 2$, *las siguientes ecuaciones y desigualdades:*

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = 0.$$

Además

$$\frac{\partial z_i}{\partial q_j} > 0 \text{ si } i = j \qquad y \qquad \frac{\partial z_i}{\partial q_j} = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Finalmente

$$\frac{\partial z_i}{\partial \sigma} < 0 \qquad y \qquad \frac{\partial x_i}{\partial \sigma} < 0.$$

Demostración. Derivando implícitamente la primera ecuación del sistema (5) con respecto a q_j se obtiene

$$\Big((1-\sigma)\big(2p'(x_1+x_2)+x_i p''(x_1+x_2)\big) - C_i''(x_i)\Big)\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = 0$$

y puesto que $(1-\sigma)\left(2p'(x_1+x_2)+x_i p''(x_1+x_2)\right) - C_i''(x_i)$ es negativo, por la hipótesis (2) y por ser C_i convexa, concluimos que $\dfrac{\partial x_i}{\partial q_j} = 0$.

Derivando ahora la segunda ecuación del sistema (5) con respecto a q_j se obtiene

$$F''\left(x_i p(x_1+x_2) - z_i)\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} p(x_1+x_2) + x_i p'(x_1+x_2)\frac{\partial x_i}{\partial q_j} - \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right) = \sigma \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{1}{q_i}$$

pero acabamos de probar que $\dfrac{\partial x_i}{\partial q_j} = 0$ y tenemos además $F''(x_i p(x_1 + x_2) - z_i) > 0$ por ser F estrictamente convexa, por lo que la ecuación anterior implica que

$$\frac{\partial z_i}{\partial q_j} = -\frac{\sigma \dfrac{\partial}{\partial q_j}\dfrac{1}{q_i}}{F''\left(x_i p(x_1+x_2) - z_i)\right)}$$

En el caso para el que $i \neq j$, el lado derecho de la ecuación anterior es cero, como se quería demostrar; mientras que para el caso $i = j$ la ecuación anterior se vuelve

$$\frac{\partial z_i}{\partial q_i} = \frac{\sigma}{q_i^2 F''\left(x_i p(x_1 + x_2) - z_i\right)}$$

el cual es positivo como se quería demostrar.

A continuación vamos a calcular $\dfrac{\partial x_i}{\partial \sigma}$ y con este propósito diferenciamos la primera ecucación en (5) con respecto de σ para obtener

$$\begin{aligned}(1-\sigma)\left(\frac{\partial x_i}{\partial \sigma} p'(x_1+x_2) + x_i p''(x_1+x_2)\frac{\partial x_i}{\partial \sigma} + p'(x_1+x_2)\frac{\partial x_i}{\partial \sigma}\right)& \\ -\left(x_i p'(x_1+x_2) + p(x_1+x_2)\right) = C_i''(x_i)\frac{\partial x_i}{\partial \sigma}&.\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\partial x_i}{\partial \sigma} = \frac{x_i p'(x_1+x_2) + p(x_1+x_2)}{(1-\sigma)\left(2p'(x_1+x_2) - x_i p''(x_1+x_2)\right) - C_i''(x_i)} \tag{9}$$

Sustituyendo la primera ecuación del sistema (5) se obtiene

$$\frac{\partial x_i}{\partial \sigma} = \frac{C_i'(x_i)}{(1-\sigma)\big)\big((1-\sigma)\left(2p'(x_1+x_2) - x_i p''(x_1+x_2)\right) - C_i''(x_i)\big)}$$

el cual es negativo por ser C_i estrictamente creciente y convexo y por la desigualdad (2). Finalmente, derivando la segunda ecuación del sistema (5) con respecto a σ se obtiene

$$F''\left(x_i p(x_1+x_2) - z_i\right)\left(\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(x_i p(x_1+x_2)\right) - \frac{\partial z_i}{\partial \sigma}\right) = \frac{1-q_i}{q_i}$$

de donde

$$\frac{\partial z_i}{\partial \sigma} = \frac{F''\left(x_i p(x_1+x_2) - z_i\right)\dfrac{\partial}{\partial \sigma}\left(x_i p(x_1+x_2)\right) - \dfrac{1-q_i}{q_i}}{F''\left(x_i p(x_1+x_2) - z_i\right).} \tag{10}$$

Pero utilizando (9) uno calcula que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(x_i p(x_1+x_2)\right) &= \frac{\partial x_i}{\partial \sigma}\left(x_i p'(x_1+x_2) + p(x_1+x_2)\right) \\ &= \frac{\left(x_i p'(x_1+x_2) + p(x_1+x_2)\right)^2}{(1-\sigma)\left(2p'(x_1+x_2) - x_i p''(x_1+x_2)\right) - C_i''(x_i)} \\ &< 0\end{aligned}$$

puesto que el numerador es positivo mientras que el denominador es negativo. Sustituyendo la anterior expresión en (10), se concluye que $\dfrac{\partial z_i}{\partial \sigma}$ es negativa, pues $F''\left(x_i p(x_1+x_2)-z_i\right)$ es positiva por ser F estrictamente creciente y estrictamente convexa. □

El teorema 1.2 y corolario 1.3 nos muestran aspectos cruciales en el comportamiento de las dos empresas que conforman el duopolio cuando se tiene por hipótesis que se quiere maximizar la función beneficio (3):

- La primera ecuación del sistema (5) nos dice que en el punto de equilibrio el costo marginal es igual a los ingresos marginales después de impuestos; mas aún, esta ecuación establece que los niveles óptimos de producción, y por tanto el ingreso, de las empresas no se ven afectados por sus actividades de evasión de impuestos.

- La segunda ecuación del sistema (5) puede ser interpretado como el equilibrio entre la penalidad marginal con la probabilidad de que no sean sorprendidos evadiendo impuestos. En otras palabras, puesto que dicha ecuación es equivalente a

$$q_i \frac{\partial}{\partial z_i} F\left(x_i p(x_1+x_2)-z_i\right)=(1-q_i)\sigma \frac{\partial}{\partial z_i}\left(x_i p(x_1+x_2)-z_i\right)$$

  se observa que en el punto de equilibrio el ahorro marginal de la evasión fiscal es igual a la penalidad marginal.

- La ecuación $\dfrac{\partial x_i}{\partial q_j}=0$ del corolario 1.3 reafirma lo dicho en el primer punto de este apartado: que los niveles de producción son independientes de la probabilidad de ser sorprendido evadiendo impuestos.

- La desigualdad $\dfrac{\partial z_i}{\partial q_j}>0$ si $i=j$ en el corolario 1.3 nos dice que las empresas tienden a ser más honestas en sus declaraciones de impuestos si saben que aumenta la posibilidad de ser sorprendidos en el ilícito, mientras que $\dfrac{\partial z_i}{\partial q_j}=0$ si $i\neq j$ nos dice que para efectos de maximizar sus ganacias, a la empresa i no le afecta que descubran a su empresa rival evadiendo impuestos.

- La desigualdad $\dfrac{\partial z_i}{\partial \sigma}<0$ del corolario 1.3 afirma que si aumenta la tasa del impuesto entonces las empresas tienden a disminuir la cantidad de ingresos declarada, es decir, tienden a ser deshonestos.

- Como última observación nos damos cuenta que la desigualdad $\dfrac{\partial x_i}{\partial \sigma} < 0$ del corolario 1.3 afirma que si aumenta la tasa del impuesto entonces las empresas tienden a disminuir su producción. En otras palabras, de la ecuación (9) podemos interpretar que el signo de razón de cambio del nivel de producción con respecto a la tasa de impuestos es contrario al signo del ingreso marginal.

Por lo tanto, puede afirmarse que las auditorías pueden considerarse como buenos disuasorios para la evasión fiscal, pues el incremento en la posibilidad de ser detectado evadiendo impuestos, uno de los objetivos de las auditorías, logra que las empresas tiendan a ser honestas en su declaración de impuestos.

2. Un modelo dinámico de duopolio de Cournot con evasión de impuestos y tiempo de retardo

Sea τ un número real positivo. Diremos que el sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = G\left(\vec{x}, \vec{x}_\tau\right) \tag{11}$$

de ecuaciones diferenciales ordinarias de n ecuaciones con n incógnitas es un *sistema con retardo* τ, si $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $\vec{x}_\tau(t) = (x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau))$ y $G(\vec{x}, \vec{x}_\tau) = (g_1(\vec{x}, \vec{x}_\tau), g_2(\vec{x}, \vec{x}_\tau), \ldots, g_n(\vec{x}, \vec{x}_\tau))$. Un punto de equilibrio $\vec{x}^*(t) = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ es aquel que satisface $G(\vec{x}^*, \vec{x}_\tau^*) = G(\vec{x}^*, \vec{x}^*) = 0$.

La siguiente proposición aparece en [**1**] para el caso $n = 1$.

Proposición 2.1. *La linealización del sistema (11) en un punto de equilibrio es*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + B\vec{x}_\tau \tag{12}$$

donde $A = \begin{pmatrix} D_1g_1 & D_2g_1 & \ldots & D_ng_1 \\ D_1g_2 & D_2g_2 & \ldots & D_ng_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_1g_n & D_2g_n & \ldots & D_ng_n \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} D_{n+1}g_1 & D_{n+2}g_1 & \ldots & D_{2n}g_1 \\ D_{n+1}g_2 & D_{n+2}g_2 & \ldots & D_{2n}g_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_{n+1}g_n & D_{n+2}g_n & \ldots & D_{2n}g_n \end{pmatrix}$ *y las derivadas parciales se eva-*

lúan en el punto de equilibrio dado. El polinomio característico correspondiente está dado por la fórmula

$$p(\lambda) = \det\big(A + e^{-\lambda\tau}B - \lambda I\big) = 0.$$

Demostración. Sea $\vec{x}^*(t) = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ un punto de equilibrio del sistema (11). Entonces $G(\vec{x}^*, \vec{x}_\tau^*) = G(\vec{x}^*, \vec{x}^*) = 0$. Considere $\vec{x}^* + \epsilon\vec{x}$ una solución cercana al punto de equilibrio dado. Entonces $\epsilon\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \dfrac{d\,(\vec{x}^* + \epsilon\vec{x})}{dt} = G(\vec{x}^* + \epsilon\vec{x}, \vec{x}^* + \epsilon\vec{x}_\tau)$.

Por el Teorema de Taylor

$$\begin{aligned} G(\vec{x}^* + \epsilon\vec{x}, \vec{x}^* + \epsilon\vec{x}_\tau) &\approx G(\vec{x}^*, \vec{x}^*) + A\cdot\epsilon\vec{x} + B\cdot\epsilon\vec{x}_\tau \\ &= \epsilon\big(A\vec{x} + B\vec{x}_\tau\big) \end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + B\vec{x}_\tau. \tag{13}$$

Para calcular el polinomio característico, sea

$$\vec{x}(t) = \vec{v}\,e^{\lambda t}$$

con $\vec{v} \neq 0$. Entonces $\vec{x}_\tau(t) = \vec{v}e^{\lambda(t-\tau)} = e^{-\lambda\tau}\vec{x}(t)$. Sustituyendo en (13) obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda\vec{x} &= \frac{d\vec{x}}{dt} \\ &= A\vec{x} + B\cdot e^{-\lambda\tau}\vec{x} \\ &= \big(A + e^{-\lambda t}\,B\big)\vec{x}. \end{aligned}$$

De donde

$$\big(A + e^{-\lambda t}\,B - \lambda I\big)\vec{x} = 0.$$

Y como $\vec{v} \neq 0$ implica $\vec{x} \neq 0$, concluimos que

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\big(A + e^{-\lambda t}\,B - \lambda I\big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

es el polinomio característico del sistema, como se quería demostrar. □

Para formular un modelo dinámico del duopolio de Cournot con evasión de impuestos, comenzamos suponiendo que la empresa i $(i = 1, 2)$ tiene un nivel de producción $x_i(t)$ que varía continuamente con respecto al tiempo t y es una función diferenciable. Similarmente, se asume que la empresa i decide declarar al gobierno, para propósitos del cálculo de sus impuestos, que en el instante t sus entradas son por la cantidad $z_i(t)$. Supongamos que los niveles de producción $(x_1(t), x_2(t))$ y los montos que se declaran $(z_1(t), z_2(t))$ no constituyen un equilibrio de Cournot con evasión de impuestos. Supondremos entonces que cada una de las empresas ajustan sus niveles de producción y sus montos a declarar buscando incrementar sus beneficios. Así, la razón de cambio $\dfrac{dx_i}{dt}$ del nivel de producción $x_i(t)$ con respecto al tiempo t será directamente proporcional a las ganancias marginales $\dfrac{\partial P_i}{\partial x_i}$, es decir, a la razón de cambio de las ganancias con respecto al nivel de producción. Análogamente, la razón de cambio $\dfrac{dz_i}{dt}$ de lo que declara la empresa al gobierno con respecto al tiempo es directamente proporcional a $\dfrac{\partial P_i}{\partial z_i}$, la razón de cambio de las ganancias con respecto a lo que se declara. Solo falta ajustar las funciones de beneficio P_1 y P_2 definidas en (3) de modo que reflejen que la primer empresa actúa como líder y que la segunda observa las acciones $(x_1(t), z_1(t))$ de la primera y por razones tecnológicas tarda τ unidades de tiempo en ajustar su producción. La primera empresa no modifica su fórmula de utilidades, por lo que su función de beneficio en tiempo t es

$$\begin{aligned}
&P_1\left(x_1, x_2, z_1, z_2, x_{1\tau}, x_{2\tau}, z_{1\tau}, z_{2\tau}\right) \\
&= (1-q_i)\big(x_1(t)\, p(x_1(t)+x_2(t)) - C_1(x_1(t)) - \sigma z_1(t)\big) \\
&\quad + q_i\Bigg((1-\sigma)\, x_1(t)\, p(x_1(t)+x_2(t)) - C_1(x_1(t)) \\
&\quad - F\big(x_1(t)\, p\left(x_1(t)+x_2(t)\right) - z_1(t)\big)\Bigg)
\end{aligned} \tag{14}$$

Sin embargo, puesto que a la segunda empresa le toma τ unidades de tiempo ajustar su producción, es menester ajustar esto en su función de beneficio ya que ahora, en el tiempo t, sus entradas son por la cantidad

$$x_2(t)\, p\left(x_{1\tau}(t) + x_2(t)\right) = x_2(t)\, p\left(x_1(t-\tau) + x_2(t)\right).$$

Luego, la función de beneficio de la segunda empresa está dada por

$$\begin{aligned}
&P_2\left(x_1, x_2, z_1, z_2, x_{1\tau}, x_{2\tau}, z_{1\tau}, z_{2\tau}\right) \\
&= (1-q_2)\big(x_2(t)\, p\left(x_{1\tau}(t) + x_2(t)\right) - C_2(x_2(t)) - \sigma z_2(t)\big) \\
&\quad + q_2 \Bigg((1-\sigma)\, x_2(t)\, p\left(x_{1\tau}(t) + x_2(t)\right) \\
&\quad - C_2(x_2(t)) - F\big(x_2(t)\, p\left(x_{1\tau}(t) + x_2(t)\right) - z_2(t)\big)\Bigg)
\end{aligned} \tag{15}$$

Sea $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), z_1(t), z_2(t))$ de modo que $\vec{x}_\tau(t) = (x_{1\tau}(t), x_{2\tau}(t), z_{1\tau}(t), z_{2\tau}(t)) = (x_1(t-\tau), x_2(t-\tau), z_1(t-\tau), z_2(t-\tau))$. Sean $k_1, k_2, k_3, k_4 > 0$ y sea

$$G(\vec{x}, \vec{x}_\tau) = \left(k_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_1}(\vec{x}, \vec{x}_\tau), k_2 \frac{\partial P_2}{\partial x_2}(\vec{x}, \vec{x}_\tau), k_3 \frac{\partial P_1}{\partial z_1}(\vec{x}, \vec{x}_\tau), k_4 \frac{\partial P_2}{\partial z_2}(\vec{x}, \vec{x}_\tau) \right).$$

Por tanto, se tiene el siguiente modelo dinámico de duopolio de Cournot con evasión de impuestos y retraso de tiempo τ

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = G(\vec{x}, \vec{x}_\tau). \tag{16}$$

El sistema obtenido en (16) es un poco diferente al propuesto en [**7**, Ecuación 9], pues en dicho artículo, la última ecuación del sistema, es decir $\dfrac{dz_2}{dt} = k_4 \dfrac{\partial P_2}{\partial z_2}$, considera a P_2 sin tomar en cuenta el tiempo de retraso como nosotros proponemos en (15). La siguiente proposición nos dirá cuales son los puntos de equilibrio del sistema con retardo (16) en los cuales estamos interesados.

Proposición 2.2. *Si $(x_1^*, x_2^*, z_1^*, z_2^*)$ son los valores óptimos del problema del duopolio de Cournot estático planteado en la sección anterior, entonces la función $\vec{x}^*(t) = (x_1^*, x_2^*, z_1^*, z_2^*)$ es un punto de equilibrio del sistema de duopolio de Cournot dinámico con tiempo de retardo (16).*

Demostración. Por demostrar que $G(\vec{x}^*, \vec{x}^*) = 0$. El resultado se sigue entonces de la proposición 1.1 pues

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_i}(\vec{x}^*, \vec{x}^*) = \frac{\partial P_i}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, z_1^*, z_2^*) = 0$$

y

$$\frac{\partial P_i}{\partial z_i}(\vec{x}^*, \vec{x}^*) = \frac{\partial P_i}{\partial z_i}(x_1^*, x_2^*, z_1^*, z_2^*) = 0.$$

□

Proposición 2.3. *La linealización del sistema (16) en el punto de equilibrio dado por los valores óptimos del problema del duopolio de Cournot estático tiene como polinomio característico al polinomio característico de la matriz*

$$C_\tau = \begin{pmatrix} k_1\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial x_1^2} & k_1\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial x_2 \partial x_1} & k_1\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial z_1 \partial x_1} & 0 \\ e^{-\lambda\tau}k_2\dfrac{\partial^2 P_2}{\partial x_{1\tau} \partial x_2} & k_2\dfrac{\partial^2 P_2}{\partial x_2^2} & 0 & k_2\dfrac{\partial^2 P_2}{\partial z_2 \partial x_2} \\ k_3\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial x_1 \partial z_1} & k_3\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial x_2 \partial z_1} & k_3\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial z_1^2} & 0 \\ e^{-\lambda\tau}k_4\dfrac{\partial^2 P_2}{\partial x_{1\tau} \partial z_2} & k_4\dfrac{\partial^2 P_2}{\partial x_2 \partial z_2} & 0 & k_4\dfrac{\partial^2 P_2}{\partial z_2^2} \end{pmatrix}$$

donde las derivadas parciales están evaluadas en el punto de equilibrio. Mas aún, el polinomio característico de C_τ puede escribirse como

$$p_1(\lambda)\, p_2(\lambda) - e^{-\lambda\tau}(a\lambda - b)(c\lambda - d) \tag{17}$$

donde $p_i(\lambda)$ es el polinomio característico de la submatriz de C_τ que consiste de sus renglones y columnas i y $i+2$, $a = C_{\tau_{1\,2}}$, $c = C_{0_{2\,1}}$, b es el determinante de la submatriz de C_τ que consiste de sus renglones 1 y 3 y sus columnas 2 y 3, y d es $e^{\lambda\tau}$ mutiplicado por el determinante de la submatriz de C_τ que consiste de sus renglones 2 y 4 y columnas 1 y 4.

Demostración. Usando la proposición 2.1 calculamos

$$A = \begin{pmatrix} k_1\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial x_1^2} & k_1\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial x_2 \partial x_1} & k_1\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial z_1 \partial x_1} & 0 \\ 0 & k_2\dfrac{\partial^2 P_2}{\partial x_2^2} & 0 & k_2\dfrac{\partial^2 P_2}{\partial z_2 \partial x_2} \\ k_3\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial x_1 \partial z_1} & k_3\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial x_2 \partial z_1} & k_3\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial z_1^2} & 0 \\ 0 & k_4\dfrac{\partial^2 P_2}{\partial x_2 \partial z_2} & 0 & k_4\dfrac{\partial^2 P_2}{\partial z_2^2} \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_2\dfrac{\partial^2 P_2}{\partial x_{1\tau} \partial x_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_4\dfrac{\partial^2 P_2}{\partial x_{1\tau} \partial z_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto $C_\tau = A + e^{-\lambda\tau}B$, por lo que usando de nuevo la proposición 2.1, se sigue que el polinomio característico de la linealización del sistema (16) es igual al polinomio característico de C_τ. El último enunciado de la proposición afirma que

$$\det(C_\tau - \lambda I) = p_1(\lambda)\, p_2(\lambda) - e^{-\lambda\tau}(a\lambda - b)(c\lambda - d)$$

y esto se prueba expandiendo ambos lados de la ecuación de manera directa y verificando que resultan ser la misma expresión algebráica, omitimos los detalles. □

En sistemas dinámicos es importante saber si un punto de equilibrio dado es asintóticamente estable: de ser asintóticamente estable se tendría que la solución del sistema que comienza cerca del punto de equilibrio se acerca mas y mas al punto de equilibrio con el pasar del tiempo. En nuestro caso, si el punto de equilibrio $\vec{x}^*$ dado por la proposición 2.2 fuera estable, entonces tendríamos que cada vez que el nivel de producción y la cantidad que declara de impuestos la empresa i fuera aproximadamente x_i^* y z_i^* en el tiempo $t = 0$, respectivamente, entonces con el pasar del tiempo, ambas empresas tenderían a tener el nivel de producción y declarar impuestos precisamente las cantidades x_i^* y z_i^*, respectivamente.

Resulta [**13**] que para discutir las condiciones que se necesitan para que el punto de equilibrio de la proposición 2.2 sea asintóticamente estable, primero es importante dar dichas condiciones para el caso particular en el que no hay retardo, es decir, cuando $\tau = 0$. Esto lo hacemos a continuación.

Proposición 2.4. *Cuando el sistema (16) no tiene retardo, es decir, para $\tau = 0$, entonces el punto de equilibrio dado por los valores óptimos del problema del duopolio de Cournot estático es asintóticamente estable si los coeficientes del polinomio característico de su linealización*

$$p_1(\lambda)\, p_2(\lambda) - (a\lambda - b)(c\lambda - d) = \lambda^4 + \alpha_1\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_3\lambda + \alpha_4$$

satisfacen las desigualdades

$$\alpha_3 > 0 \quad y \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 > \alpha_3^2 + \alpha_1^2\alpha_4.$$

Demostración. Por el Criterio de Routh-Hurwitz, la afirmación de la proposición se sigue si se tienen las cuatro desigualdades $\alpha_1 > 0$, $\alpha_3 > 0$, $\alpha_4 > 0$ y $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 > \alpha_3^2 + \alpha_1^2\alpha_4$. Por tanto, solamente tenemos que demostrar las dos desigualdades $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_4 > 0$. La primera desigualdad se sigue del hecho que los coeficientes de $p_1(\lambda)$ y $p_2(\lambda)$ son positivos, ya que (x_1^*, z_1^*) y (x_2^*, z_2^*) son los puntos en donde P_1 y P_2 alcanzan su máximo y $k_i > 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Para la segunda desigualdad se calcula

$$\alpha_4 = \prod_{i=1}^{2} k_i k_{i+2} q_i F''\left(x_i p\left(x_1 + x_2\right) - z_i\right)\big((1-\sigma)p'(x_1+x_2) - C_i''(x_i)\big)$$

resultando positiva por ser producto de factores positivos por dos factores negativos. □

Concluimos el presente artículo con un ejemplo para esta última proposición. Sean $c > 0$ y $0 < q < 1$ constantes. Vamos a considerar el problema del duopolio de Cournout en donde tanto el costo de producción $C_i(x) = cx$ como la probabilidad $q_i = q$ de ser descubierto evadiendo impuestos, son los mismos para ambas empresas. Sea $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, z_1^*, z_2^*)$ el vector de valores óptimos, es decir, la solución del sistema (4). Ahora considere el problema dinámico, sin tiempo de retardo, del Duopolio de Cournot, es decir, el sistema (16) con $\tau = 0$, y supongamos que $k_i = 1$, $i = 1, 2, 3, 4,$. Probaremos que la condición para que $\vec{x}^*$ sea un punto de equilibrio asintóticamente estable para el problema dinámico sin retardo del duopolio de Cournot se reduce a suponer la desigualdad

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 p(x_1 + x_2)\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1 p(x_1 + x_2)\right) > 0, \tag{18}$$

donde las parciales se evalúan en el punto de equilibrio.

Primero verificamos que el punto de equilibrio es simétrico, es decir, que $x^* = x_1^* = x_2^*$ y $z^* = z_1^* = z_2^*$. Esta observación se hizo en [**5**] y a continuación reproducimos el argumento. Usando el Teorema 1.2, se sustrae la primera ecuación de (5) con $i = 2$ de la misma ecuación con $i = 1$ y se obtiene

$$(1-\sigma)\left(x_1^* - x_2^*\right)p'(x_1^* + x_2^*) = 0.$$

Como p es estrictamente decreciente y $0 < \sigma < 1$, la ecuación anterior implica que $x_1^* = x_2^*$. Sustituyendo ahora en la la segunda ecuación de (5) para $i = 1, 2$ e igualando se obtiene

$$F'\left(x_1^* p'(x_1^* + x_2^*) - z_1^*\right) = F'\left(x_2^* p'(x_1^* + x_2^*) - z_2^*\right)$$

y por ser F estrictamente creciente se concluye que es uno-a-uno y por tanto $z_1^* = z_2^*$, como se quería demostrar.

Evaluadas en el punto de equilibrio simétrico, las segundas derivadas parciales de P_1 son las mismas que las de P_2, es decir,

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 P_1}{\partial z_1^2} = \frac{\partial^2 P_2}{\partial z_2^2}, \quad \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 P_1}{\partial z_1 \partial x_1} = \frac{\partial^2 P_2}{\partial z_2 \partial x_2},$$

y

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_2 \partial z_1} = \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_1 \partial z_2}.$$

El polinomio característico (17) puede entonces escribirse como

$$\begin{aligned}\lambda^4 + \alpha_1\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_3\lambda + \alpha_4 &= \left(\lambda^2 + m_1\lambda + m_2\right)^2 - (a\lambda - b)^2\\ &= \lambda^4 + 2m_1\lambda^3 + (2m_2 + m_1^2 - a^2)\lambda^2\\ &\quad + (2m_1m_2 + 2ab)\lambda + m_2^2 - b^2.\end{aligned}$$

Por la proposición 2.4, el punto de equilbrio es asintóticamente estable cuando

$$2m_1m_2 + 2ab > 0$$

y

$$2m_1(2m_2 + m_1^2 - a^2)(2m_1m_2 + 2ab) > (2m_1m_2 + 2ab)^2 + (2m_1)^2(m_2^2 - b^2).$$

La primera desigualdad se puede verificar utilizando la hipótesis (1). Para verificar la segunda desigualdad, usamos la suposición (18), para obtener que $m_1 \pm a > 0$. Por lo que $m_1^2 - a^2 > 0$. De esto se desprende que

$$\begin{aligned}2m_1(2m_2 + m_1^2 - a^2)(2m_1m_2 + 2ab) &> 2m_1(2m_2)(2m_1m_2 + 2ab)\\ &= 8m_1^2m_2^2 + 8m_1m_2ab\\ &> 8m_1^2m_2^2 + 8m_1m_2ab + 4b^2(a^2 - m_1^2)\\ &= (2m_1m_2 + 2ab)^2 + (2m_1)^2(m_2^2 - b^2)\end{aligned}$$

como se quería.

Si en particular definimos también las funciones de demanda inversa y de penalidad por $p(x) = 1/x$ y $F(x) = \frac{1}{2}s\sigma x^2$, respectivamente, con $s \geq 1$ una constante, en este caso puede probarse que la solución al sistema (4) es

$$x_1^* = \frac{1-\sigma}{4c} = x_2^* \quad \text{y} \quad z_1^* = \frac{1}{2} - \frac{1-q}{qs} = z_2^*.$$

La condición (18) es automática, por lo que el punto de equilibrio es asintóticamente estable. En [**6**, **7**] se trabaja este mismo ejemplo con la diferencia de que allí se consideran funciones de costo $C_i(x) = c_i x$ en donde c_1 puede ser distinta a c_2. Sin embargo, utilizando los resultado obtenidos en este artículo, nuestro ejemplo considera cualesquiera funciones de demanda inversa y penalidad. Mas aún, nuestra condición (18) es, hasta cierto punto, sorprendentemente sencilla comparada por ejemplo con las condiciones de estabilidad dadas en [**7**, Proposición 5].

Agradecimientos

Los autores están en deuda con los referís cuyos comentarios contribuyeron a mejorar el presente artículo.

Bibliografía

1. E. Ávila, A. Estrella, y G. García, Estabilidad local de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo y aplicaciones, *Misc. Mat.* **51** (2010) 73–92.
2. C. Bardán Esquivel Coordinador Ejecutivo, Modelos de recaudación fiscal, Instituto de Investigaciones Legislativas del Senado de la República, 2003. Disponible en `http://www.senado.gob.mx/iilsen/content/lineas/docs/varios/Recaudacion_Fiscal.pdf`.
3. S. de Administración Tributaria, `http://www.sat.gob.mx/sitio_internet/transparencia/51_5281.html`.
4. R. Gibbons, *Un primer curso en teoría de juegos*, Textos Universitarios Series Gift Collections, Antoni Bosch Editor, 1997.
5. L. Goerke y M. Runkel, *Tax evasion and competition*, CESifo Working Paper No. 2104, 2007.
6. Y. M. Lorenzo, Modelos de duopolios de cournot con evasión de impuestos, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 2011, Tesis de Licenciatura.
7. M. Neamtu, Deterministic and stochastic cournot duopoly games with tax evasion, *WSEAS Transactions on Mathematics* **8** (2010) 618–627.
8. M. J. Osborne, *An introduction to game theory*, Oxford University Press, 2003.
9. P. Serra y J. Toro, ¿Es eficiente el sistema tributario chileno?, *Cuadernos de Economía* **94** (1994) 423–448.
10. R. D. Tollison, *Rent Seeking, The Encyclopedia of Public Choice, Part 2*, C. K. Rowler and F. Schneider, editors. Kluwer Academic Publishers, New York, 2004.
11. J. N. Tsitsiklis y Y. Xu, Efficiency loss in a cournot oligopoly with convex market demand, arXiv:1203.6675, 2012.

12. G. Tullock, *The rent seeking society*, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/Lancaster, 2010.
13. J. Zhang, C. R. Knose, y P. Tsiotras, Stability of time-delay systems: equivalence between lyapunov and scaled small-gain conditions, *IEEE Transations on Automatic Control* **46** (2001) 482–486.