Miscelánea Matemática **39** (2004) 49–60 SMM

El estudio de la variación en la edad media y su relación con el concepto de límite

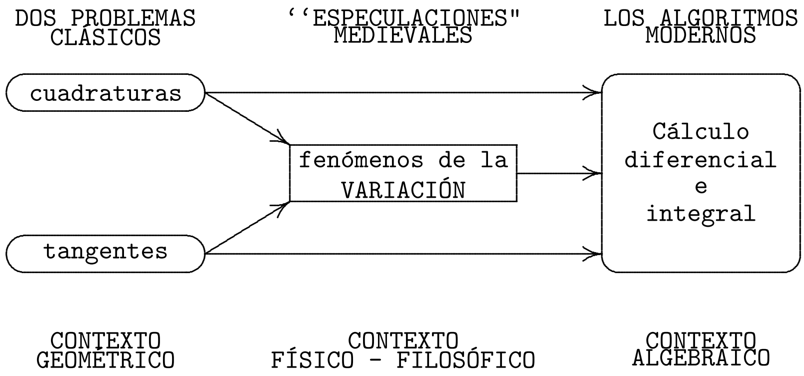
Jesús Alfonso Riestra
Departamento de Matemática Educativa
Cinvestav del IPN
riestra@mail.cinvestav.mx

Resumen

Iniciando con una relación del estudio de la variación en la Edad Media, se plantea la discusión de los dos infinitos: el infinito potencial y el infinito real. El primero siendo ampliamente aceptado, desde la época antigua, mas no así el segundo, el infinito real. Sin embargo, este último, como se trata de mostrar, resulta fundamental para el concepto de límite. El asunto tiene interés tanto educativo como epistemológico.

En términos muy generales puede decirse que el Cálculo Diferencial e Integral moderno es la respuesta a dos problemas clásicos: el cálculo de las cuadraturas (áreas, volúmenes) y el trazado de tangentes, conectados ambos en el estudio de los fenómenos de la variación (movimiento, distribuciones de cantidades físicas, etc.).

El contexto natural, en que surgieron tales problemas clásicos, es el geométrico. Investigaciones (o especulaciones) realizadas hacia el final de la edad media acerca de los fenómenos de la variación ubicaron a estos problemas en un contexto que podríamos llamar físico-filosófico y que tuvo importante influencia en la versión "definitiva" del Cálculo Diferencial e Integral cuyo contexto es esencialmente algebraico, en el sentido de que tales problemas son resueltos algorítmicamente utilizando un simbolismo algebraico.



Por el título del artículo el lector me podrá creer, sin esfuerzo, que en el cuadro anterior probablemente se ha sobre-enfatizado el papel de los estudios medievales, acerca de la variación, en el desarrollo histórico del Cálculo.

En el desarrollo histórico del Cálculo, tan toscamente bosquejado, surgen una serie de conceptos o nociones cuyo esclarecimiento fue esencial, a saber:

1. La noción de número en su relación con la del continuo.
2. Las nociones de infinito y de límite.
3. La noción de velocidad instantánea.

En relación a estas nociones, las etapas señaladas en el cuadro pueden interpretarse como sigue. En términos cronológicos y geográficos la primera etapa ocurre en la antigua Grecia algunos siglos antes de nuestra era. Seguramente como consecuencia del descubrimiento de magnitudes inconmensurables entre sí y a las paradojas de Zenón acerca del movimiento, esta etapa se caracteriza por la actitud de abandonar el intento por aritmetizar la geometría y en su lugar desarrollar una teoría de las proporciones; por el rechazo a la intervención del infinito en los razonamientos matemáticos, sustituyéndolo, en las demostraciones, por una doble reducción al absurdo y un lema (debidos a Eudoxio); finalmente, por considerar sólo el movimiento uniforme. Una excepción notable la constituye el empleo por Arquímedes en su “Método” [Arquímedes 1966] de nociones como el infinito, los infinitesimales, etc., pero este trabajo se perdió desde la antigüedad hasta que fue rescatado, en 1906, por el historiador de la ciencia Heiberg.

La segunda etapa del cuadro, incluyendo los antecedentes más inmediatos del Cálculo Infinitesimal, puede ser caracterizada por la inclusión del infinito en los razonamientos matemáticos, el estudio del movimiento no sólo uniforme (y de la variación en general), el empleo de los infinitesimales, el concepto de velocidad instantánea, la búsqueda de demostraciones matemáticas más "algorítmicas" (un antecedente a la noción de límite) en vez de la doble reducción al absurdo, etc. Puede ubicarse esta etapa en Europa en general (Inglaterra, Francia, Italia, etc.) y un período importante lo constituyen los siglos XIV, XV y XVI.

El interés del presente escrito se centra en sólo una parte de la "segunda etapa" antes mencionada, y que puede ubicarse esencialmente en el siglo XIV. Introduciremos las ideas generales de los estudios medievales acerca de la variación y nuestro énfasis estará más bien puesto en la utilización del infinito en relación con el concepto de límite y no nos abocaremos a los conceptos de derivada e integral implícitos en los modelos de los fenómenos de la variación (i.e. distribuciones de cantidades físicas).

Una primera contribución de la época medieval a la que nos referimos es, sin duda, el permitir que el concepto de infinito entrara de lleno y muy libremente en los razonamientos matemáticos. Es importante aclarar, sin embargo, a qué clase de infinito nos estamos refiriendo. Para empezar, podemos distinguir entre dos tipos de infinito:

(i) El infinito potencial

(ii) El infinito real

La existencia de estos dos tipos de infinito había sido discutida con mucha anterioridad a la época referida. El primero, el infinito potencial, se refiere como su nombre lo sugiere, a la posibilidad sólo en potencia del infinito. Así, si concebimos la lista de los números naturales como una sucesión de números que empieza con el número 1 y que puede hacerse tan grande como se desea, de modo que nunca termina, estamos aludiendo a ese carácter potencialmente infinito de la progresión. En términos modernos podríamos representarla como sigue

$$1, 2, \ldots, n$$

donde n puede elegirse tan grande como se desee (de ahí la infinita posibilidad de hacerla cada vez más grande). Sin embargo, echando mano de este tipo de infinito la lista nunca estaría terminada. En este sentido, no podríamos hablar de la colección (completa) de los números naturales. Para hablar de tal colección necesitaríamos aceptar el segundo concepto, el de infinito real[1]. En términos de este último infinito

[1] *real* en el sentido de *verdadero*.

podríamos representar a la progresión como sigue

$$1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots$$

en la que suponemos no falta ningún número natural por agregar (la lista está completa, el infinito se ha realizado). Regresando a la época, un hecho importante que probablemente motivó la discusión y en muchos casos la inclusión del infinito real fue la aceptación por el cristianismo de un dios infinito en el siglo XIII. Así, en ese siglo, Petrus Hispanus (Juan XXI) distingue entre dos tipos de infinito: el infinito categoremático, en el que todos sus términos han sido realizados y el infinito sincategoremático el cual siempre está acotado con la potencialidad. Se refiere con estos nombres a lo que llamamos respectivamente infinito real e infinito potencial que antes mencionamos [Boyer 1959, p. 68].

Hubo, por supuesto, discrepancias en ese siglo y en el siguiente, el siglo XIV, acerca de la existencia o no del infinito real (el infinito potencial, desde luego, siendo ampliamente reconocido); pero de cualquier manera la discusión de estas dos concepciones, distinguidas ya desde Aristóteles [Aristóteles 1952 L. III, pp. 280–286], fue reconsiderada y hubo, por supuesto, disidentes de la antigua posición Aristotélica de sólo aceptar al infinito potencial. Lo interesante es que, en todo caso, se especuló libremente sobre el infinito y que más aún, esto ocurrió también en el terreno de las matemáticas. Más adelante veremos un ejemplo. Es pertinente aclarar que el interés de los filósofos medievales estaba más bien centrado en considerar el infinito (ya fuera el infinitamente grande o el infinitamente pequeño) en el contexto de las magnitudes y no en el de las colecciones como hacemos hoy en día, aunque esta última idea ya había sido considerada por el poeta romano Lucrecio con anterioridad a tales filósofos [Boyer 1959, p. 68].

El empleo del infinito en el campo de las matemáticas ocurre a su vez en el estudio de la variación que realizaron tales filósofos escolásticos. Entremos pues en materia de tan anunciado estudio.

En el siglo XIV aparecieron varios libros sobre un tema llamado *"La Latitud de las Formas"*. De especial importancia para nosotros son los trabajos de Richard Suiseth o Richard Swainshead (conocido con el apodo de "Calculator") y los de Nicole Oresme, posterior al primero. La Latitud de Formas fue, sin duda, estudiada con anterioridad a los citados filósofos lo que explica que Suiseth en su obra *Liber Calculationum*[2] se introduce de lleno y sin preámbulos en el tema, suponiéndolo

[2] Data de la primera mitad del siglo XIV.

por tanto conocido.

Con el término *forma* se refieren a cualquier cualidad o característica que admita variación y la noción de intensidad. Estas incluyen la temperatura, la velocidad, luminosidad, tristeza, etc., con lo cual se aprecia que tan libremente especulaban estos filósofos medievales.
La latitud de una forma se refiere al grado con el cual la cualidad es poseída por un objeto o sujeto y se hablaba como objeto de estudio del *intensio* y *remisio* de la forma, esto es, del crecimiento o decrecimiento de la intensidad de la cualidad en cuestión.

En su estudio se introducían los adjetivos *uniformis* y *difformis* para las latitudes. Así, una *latitudo uniformis* se refiere a una cualidad que es poseída uniformemente, esto es, que se mantiene constante. Por ejemplo, para un cuerpo luminoso cuya intensidad lumínica sea constante (o uniforme), su "forma" (luminosidad) tiene una *latitudo* (intensidad) *uniformis*. Por otra parte, con *latitudo difformis* se refieren a una intensidad variable.

Estos filósofos no se contentan con simplemente esta clasificación dicótoma: *uniformis* y *difformis*, sino que introducen un lenguaje para referirse a las razones de cambio de las cualidades. Así, se habla de *latitudo uniformiter difformis* (o latitud uniformemente deforme) para referirse a una intensidad no uniforme pero que varía uniformemente (i.e. su razón de cambio es uniforme). De hecho, pues, una *latitudo difformis* puede ser *uniformiter difformis* o *difformiter difformis*, según, respectivamente, la cualidad varíe o no uniformemente. A su vez, una *latitudo difformiter difformis* puede ser *uniformiter difformiter difformis*, o bien, *difformiter difformiter difformis*, etc., etc.

Estos pensadores dan la impresión de esperar llegar siempre a una razón de cambio de cierto orden que resulte uniforme (cualquier semejanza con la idea de aproximar a una función con un polinomio, por ejemplo con la fórmula de Taylor, ¿es una mera coincidencia?).

Para mostrar que nuestros filósofos sabían de que estaban hablando, Boyer [1959, p. 83] menciona que Oresme declara que si la *velocitatio* (aceleración) es *uniformis*, entonces la *velocitas* (velocidad) es *uniformiter difformis*. Por cierto, mi presentación de la Latitud de Formas, hasta ahora, sigue de cerca a la de Boyer [Boyer 1959, Cap. III] y los lectores interesados en el tema harían bien en consultarlo.

Es interesante hacer notar que se llega a cierta teoría en esos tratados sobre la Latitud de Formas. Por ejemplo, la que podríamos llamar *Ley* *de la Media*[3], la cual Calculator establece así: *"El efecto de una forma que varía uniformemente o de una que es uniforme en cada una de dos mitades (iguales) es el mismo de otra que es uniforme con una intensidad promedio de la mínima y la máxima"* [Boyer 1959, p. 75]. Todo el tratamiento de las formas en el trabajo de Suiseth es verbal, pero en el de Oresme, un poco posterior, es representado geométricamente.

uniformiter difformis

Figura 1.

El *Tractatus* de Oresme, compuesto antes de 1361, es la obra seguramente más terminada sobre la Latitud de Formas y es ahora accesible para nosotros gracias al encomiable esfuerzo del profesor Clagett [ver Oresme 1968]. Los objetos que poseen las cualidades se clasifican en lineales, planos y sólidos. Para un cuerpo lineal por ejemplo, su latitud o intensidad se representa por un segmento de recta perpendicular al cuerpo lineal (representado éste por una recta horizontal). De hecho, las líneas verticales que representan la latitud no son dibujadas sino sólo su contorno, así que para cada punto del cuerpo lineal, la magnitud del segmento de recta trazado perpendicularmente al punto hasta intersecar el contorno representa la intensidad de la forma en ese punto del cuerpo. Así, de acuerdo a Oresme, una cualidad uniforme se representa con un rectángulo y otra que varía uniformemente (uniformiter difformis) se representa (figura 1) con un triángulo o un cuadrángulo [Oresme 1968, p. 191].

Con Oresme tenemos la ley de la media representada y demostrada geométricamente. He aquí su enunciado (al menos en parte) y una copia de una de sus figuras: *"Toda cualidad, si es uniformemente deforme, es de la misma cantidad como sería la cualidad del mismo o igual sujeto que es uniforme de acuerdo al grado del punto medio del mismo sujeto"* [Oresme 1968, p. 409].

[3]Especialmente en el caso de un movimiento uniformemente acelerado, la "ley" es conocida como la *Regla de Merton*, la cual iguala tal movimiento con otro que es uniforme con la velocidad media y la cual fue descubierta en Oxford (Merton College) en los 1330.

Representando a la cualidad con el cuadrángulo ABCD y completando la figura como se muestra a continuación (ver Fig. 2), Oresme argumenta que puesto que el triángulo CED es igual al rectángulo EFGD (ED y FG se han trazado paralelas a AB, pasando FG por el punto medio de CD), entonces el área total de ABCD será igual a la del rectángulo AFGB, el cual designa a una cualidad uniforme cuyo grado es el del punto medio del objeto AB.

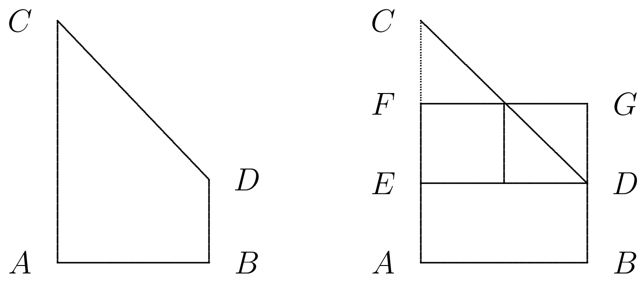


Figura 2.

Cabe comentar que cuando Boyer menciona la versión de la ley de la media dada por Oresme, sólo se enuncia para movimientos uniformemente acelerados e incluso nos dice "Había sido enunciada con anterioridad y en una forma más general por Calculator, pero Oresme y Galileo le dieron una demostración geométrica la cual ..." [Boyer 1959, p. 83], dando a entender que Oresme sólo la refiere al movimiento. Evidentemente, Boyer no contaba con una versión tan completa del *Tractatus* de Oresme, como la que nos ha legado el profesor Clagett [véase Oresme 1968].

Vale la pena hacer notar que Oresme comenta al final de la demostración que si la cualidad se refiere a una velocidad, el punto medio de AB representa el instante medio del tiempo transcurrido, lo que hace aplicable la demostración anterior que "iguala" una velocidad uniformemente deforme con una uniforme cuya intensidad es la del instante medio de la primera. En esta instancia habla de igualar los dos movimientos y no dice explícitamente que los espacios recorridos son los mismos.

Sin embargo, en la siguiente proposición, cuando la particulariza al caso de velocidades se menciona explícitamente la distancia recorrida, incluso poniendo ejemplos numéricos. No dice explícitamente que las áreas bajo esta gráfica (velocidad contra tiempo) es la distancia recorrida, pero de la relación entre dos áreas concluye la misma proporción entre los espacios recorridos.

Aparte del último comentario, es interesante examinar la proposición siguiente antes aludida, por el uso que se hace del infinito y por que representa prácticamente la suma geométrica de una serie infinita. Por cierto, tal cuestión que abordaremos a continuación había ya sido tratada enteramente en forma verbal, llegando no sólo a la misma conclusión que la que veremos en Oresme, sino que además la demostración de Oresme es la traducción geométrica fiel de lo que Suiseth expresa en un discurso que se antoja casi ininteligible pero que resulta muy claro en su versión geométrica. El objeto del comentario no es el de señalar que la proposición de Oresme no es original, sino lo sorprendente que resulta cuando uno se pone a pensar cómo pudo ocurrírsele a Suiseth, sin el recurso geométrico.

Se trata de una cualidad que en la primera mitad del sujeto u objeto tiene cierta intensidad. En la mitad de lo restante (o sea la cuarta parte del original) tiene una intensidad doble. En la mitad de lo que a su vez resta (octava parte del original) intensidad triple y así sucesivamente (ver fig. 3).

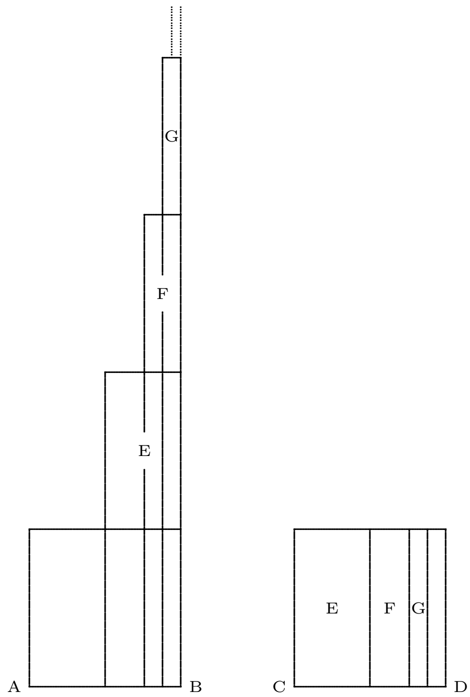


Figura 3.

Oresme comenta que a pesar de que la intensidad se vuelve infinita la cualidad total sólo es cuatro veces la de la primera mitad (o dos veces la de la cualidad uniforme cuyo grado sea el de la primera mitad). Viendo la figura (fig. 3) se aprecia como el exceso sobre el rectángulo de base AB ha sido acomodado en el rectángulo de base CD (siendo la longitud de AB igual a la de CD); resultando tal exceso de igual área que el rectángulo de base AB [Oresme 1968, p. 413].

El interés de estos pensadores (Suiseth y Oresme) en este ejemplo es el hecho de que el grado de la cualidad de que se trate se vuelve infinito, aunque su cantidad total permanece finita. Resulta interesante considerar el problema anterior desde el punto de vista moderno. Se traduce en sumar la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,2^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \cdots$$

Y el equivalente a la estrategia de solución que vimos corresponde a descomponerla como se muestra y sumar por separado:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots & = & 1 \\
\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots & = & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots & = & \frac{1}{4} \\
\ddots \qquad \vdots & & \vdots \\
\frac{1}{2^n} + \cdots & = & \frac{1}{2^{n-1}} \\
\ddots & & \vdots
\end{array}$$

Resultando la suma igual a 2, consistentemente con lo obtenido por Oresme. Este problema es abordado por Oresme en general, es decir, para cualquier cualidad que tenga la configuración de la fig. 3. Una vez encontrada su cantidad, Oresme particulariza en varios contextos. Uno de estos es el del movimiento en el cual AB representa el tiempo de duración y las ordenadas la intensidad de la velocidad. Es en esta instancia que Oresme a partir de la relación entre las áreas concluye la misma para los espacios recorridos: el espacio recorrido por el móvil será entonces cuatro veces el espacio recorrido en la primera mitad del intervalo de tiempo. Como antes se dijo, nunca dice explícitamente que el área representa el espacio recorrido aunque esta idea subyace evidentemente en su conclusión. Para mi entender, ello puede explicarse fácilmente: ¿Cómo puede aceptarse que una longitud, algo unidimensional, pueda ser representado por un objeto bidimensional, a menos que se tengan claramente aritmetizados los entes geométricos? Sin identificar las figuras geométricas, sean rectilíneas planas o sólidas, con números, tal representación plana de una longitud no es concebible.

Los pensadores medievales heredaron de los antiguos Griegos esta limitación, aunque, como se ha visto, se han permitido el involucrarse con el concepto de infinito no sólo en su forma potencial sino realizado y el estudiar libremente los fenómenos del cambio, tratando de encontrar en su estudio principios generales y conceptos estructurales.

Por último, quisiera profundizar en la repercusión que la distinción entre infinito potencial e infinito real tiene, no sólo por su interés epistemológico sino, además, en relación con nuestra actividad de matemáticos docentes.

Existe, al parecer de un modo natural, una resistencia por parte de los alumnos de aceptar el infinito real, aunque no así el potencial.
Un ejemplo muy conocido, que ha sido ensayado en muchas ocasiones y diferentes niveles, es el de considerar el decimal infinito

$$0.999\ldots 9\ldots$$

mostrando que es igual a la unidad. Los alumnos suelen aceptar que "se aproxima tanto como se quiera", pero que nunca "llega" a ser la unidad. En otras palabras, no lo conciben claramente como un número, sino como un proceso que no termina, seguramente por ser infinito. La muy conocida demostración, a continuación, no convence mucho:

Sea $a = 0.999\ldots 9\ldots$, luego $10a = 9.999\ldots 9\ldots$. Consiguientemente, restando este último del primero

$$\begin{array}{lr} & 10a = 9.999\ldots 9\ldots \\ & a = 0.999\ldots 9\ldots \\ \cline{2-2} \text{obtenemos la diferencia} & 9a = 9.000\ldots 0\ldots, \end{array} \quad \text{o sea } 9a=9, \text{ luego } a=1.$$

En particular, no es claro para el alumno que el "número" de nueves después del punto decimal es el mismo en a que en $10a$, puesto que el punto decimal se ha recorrido a la derecha un lugar al multiplicar a a por 10.

En realidad, las dudas de los alumnos respecto a la demostración anterior son razonables. Para ilustrar este punto veamos otro ejemplo.

Consideremos la serie (formal): $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$.

Ahora bien, "probaremos" que $S = \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{rl} -1 + S = & -1 + 1 - 1 + \cdots \\ S = & 1 - 1 + 1 - \cdots \\ \hline \end{array}$$

Sumando tenemos $\quad -1 + 2S = \quad 0 + 0 + 0 + \cdots$, O sea $-1 + 2S = 0$.
Luego $S = \frac{1}{2}$.

Utilizando argumentos similares hemos "probado" que $S = \frac{1}{2}$. Sin embargo, sabemos que en la matemática de hoy no aceptamos que tal serie tenga suma (al menos en el mismo sentido que $a = 0.999\ldots 9\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = 1$).

Bien, ¿Pero por qué en un caso aceptamos el manejo algebraico de un infinito real, es decir, un suma o resta, término a término, de una infinidad con otra y en el otro caso no?

El criterio es bien conocido. Tal manipulación algebraica la permitimos en series que son llamadas *convergentes*. La primera de ellas, $a = 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + \cdots$, es considerada convergente mientras que la segunda no.

Examinemos el concepto de convergencia. Decimos que una serie $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ es convergente si existe un número a tal que:

Para cada número $\epsilon > 0$, existe (o se puede hallar) un número natural $N(\epsilon)$ satisfaciendo

$$n > N(\epsilon) \quad \text{implica} \quad |S_n - a| < \epsilon,$$

donde S_n es la suma de los primeros n términos, a saber $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$. Y en tal caso decimos que la serie infinita tiene por suma el número a, lo cual escribimos $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = a$

En resumen, aceptamos el infinito real (la suma infinita o la suma de una infinidad de sumandos) en términos de la definición de convergencia, o sea, de cierto comportamiento del infinito potencial (representado por la suma finita $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, donde n es arbitrariamente grande).

Dicho en palabras llanas, aceptamos el infinito real (o un proceso infinito llevado a cabo) cuando el correspondiente proceso infinito potencial luce "prometedor" bajo el punto de vista (valga la redundancia) potencial.

En términos muy generales y quizá muy filosóficos la discusión acerca de la validez de los infinitos potencial y real ha concluido en un compromiso. O si se quiere, se tiene una posición intermedia y conciliatoria.

Voy a terminar mi exposición con una disculpa. En el trabajo de los pensadores medievales que estudiaron el fenómeno de la variación, que apenas ha sido bosquejado en mi presentación, existe una gran riqueza de ideas cuya repercusión, ya sea en el terreno de nuestras inquietudes científicas y filosóficas o en el de nuestra labor docente, puede ser importante. Y puede ser importante puesto que muestra muchas ideas matemáticas en germen, dejando traslucir dificultades de orden epistemológico al tiempo que pueden sugerir caminos didácticos. Entre tales ideas figura el concepto de función como modelo de fenómenos de variación, el de velocidad instantánea, razones de cambio etc. En fin, antecedentes importantes de la derivada y la integral en un contexto atractivo. Y por supuesto, esa gran discusión de los infinitos que he enfatizado más. Mis excusas son, claro está, la limitación del espacio y la que dicta la cordura que sólo me han permitido enfatizar un aspecto. Entre las referencias figura un trabajo del Dr. Jesús Alarcón B., quien explota otras ideas que pueden ejemplificar otras direcciones fructíferas para aprovechar en el aula el legado de estos pensadores medievales.

Referencias

Alarcón B., Jesús (1979), *Algunas Lecciones de un Curso de Cálculo*, Matemáticas y Enseñanza **12**, 27–46.

Aristóteles (1952) *Physica* (Trad. al inglés por R. P. Hardie y R. K. Gaye). Contenido en: Robert Maynard Hutchins (editor), Great Books of the Western World, Volume 8 (Aristotle: I). Chicago: Enciclopaedia Britannica, Inc. 1952. (Vigésima segunda reimpresión, 1978), 259–355.

Arquimedes (1966), *El Método* (Introducción y notas de José Babini), EUDEBA, Buenos Aires.

Boyer, Carl B. (1959) *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover Publications, Inc., New York.

Oresme, Nicole (1968) *Tractatus de Configurationibus Qualitatum et motuum*, en Marshall Clagett (Edición, Introducción, traducción al inglés y comentarios), *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*, The University of Wisconsin Press, Madison, Milwaukee and London, 157–517 [The University of Wisconsin Publications in Medieval Science, volume 12].