Miscelánea Matemática **71** (2021) 53-61 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7106

Multiplicidad e índice de regularidad en semigrupos numéricos

Daniel Duarte
CONACyT - Universidad Autónoma de Zacatecas
aduarte@uaz.edu.mx
y
Alondra Ramírez Sandoval
Universidad Autónoma de Zacatecas
acrmz96@gmail.com

Introducción

Un semigrupo numérico es un subconjunto de los números naturales que contiene al cero, es cerrado bajo la suma y su complemento es finito. Esta noción tan sencilla tiene una sorprendente cantidad de aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas tales como el álgebra conmutativa, la geometría algebraica o la teoría de números. De la enorme variedad de conceptos que existen en la teoría de semigrupos numéricos, en este artículo estamos interesados en explorar uno en particular: la *multiplicidad*.

La multiplicidad de un semigrupo numérico es simplemente el elemento distinto de cero más pequeño del semigrupo. Esta noción está directamente relacionada con el concepto homónimo en el álgebra conmutativa o la geometría algebraica. En estas áreas la multiplicidad es también un número e indica ciertas propiedades de un anillo o de un punto de una variedad algebraica. Sin embargo, contrario a la definición en semigrupos numéricos, en dichas áreas la definición es muchísimo más elaborada. Nuestro primer objetivo es presentar este concepto álgebro-geométrico en un contexto sencillo, lo que de paso nos permitirá mostrar la relación existente entre estas diferentes nociones de multiplicidad.

Nuestro tratamiento está inspirado en el texto [4]. Algunos de los resultados que mostraremos en este artículo son un caso particular de teoremas generales presentados ahí. Debido a su generalidad, dichos

Palabras clave: Cantor, cardinales y ordinales, expansión binaria, hipótesis diádica.

teoremas requieren la introducción de una cantidad considerable de conceptos y resultados de topología, análisis, álgebra conmutativa, geometría algebraica y combinatoria. No obstante, el caso particular que presentamos aquí es tratado únicamente con herramientas básicas de álgebra lineal y aritmética elemental.

Ahora bien, nuestra exposición es suficientemente constructiva como para responder otra cuestión al mismo tiempo. La multiplicidad es un concepto relacionado con el comportamiento asintótico de cierta función numérica. En el contexto que vamos a considerar, la multiplicidad es un valor en el que dicha función numérica se estabiliza. Así, una pregunta natural que se presenta es estimar el número a partir del cual la función se estabiliza. Tal valor es llamado el índice de regularidad. El siguiente objetivo de este artículo es dar una cota para este número. Es importante mencionar que este resultado también se puede encontrar en varias fuentes, en diferentes contextos y con diferentes niveles de generalidad. Algunas referencias son [5, 2, 3, 6, 10].

Finalmente, queremos mencionar que no es nuestra intención dar un panorama general de la teoría de semigrupos numéricos. De hecho, a partir únicamente de dos definiciones básicas de la teoría construimos los resultados mencionados en esta introducción. Recomendamos ampliamente la referencia [7] al lector interesado, donde puede encontrar un tratamiento extenso del tema.

1. Semigrupos numéricos y álgebras monomiales

En esta sección introducimos las nociones básicas que usaremos en este artículo.

Notación 1.1. *La notación que se describe a continuación será usada constantemente a lo largo de este texto.*

- $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_r\} \subset \mathbb{N}$, *donde* $1 < a_1 < \cdots < a_r$ *y* $\mathrm{MCD}(A) = 1$.
- $S := \langle A \rangle = \{\sum_i \lambda_i a_i | \lambda_i \in \mathbb{N}\}$. *El conjunto S es un semigrupo numérico y es llamado semigrupo numérico generado por A. Por definición, S es cerrado bajo la suma y contiene al cero. Además, la hipótesis* $\mathrm{MCD}(A) = 1$ *garantiza que* $\mathbb{N} \setminus S$ *es un conjunto finito.*
- *Asumimos que A es el conjunto generador minimal de S, es decir, ningún subconjunto propio de A genera a S.*
- $\mathbb{K}[t^{a_1}, \ldots, t^{a_r}]$ *denota al conjunto de expresiones polinomiales en los monomios $t^{a_1}, \ldots, t^{a_r}$ con coeficientes en un campo $\mathbb{K}$. Este conjunto es un subanillo del anillo de polinomios $\mathbb{K}[t]$ y es llamado álgebra monomial inducida por A.*

- $\mathfrak{m} := \langle t^{a_1}, \dots, t^{a_r} \rangle \subset \mathbb{K}[t^{a_1}, \dots, t^{a_r}]$, *es decir,* $\mathfrak{m}$ *es el ideal generado por* $t^{a_1}, \dots, t^{a_r}$ *en* $\mathbb{K}[t^{a_1}, \dots, t^{a_r}]$.

El siguiente ejemplo ilustra estos conceptos.

Ejemplo 1.1. *Sea* $A = \{5, 7\}$. *El semigrupo numérico generado por* A *es el conjunto de las combinaciones lineales de 5 y 7 con coeficientes en* $\mathbb{N}$, *esto es,* $S = \langle 5, 7 \rangle = \{0, 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, n \geq 24\}$. *Asimismo,*

$$\mathbb{K}[t^5, t^7] = \Big\{ \sum_{\text{finita}} \lambda_{a,b} (t^5)^a (t^7)^b | \lambda_{a,b} \in \mathbb{K} \Big\} = \Big\{ \sum_{\text{finita}} \lambda_s t^s | s \in S, \lambda_s \in \mathbb{K} \Big\},$$

$$\mathfrak{m} = \langle t^5, t^7 \rangle = \{ f t^5 + g t^7 | f, g \in \mathbb{K}[t^5, t^7] \}.$$

Nuestro primer objetivo es definir la multiplicidad del ideal $\mathfrak{m}$. Para esto, procedemos como sigue. Para $n \geq 1$, definimos el ideal potencia $\mathfrak{m}^n$ como el ideal generado en $\mathbb{K}[t^{a_1}, \dots, t^{a_r}]$ por el conjunto de monomios:

$$\{ (t^{a_1})^{k_1} \cdots (t^{a_r})^{k_r} | k_i \in \mathbb{N}, k_1 + \cdots + k_r = n \}.$$

Por ser ideal en $\mathbb{K}[t^{a_1}, \dots, t^{a_r}]$, $\mathfrak{m}^n$ es también un $\mathbb{K}$-espacio vectorial para cada $n \geq 1$. Con esta estructura, $\mathfrak{m}^n$ está generado por

$$\{ (t^{a_1})^{k_1} \cdots (t^{a_r})^{k_r} | k_i \in \mathbb{N}, k_1 + \cdots + k_r \geq n \}.$$

Además se tiene que $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^2 \supset \mathfrak{m}^3 \supset \cdots$. Entonces tiene sentido considerar los espacios vectoriales cociente $\mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}$. La noción de multiplicidad está relacionada con la dimensión de estos espacios vectoriales. Antes de dar la definición formal consideremos el siguiente ejemplo que servirá de motivación para la discusión que viene después.

Ejemplo 1.2. *Sean* $A = \{5, 7\}$ *y* $\mathfrak{m} = \langle t^5, t^7 \rangle \subset \mathbb{K}[t^5, t^7]$. *Por definición,*

$$\mathfrak{m}^n = \langle t^{(5,7)\cdot\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| = n \rangle,$$

donde $(5, 7) \cdot \alpha$ *denota al producto punto usual. Vamos a ilustrar cómo calcular una base de* $\mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}$ *en el caso* $n = 1$. *Consideremos el conjunto*

$$B_1 := \{ t^5 + \mathfrak{m}^2, t^7 + \mathfrak{m}^2 \} \subset \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2.$$

Supongamos que $a_1(t^5 + \mathfrak{m}^2) + a_2(t^7 + \mathfrak{m}^2) = \mathfrak{m}^2$ *para algunos* $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$. *Entonces* $a_1 t^5 + a_2 t^7 \in \mathfrak{m}^2$, *lo que implica* $a_1 t^5 + a_2 t^7 = \sum_{|\beta| \geq 2} b_\beta t^{(5,7)\cdot\beta}$ *con* $b_\beta \in \mathbb{K}$. *Como* $(5, 7) \cdot \beta \neq 5$ *y* $(5, 7) \cdot \beta \neq 7$ *si* $|\beta| \geq 2$, *concluimos que* $a_1 = a_2 = b_\beta = 0$ *para todo* β. *Así,* B_1 *es linealmente independiente. Ahora tomemos* $(\sum_{|\alpha| \geq 1} a_\alpha t^{(5,7)\cdot\alpha}) + \mathfrak{m}^2 \in \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2$ *con* $a_\alpha \in \mathbb{K}$. *Como*

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \geq 1} a_\alpha t^{(5,7)\cdot\alpha} + \mathfrak{m}^2 &= \sum_{|\alpha| = 1} a_\alpha t^{(5,7)\cdot\alpha} + \mathfrak{m}^2 + \sum_{|\alpha| \geq 2} a_\alpha t^{(5,7)\cdot\alpha} + \mathfrak{m}^2 \\ &= a_1 t^5 + a_2 t^7 + \mathfrak{m}^2, \end{aligned}$$

concluimos que B_1 *es un conjunto generador. En particular,* $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 2$*. De manera completamente análoga se puede demostrar que* $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 = 3$ *y* $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}^3/\mathfrak{m}^4 = 4$*. Uno podría verse tentado a conjeturar que la dimensión de* $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ *es* $n+1$ *para cada* n*. Contra lo esperado, las mismas ideas del caso* $n = 1$ *(¡muchos cálculos mediante!) pueden demostrar que* $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} = 5$ *para toda* $n \geq 4$*. En efecto, el lector puede verificar que*

$$B_n := \{t^{5(n-j)+7j} + \mathfrak{m}^{n+1} | j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$$

es una base de $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ *para cada* $n \geq 4$*.*

El ejemplo anterior ilustra tres puntos importantes:

- Aunque la cantidad de generadores de $\mathfrak{m}^n$ como ideal va creciendo conforme n crece, la dimensión como espacio vectorial de los cocientes consecutivos se estabiliza.
- El valor en el que se estabiliza coincide con el elemento más pequeño de A.
- La dimensión de dichos espacios se estabiliza a partir de $n = 4$, que es uno menos que el elemento más pequeño de A en el ejemplo.

Los primeros dos puntos son resultados conocidos que enunciamos a continuación.

Teorema 1.1. *Existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} = \text{mín}(A)$ *para toda* $n > N$*. El número* $\text{mín}(A)$ *es llamado la* ***multiplicidad*** *del ideal* $\mathfrak{m}$*.*

Observación 1.1. *Como mencionamos en la introducción, este resultado es un caso particular de resultados más generales. Por citar un ejemplo, en [4, cap. 5, teo. 3.14] se demuestra que la multiplicidad en el origen de una variedad tórica tiene una descripción combinatoria en términos del semigrupo afín asociado. El caso particular de curvas tóricas es precisamente el teorema 1.1.*

Observación 1.2. *La multiplicidad es un concepto fundamental en el álgebra conmutativa y la geometría algebraica. Entre sus numerosas aplicaciones, podemos mencionar que este número detecta la suavidad de una variedad algebraica en un punto. De manera general, la multiplicidad de un punto de una variedad algebraica es el numerador del coeficiente del término líder del polinomio de Hilbert del punto. Además de los textos clásicos de álgebra conmutativa, recomendamos al lector la referencia [9], donde puede encontrar una detallada y accesible introducción a este importante concepto.*

Ahora bien, una pregunta natural que surge a partir del teorema 1.1 es: ¿a partir de cuál $n \in \mathbb{N}$ la función $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ alcanza el valor $\text{mín}(A)$?

Definición 1.1. Sea

$$\operatorname{reg}(\mathfrak{m}) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} = a_1 \text{ para toda } n \geq k\}.$$

El número $\operatorname{reg}(\mathfrak{m})$ es llamado *índice de regularidad de* $\mathfrak{m}$ en $\mathbb{K}[t^{a_1}, \ldots, t^{a_r}]$.

El ejemplo 1.2 muestra que $\operatorname{reg}(\mathfrak{m}) = 4$ en ese caso, que es uno menos que $\min(A)$. Uno podría verse tentado a pensar que, en general, $\operatorname{reg}(\mathfrak{m}) = \min(A) - 1$. Curiosamente, esto es cierto para semigrupos numéricos generados por dos elementos. Sin embargo, a partir de tres generadores, lo anterior no se cumple en general.

Esto nos lleva a preguntarnos si es posible calcular el valor exacto de $\operatorname{reg}(\mathfrak{m})$ en términos del conjunto A. Otra opción, probablemente más razonable, es dar cotas para este número. Este es el objetivo principal del presente artículo. En la siguiente sección presentamos una demostración elemental del teorema 1.1 y de paso daremos cotas para el índice de regularidad de $\mathfrak{m}$.

2. Multiplicidad y cotas para el índice de regularidad

En esta sección demostramos el teorema 1.1. Además, damos una cota para su índice de regularidad que está dada en términos del número de Frobenius del semigrupo correspondiente y que definimos a continuación. En esta sección continuamos usando la notación 1.1.

Definición 2.1. El número de Frobenius de S, denotado $F(S)$, es el entero más grande que no pertenece a S.

Ejemplo 2.1. *Sea $S = \langle 5, 7 \rangle$. En vista del ejemplo 1.1 tenemos $F(S) = 23$.*

Denotamos $a := (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{N}^r$. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ y considere el siguiente conjunto:

$$S^{(n)} := \{0\} \cup \{a \cdot \alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^r, |\alpha| \geq n\}.$$

Observación 2.1. *Los conjuntos $S^{(n)}$ satisfacen las siguientes propiedades:*

- *Son semigrupos numéricos.*
- $S = S^{(1)} \supset S^{(2)} \supset S^{(3)} \supset \cdots$.
- $\{t^\gamma | \gamma \in S^{(n)}\}$ *es una base de* $\mathfrak{m}^n$ *como* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial.*

En los resultados que siguen asumimos que $a_1 < a_2 < F(S)$. Una breve discusión de los casos $F(S) < a_1$ y $a_1 < F(S) < a_2$ se dará al final de la sección.

Lema 2.1. *Denotemos $\delta := F(S) - a_1$ y $\epsilon := a_2 - a_1$. Sean $q, \tau \in \mathbb{N}$ tales que $\delta = q\epsilon + \tau$, donde $1 \leq q$ y $0 \leq \tau < \epsilon$. Entonces, para cada $n \geq q$:*

$$F(S^{(n+1)}) = F(S^{(n)}) + a_1 < (n+1)a_2.$$

Demostración. De entrada, $F(S^{(n)}) + a_1 + l \in S^{(n+1)}$ para toda $l \geq 1$ y por lo tanto $F(S^{(n+1)}) \leq F(S^{(n)}) + a_1$ para toda $n \geq 1$. Entonces, para cualquier n,

$$F(S^{(n+1)}) \leq F(S^{(n)}) + a_1 \leq F(S^{(n-1)}) + 2a_1 \leq \cdots \leq F(S) + na_1.$$

Sea $n \geq q$. De la ecuación $\delta = q\epsilon + \tau$ se obtiene

$$\begin{aligned} F(S) + na_1 &= q(a_2 - a_1) + \tau + (n+1)a_1 \\ &< q(a_2 - a_1) + a_2 - a_1 + (n+1)a_1 \\ &= (q+1)a_2 + (n-q)a_1 \\ &< (q+1)a_2 + (n-q)a_2 = (n+1)a_2. \end{aligned}$$

Concluimos que $F(S^{(n+1)}) \leq F(S^{(n)}) + a_1 < (n+1)a_2$ para toda $n \geq q$. Falta probar que $F(S^{(n+1)}) = F(S^{(n)}) + a_1$ para $n \geq q$. Supongamos que $F(S^{(n)}) + a_1 = a \cdot \alpha \in S^{(n+1)}$, i.e., $|\alpha| = n+1$. Si $\alpha_1 \geq 1$ entonces $F(S^{(n)}) = a \cdot \alpha - a_1 \in S^{(n)}$, lo que es una contradicción. Si $\alpha_1 = 0$ entonces $F(S^{(n)}) + a_1 = \sum_{i=2}^{r} a_i\alpha_i \geq (n+1)a_2$, contradicción. Así, $F(S^{(n)}) + a_1 \notin S^{(n+1)}$ y $F(S^{(n+1)}) = F(S^{(n)}) + a_1$ para toda $n \geq q$. □

Proposición 2.1. *Denotemos $S^{(n)} + a_1 := \{z + a_1 | z \in S^{(n)}\}$. Entonces $S^{(n+1)} = S^{(n)} + a_1$ para cada $n \geq q$.*

Demostración. Por definición, $S^{(n)} + a_1 \subset S^{(n+1)}$, para cada $n \geq 1$. Asumamos que $n \geq q$ y sea $s \in S^{(n+1)}$. Supongamos $s > F(S^{(n+1)})$. Por el lema 2.1, $F(S^{(n+1)}) = F(S^{(n)}) + a_1$ por lo que $s = F(S^{(n)}) + a_1 + l = (F(S^{(n)}) + l) + a_1 \in S^{(n)} + a_1$ para alguna $l \geq 1$.

Ahora supongamos que $s < F(S^{(n+1)})$. Sea $s = a \cdot \alpha$, donde $|\alpha| \geq n+1$. Si $\alpha_1 \geq 1$ entonces $s = (a \cdot \alpha - a_1) + a_1 \in S^{(n)} + a_1$. Si $\alpha_1 = 0$ entonces $s = \sum_{i=2}^{r} a_i\alpha_i \geq (n+1)a_2$. Por otro lado, por el lema 2.1, $s < F(S^{(n+1)}) < (n+1)a_2$, lo que es una contradicción. Concluimos que $S^{(n+1)} \subset S^{(n)} + a_1$. □

Estamos listos para demostrar el teorema principal.

Teorema 2.1. *Sea $\delta = F(S) - a_1$, $\epsilon = a_2 - a_1$ y $\delta = q\epsilon + \tau$, donde $1 \leq q$ y $0 \leq \tau < \epsilon$. Entonces $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} = a_1$ para cada $n \geq q$. En particular,* $\mathrm{reg}(\mathfrak{m}) \leq q$.

Demostración. Sea $\mathfrak{m} = \langle t^{a_1}, \ldots, t^{a_r} \rangle \subset \mathbb{K}[t^{a_1}, \ldots, t^{a_r}]$. Por la observación 2.1, una base para $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ está dada por $\{t^\gamma + \mathfrak{m}^{n+1} \mid \gamma \in$

$S^{(n)} \backslash S^{(n+1)}\}$. Afirmamos que $|S^{(n)} \backslash S^{(n+1)}| = a_1$ para cada $n \geq q$. Notemos que esta afirmación demuestra el teorema.

Considere los siguientes conjuntos:

$$C := \{s \in S^{(n)} \mid 0 < s < (n+1)a_1\},$$
$$D := \{h + ka_1 \mid na_1 < h < (n+1)a_1, h \notin S^{(n)} \text{ y}$$
$$k := \min\{l \mid h + la_1 \in S^{(n)}\}\}.$$

La siguiente figura ilustra un punto del conjunto D.

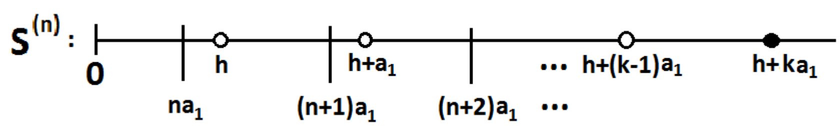

Figura 1. Los círculos vacíos representan puntos que no están en $S^{(n)}$.

Mostramos que $S^{(n)} \backslash S^{(n+1)} = C \cup D$, para $n \geq q$. Esto muestra la afirmación pues $|C \cup D| = a_1$.

Sea $s \in C \cup D$. Si $s \in C$, entonces $s \in S^{(n)}$ y $s < (n+1)a_1$. Así, $s \in S^{(n)} \backslash S^{(n+1)}$. Si $s \in D$, entonces $s = h + ka_1$, donde $h < (n+1)a_1, h \notin S^{(n)}$ y $k = \min\{l \mid h + la_1 \in S^{(n)}\}$. Supongamos que $s \in S^{(n+1)}$. Por la proposición 2.1 se tiene que $h + ka_1 = t + a_1$, para algún $t \in S^{(n)}$. Entonces $h + (k-1)a_1 = t$, lo que contradice la minimalidad de k. Concluimos que $s \in S^{(n)} \backslash S^{(n+1)}$.

Ahora sea $s \in S^{(n)} \backslash S^{(n+1)}$. Si $s < (n+1)a_1$ entonces $s \in C$. Si $s > (n+1)a_1$, sea $s = pa_1 + t$, donde $0 \leq t < a_1$ y $n+1 \leq p$. Notemos que $t = 0$ implica $s = pa_1 \in S^{(p)} \subset S^{(n+1)}$, contradicción. Por lo tanto, $0 < t < a_1$. Afirmamos que $t + na_1 \notin S^{(n)}$. Suponga que $t + na_1 = a \cdot \alpha \in S^{(n)}$, i.e., $|\alpha| \geq n$. Entonces $s + na_1 = pa_1 + t + na_1 = pa_1 + a \cdot \alpha$. Puesto que $p - n \geq 1$, tenemos $s = a \cdot \alpha + (p-n)a_1 \in S^{(n+1)}$, contradiciendo nuevamente que $s \in S^{(n)} \backslash S^{(n+1)}$. Esto prueba la afirmación.

Sea $h := t + na_1$ y $k := p - n$. Entonces $s = h + ka_1$. Supongamos que $j < k$ es tal que $h + ja_1 \in S^{(n)}$, i.e., $h + ja_1 = a \cdot \beta$, donde $|\beta| \geq n$. Sea $k = j + l$ para algún $l \geq 1$. Entonces $s = h + (j+l)a_1 = h + ja_1 + la_1 = a \cdot \beta + la_1 \in S^{(n+1)}$, contradicción. Por lo tanto k es el mínimo elemento tal que $h + ka_1 \in S^{(n)}$ lo que implica que $s \in D$. □

En el siguiente ejemplo mostramos que la cota para el índice de regularidad dada en el teorema 2.1 efectivamente se alcanza.

Ejemplo 2.2. *Sea $a_1 \geq 3$ y $S = \langle a_1, 2a_1+1, 2a_1+2, \ldots, 2a_1+(a_1-2)\rangle$. En este ejemplo, $F(S) = 4a_1 - 1$ y $q = 2$. Como el conjunto generador* *de S tiene cardinalidad $a_1 - 1$, tenemos* $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = a_1 - 1$. *Por lo tanto,* $\mathrm{reg}(\mathfrak{m}) = 2 = q$.

La cota del teorema 2.1 está dada en términos del número de Frobenius del semigrupo. Desafortunadamente, es bien sabido que este número no puede ser calculado explícitamente en general. Sin embargo, puede ser acotado.

Corolario 2.1. *Con la notación del teorema 2.1,*

$$\mathrm{reg}(\mathfrak{m}) \leq \frac{1}{a_2 - a_1}\Big(a_1 a_r - 2a_1 - a_r - \tau\Big).$$

Demostración. Se sigue del teorema y del hecho $F(S) \leq a_1 a_r - a_1 - a_r$ (véase [1]). □

En los resultados anteriores se consideró el caso $a_1 < a_2 < F(S)$. Enseguida presentamos una breve discusión sobre los casos restantes.

Observación 2.2. *Supongamos que $F(S) < a_1$ o $a_1 < F(S) < a_2$. Usando las mismas ideas de los resultados anteriores es posible mostrar que* $\dim \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} = a_1$ *para toda $n \geq 1$, i.e.,* $\mathrm{reg}(\mathfrak{m}) = 1$.

Concluimos con un comentario sobre el caso de semigrupos mínimamente generados por dos elementos.

Observación 2.3. *Sea $A = \{a_1, a_2\}$ como antes. En este caso se puede calcular explícitamente que* $\dim \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} < a_1$ *si $n < a_1 - 1$ y* $\dim \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} = a_1$ *si $n \geq a_1 - 1$. En particular,* $\mathrm{reg}(\mathfrak{m}) = a_1 - 1$. *La demostración detallada de estas afirmaciones se puede consultar en [8].*

Agradecimientos

Queremos agradecer a Enrique Chávez por sugerirnos una idea para concluir la prueba del teorema 2.1. Agradecemos también a Mario Huicochea y Omar Antolín por sus comentarios sobre el contenido de este trabajo. Finalmente, agradecemos al revisor/revisora por su cuidadosa lectura y los comentarios que mejoraron la presentación del artículo.

Bibliografía

[1] A. Brauer, «On a problem of partitions», *Amer. J. Math.*, vol. 64, 1942, 299–312, https://doi.org/10.2307/2371684.

[2] M. D'Anna, M. D. Marca y V. Micale, «On the Hilbert function of the tangent cone of a monomial curve», *Semigroup Forum*, vol. 91, 2015, 718–730, https://doi.org/10.1007/s00233-015-9754-9.

[3] J. Elías, «Characterization of the Hilbert-Samuel polynomials of curve singularities», *Compositio Math.*, vol. 74, núm. 2, 1990, 135–155.

[4] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov y A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, USA, 1994, https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4771-1.

[5] J. Lipman, «Stable ideals and Arf rings», *Amer. J. Math.*, vol. 93, 1971, 649–685, https://doi.org/10.2307/2373463.

[6] M. Morales, «Syzygies of monomial curves and a linear diophantine problem of Frobenius», 1987, Internal Report, Max Planck Institut für Mathematik, Bonn.

[7] J. C. Rosales y P. A. García-Sánchez, *Numerical semigroups*, núm. 20, Springer, 2009, https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0160-6.

[8] A. R. Sandoval, «Multiplicidad y dimensión de encaje en curvas tóricas», 2019, Tesis de Licenciatura, Universidad Autónoma de Zacatecas.

[9] J. Schettler, «Hilbert Functions», http://math.ucsb.edu/~jcs/HilbertFunctions.pdf.

[10] B. Sturmfels, «Equations defining toric varieties», *arXiv: Algebraic Geometry*, 1996, 437–449, https://doi.org/10.1090/pspum/062.2.