Miscelánea Matemática 69 (2019) 87-108 SMM

La Conferencia Waddington en Oaxtepec y Santiago López de Medrano

Faustino Sánchez Garduño
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad de México
faustinos403@gmail.com

1. Introducción

La década de los ochenta del siglo pasado marcó un antes y un después en la actividad biomatemática en el país pues, a lo largo de aquélla, se realizaron importantes eventos tanto nacionales como internacionales. De los primeros, destacan las reuniones de biología teórica. Estos eventos fueron convocados, organizados y apoyados por el Grupo Universitario de Biología Teórica que funcionó en la UNAM solo unos cuantos años. De los segundos, sin duda alguna el de mayor impacto fue la *Waddington Memorial Conference*. Esta se realizó en septiembre de 1987 en el centro vacacional de Oaxtepec, Morelos, para conmemorar el vigésimo aniversario de las reuniones *Towards a Theoretical Biology*, celebradas en Villa Serbelloni del lago Como, Italia y convocadas por el destacado embriólogo, genetista y biólogo teórico escocés Conrad Hal Waddington.

La pareja formada por Waddington y Justin Blanco White tuvo dos hijas: Caroline Humphrey y Dusa McDuff[1]. La primera —*Dame Commander of the Order of the British Empire, Lady Rees of Ludlow*— es una brillante antropóloga que estudió en las universidades de Leeds y de Cambridge en el Reino Unido; también brillante es Dusa quien es matemática y estudió en las universidades de Edimburgo y de Cambridge. Actualmente trabaja en la Universidad de Columbia en Estados Unidos. Su campo de investigación es la geometría simpléctica y la topología. Dusa es esposa del matemático John Milnor. McDuff y Milnor han visitado varias veces la UNAM. John empezó a hacerlo desde agosto de 1956 cuando asistió al Symposium Internacional de Topología

Palabras clave: Conferencia Waddington, Clasificación de sistemas dinámicos, Christopher Zeeman, Santiago López de Medrano.

[1] Su nombre es Margaret Dusa Waddington. El apellido McDuff viene de su primer esposo.

Algebraica (véase [1]) celebrado en las entonces flamantes instalaciones de Ciudad Universitaria y auspiciado por la UNAM y la UNESCO. A este evento también asistieron figuras mundiales del área a quien ya se le había otorgado la Medalla Fields (Jean-Pierre Serre, en 1954) o bien a quienes se les otorgaría pocos años después: René Thom (en 1958), John Milnor (en 1962) y Michael Atiyah (en 1966). En esa ocasión Milnor expuso el trabajo: *On simply connected 4-manifolds* (véase [8]). Seis años después se le otorgó la Medalla Fields por sus investigaciones en topología diferencial.

La conferencia de Oaxtepec congregó a destacados biólogos teóricos, matemáticos y físicos como René Thom, E. Christopher Zeeman, Brian Goodwin, Santiago López de Medrano, Germinal Cocho y Lewis Wolpert, por solo mencionar a unos cuantos. No fue un evento masivo, seríamos unos cuarenta los asistentes, quince de los cuales eran extranjeros. Salvo los mexicanos López de Medrano y Cocho, los restantes aquí listados, también estuvieron en algunas de las reuniones de Serbelloni. Estas actividades influyeron de manera decisiva en quienes —bajo la tutela de los iniciadores de la escuela mexicana de biología matemática, destacadamente Germinal quien, fiel a su estilo en el que literalmente había que descifrar sus frases— en ese tiempo nos iniciábamos en esta área interdisciplinaria. En la referencia [11] se presenta una historia de la EOBM en la cual —como un antecedente importante— se incluye una narrativa de la *Waddington Memorial Conference* de Oaxtepec; mientras que aquí, usando los conceptos y resultados estrictamente necesarios y dejando de lado la parte anecdótica, hacemos una presentación tanto del proyecto presentado por Zeeman, como del aporte que hiciera López de Medrano en el marco de este evento.

El contenido de este trabajo está organizado como sigue. En la sección 2 se exponen los antecedentes necesarios en los que se incluye una breve reseña del origen y desarrollo del concepto estabilidad estructural. En la sección 3 se hace una descripción del trabajo que presentó Zeeman en Oaxtepec, así como de sus conjeturas. La sección 4 se comenta brevemente la forma en la que López de Medrano se involucró en el programa de Zeeman y la manera en la que este hecho fue reportado en el libro editado por Goodwin y Saunders (véase [5]) que contiene la versión *in extenso* de los trabajos presentados en el evento. A fin de hacer más ágil la lectura de este escrito y también para hacerlo autocontenido, en su parte final se incluye un apéndice que contiene los conceptos y resultados básicos sobre un tipo particular de sistemas dinámicos: los definidos por sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) es decir, los definidos por campos vectoriales. Su lectura se recomienda a aquellos lectores que no posean el bagaje introductorio de este tipo de sistemas dinámicos. Igualmente recomendable es la lectura de las frecuentes notas de pie de página que acompañan a este texto. La finalidad de estas es precisar algún aspecto específico o bien extender algún detalle que aparece en el cuerpo principal. Salvo la demostración de algunos resultados que aparecen en el Apéndice A, la demostración de los demás que aquí se mencionan, se encuentra en la referencia correspondiente.

2. La estabilidad estructural o el principio de esta historia

2.1 La importancia de clasificar

Durante la década de los años setenta del siglo pasado, Zeeman —además de ser *Fellow of the Royal Society* (FRS)— a pesar de algunos excesos (o quizás por ellos), fue un entusiasta difusor[2] de la *teoría de las catástrofes*[3] a cuyo desarrollo también contribuyó de forma notable. Igualmente notable ya era su aporte a la *teoría de las singularidades* y a los sistemas dinámicos. Con áura de matemático de reputación mundial, Zeeman llegó a la conferencia de Oaxtepec. Su participación se programó a media semana y versó sobre la *clasificación de sistemas dinámicos* definidos sobre *variedades*[4] de dimensión n. De hecho, no de todos los sistemas dinámicos, solo los *genéricos*. Recordemos que una propiedad, P, de los elementos de un espacio topológico X se dice que es *genérica*, siempre que quienes la tienen, formen un conjunto abierto denso[5] en E. Ahora bien, dentro de la matemática los problemas de clasificación juegan un papel fundamental. Zeeman los caracterizó así:

---

[2]En el caso de México, con el mismo entusiasmo, López de Medrano fue un importante divulgador de esta área de la matemática. Lo recordamos cargando el juguete educativo llamado *máquina de catástrofes de Zeeman* a cuanta conferencia sobre el tema impartía. El diseño de la maquinita fue obra de Zeeman. En la referencia [14] se encuentra una descripción de aquélla.

[3]Dicho de forma sucinta y esquemática pero suficiente para nuestros propósitos, en matemáticas el término *catástrofe* significa un cambio abrupto que surge como una respuesta repentina de un sistema a un cambio suave en las condiciones externas. Son dos los antecedentes de la teoría de las catástrofes (término introducido por Zeeman). Uno, es el trabajo sobre singularidades de mapeos del plano en sí mismo, debida al matemático norteamericano Hassler Whitney. El segundo, es la teoría de bifurcaciones de sistemas dinámicos de la autoría del matemático soviético A. A. Andronóv. Con estos antecedentes, el destacado matemático francés René Thom desarrolló el cuerpo fundacional de resultados dinámicos que constituyeron la teoría de catástrofes. Una introducción a este tema se encuentra en el libro escrito por Peter Saunders [14]; mientras que en [18] se encuentra una recopilación de trabajos escritos por Zeeman sobre teoría de catástrofes. La diversidad de problemas que se pretendieron modelar y explicar matemáticamente con la teoría de catástrofes, es pasmosa.

[4]Aunque Zeeman no lo dice explícitamente, se trata de sistemas dinámicos definidos sobre variedades compactas de dimensión n.

[5]El subconjunto A de un espacio topológico X es denso en X, si para todo punto x en X cualquier vecindad de x contiene al menos un punto de A. Por ejemplo, los números racionales son un subconjunto denso de los números reales, pues cada número real o bien es un racional o tiene un número racional arbitrariamente cercano. La propiedad que tienen ciertos campos vectoriales de formar un conjunto abierto denso, es una propiedad muy importante de éstos.

> Yo siempre he encontrado que los teoremas de clasificación están entre los resultados más profundamente satisfactorios de las matemáticas. Por ejemplo, la clasificación de las superficies, la de los nudos, la de los grupos simples o la de las catástrofes simples. Con frecuencia los problemas de clasificación generan las áreas más fértiles de la investigación [matemática].

La concisa frase: clasificar los sistemas dinámicos, simple de enunciar, conlleva problemas y conceptos matemáticos profundos. A medida que vayámos desmenuzándola, iremos precisando términos y conceptos. A lo largo de este proceso, nos apoyaremos en el material expuesto en el Apéndice A.

Refiriéndonos a un tipo de sistemas dinámicos, señalamos que hablar de sistemas autónomos de EDO y de campos vectoriales, es una y la misma cosa.

Clasificar a los sistemas dinámicos, significa introducir un criterio mediante el cual, al conjunto de sistemas dinámicos lo podamos dividir en clases, de manera que cada una de ellas esté compuesta por sistemas dinámicos que son *equivalentes*, pero ¿qué significa la frase: «equivalencia entre sistemas dinámicos»? La siguiente nota precautoria es relevante aquí: si el criterio de clasificación es muy burdo, entonces este pone entes como iguales, siendo que en realidad deberían ser diferentes. Por el contrario, si aquél es muy fino, pone entes diferentes cuando deberían ser iguales.

El concepto matemático subyacente aquí, es el de *relación de equivalencia* entre sistemas dinámicos.

2.2 Los conceptos básicos

En dinámica hay más de un sentido de equivalencia. En esta subsección empezamos por introducir dos de ellos, para enseguida exponer una sucinta reseña sobre el origen y posterior desarrollo del concepto *estabilidad estructural.*

A lo largo de este trabajo X denotará a una variedad la cual puede ser plana (como una línea, un plano o un espacio euclideano de dimension n, etc.) o curvada (como un círculo, una esfera, un toro o cualquier ente análogo de dimensión mayor); mientras que por $\mathcal{V}$ denotaremos al conjunto de todos los campos vectoriales suaves definidos en X.

1. **Equivalencia topológica**: Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, $\vec{F} : \Omega_1 \to \mathbb{R}^n$ y $\vec{G} : \Omega_2 \to \mathbb{R}^n$ dos campos vectoriales. Se dice que $\vec{F}$ y $\vec{G}$ son *topológicamente equivalentes*, si existe un homeomorfismo (una función que tanto ella como su inversa, son funciones continuas)

$h : \Omega_1 \to \Omega_2$, que transforme trayectorias de $\vec{F}$ en trayectorias de $\vec{G}$ preservando su orientación al aumentar t.

2. **Equivalencia solo si conjugación**[6]: Sean f y g dos funciones de X en $\mathbb{R}$ se dice que son *conjugadas* si existen dos difeomorfismos (funciones que tanto ellas como sus inversas, son diferenciables) $\alpha : X \to X$ y $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que el efecto sucesivo de, primero aplicar f a un elemento, $(\cdot)$, de X y al resultado aplicarle β, sea el mismo que, primero aplicarle α a $(\cdot)$ y a lo que se obtenga, aplicarle g. Es decir, que la igualdad $\beta(f(\cdot)) = g(\alpha(\cdot))$, se satisfaga. Esto expresado en términos gráficos significa que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\beta"'] \\ X \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Ahora, dado un campo vectorial, $\vec{F}$, uno querría que los campos vectoriales «cercanos» a este, compartieran las mismas propiedades cualitativas, es decir, le fueran equivalentes. Cuando la equivalencia es la topológica, entonces se dice que el campo vectorial $\vec{F}$ es *estructuralmente estable*. Este concepto se formalizará más adelante, mientras tanto es nuestro interés precisar los sentidos de cercanía entre campos vectoriales.

¿Cómo medir la distancia entre dos campos vectoriales? Esto conduce a dotar de una distancia (de una topología) al conjunto de campos vectoriales, cosa que es posible hacer dado que el conjunto de campos vectoriales tiene la estructura algebraica de espacio vectorial. Una distancia —quizás la más primitiva— entre los campos vectoriales $\vec{F}$ y $\vec{G}$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, es la que proviene de la norma euclidiana: $d_0 \equiv \sup ||\vec{F}(\vec{x}) - \vec{G}(\vec{x})||$, donde el *supremo*, sup —tanto aquí como en las dos distancias que se definen enseguida— se toma sobre el conjunto cerrado y acotado (compacto) en el que $\vec{x}$ varía. Esta distancia define la topología C^0. Otra distancia entre campos vectoriales es la que proviene de la *distancia matricial*: $\sup ||J[\vec{F}(\vec{x})] - J[\vec{G}(\vec{x})]||$, donde J es la matriz de Jacobi del campo vectorial correspondiente. Una más, combina las dos anteriores

[6] Aparentemente aquí hay una discrepancia entre los matemáticos, pues mientras que unos (como Zeeman, véanse [19] y [20]) a la definición tal cual se introduce aquí le llaman *conjugación*, para otros (como López de Medrano) a esta misma le llaman *equivalencia izquierda-derecha*. (Comunicación personal). El uso de una u otra depende del área de la matemática a la que se dediquen.

para tomar la forma

$$d_1 \equiv \sup \left\{ ||\vec{F}(\vec{x}) - \vec{G}(\vec{x})|| + ||J[\vec{F}(\vec{x})] - J[\vec{G}(\vec{x})]|| \right\}.$$

Esta segunda distancia define la topología C^1. Si d_0 o d_1 son «suficientemente pequeños», entonces los correspondientes campos vectoriales son C^0-cercanos o C^1-cercanos, respectivamente. Cuando en la definición de la distancia d_k se involucran derivadas hasta de orden k (con k entero positivo), de los respectivos campos vectoriales, entonces tendremos la topología C^k del conjunto de campos vectoriales de clase C^k.

Toda vez que campos vectoriales que, según alguna topología, sean cercanos, pueden dar lugar a comportamientos dinámicos esencialmente diferentes[7], no basta algún tipo de cercanía para garantizar que aquéllos compartan cualidades. También ocurre que dos campos vectoriales pueden ser cercanos con respecto a una distancia, pero no serlo respecto a otra.

El concepto de estabilidad estructural para una clase (*systemes grosseries*) de sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales definidos en el plano, fue introducido en 1937 por los matemáticos soviéticos A. Andronóv y L. S. Pontriagin (véase la referencia [2]). Dicho de forma intuitiva, los estructuralmente estables son sistemas para los que una «pequeña» perturbación del campo vectorial, no altera las características cualitativas de sus trayectorias. Escritas como sistemas, las EDO's del oscilador armónico con fricción y la del oscilador de van der Pol sin forzamiento, son ejemplos de sistemas estructuralmente estables.

Originalmente pensado para campos vectoriales definidos en una región contenida en $\mathbb{R}^n$, este es el concepto de estabilidad estructural de Andronóv:

Definición 2.1. Un sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ con $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ definido en una región $D \subset \mathbb{R}^n$ es llamado estructuralmente estable en una región $D_0 \subset D$ si para cualquier d_1-cercano $\dot{\vec{x}} = \vec{G}(\vec{x})$ en D, existen regiones U y V contenidas en D y $D_0 \subset U$ tal que $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ es topológicamente equivalente en U a $\dot{\vec{x}} = \vec{G}(\vec{x})$ en V.

Dado un campo vectorial, investigar las condiciones necesarias y suficientes para que este sea estructuralmente estable, fue un problema fundamental en sistemas dinámicos. Por ello, este atrajo la atención de varios matemáticos quienes fueron abordando el problema de forma paulatina: primero para campos vectoriales de clase C^1 definidos en $\mathbb{R}^2$, luego para los definidos en $\mathbb{R}^n$ para finalmente, abordar el problema con mayor grado de generalidad: los campos vectoriales definidos en

[7] Este es un ejemplo: para $\mu > 0$ y pequeño, los campos $F(x) = x^3$ y $G(x) = x(x^2 - \mu)$ son C^0-cercanos pero en una vecindad del origen, el primero solo tiene un equilibrio, mientras que el segundo tiene tres, razón por la cual en esta vecindad no son topológicamente equivalentes.

variedades n-dimensionales. De igual manera, el concepto estabilidad estructural fue adaptándose dependiendo del tipo de conjunto en el que los campos vectoriales están definidos. Casi a la par de la búsqueda de condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial fuese estructuralmente estable, otro problema que también fue empezando a estudiarse fue el de averiguar si el conjunto de los campos vectoriales estructuralmente estables, es abierto denso (véase la nota 5).

2.3 Las piedras angulares

En el artículo pionero de Andronóv y Pontriagin de 1937, sus autores solo enuncian las condiciones necesarias y suficientes para que sistemas autónomos analíticos bidimensionales sean estructuralmente estables, pero no dan la demostración. Quince años después, H.F. de Baggis dio condiciones menos restrictivas (solo basta que los campos vectoriales fueran de clase C^1). Este es su teorema:

Teorema 2.1 (tomado de [4]). *El sistema*

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}), \tag{1}$$

donde $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *es un campo vectorial de clase* C^1*, es estructuralmente estable en una región* $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ *si y solo si:*

1. *Tiene un número finito de puntos de equilibrio en* D_0 *y todos ellos son hiperbólicos*[8]*,*
2. *Tiene un número finito de trayectorias cerradas en* D_0 *y todas son, o bien atractoras o bien repulsoras*[9]*,*
3. *No tiene trayectorias que conecten a puntos de equilibrio que sean silla*[10] *en* D_0*.*

El matemático brasileño Mauricio Peixoto fue de los primeros en estudiar sistemáticamente ambos problemas: el de estabilidad estructural y el de la densidad. En [10] Peixoto primero considera campos vectoriales de clase C^1 definidos sobre la bola unitaria $\mathcal{B}^1 : (x_1^2 + x_2^2) \leq 1$, introduce su concepto de estabilidad estructural según la cual:

Definición 2.2. El sistema $\vec{F}$ se dice que es estructuralmente estable si, dada $\varepsilon > 0$ arbitraria, podamos encontrar $\delta > 0$ tal que cualquier

[8] Véase la Definición A.3 que aparece en el Apéndice A.

[9] De hecho que sean hiperbólicas es decir, que el valor absoluto de la derivada del *mapeo de Poincaré* evalúado en el punto fijo (que corresponde al ciclo límite), sea diferente de uno. En el Apéndice A se presenta un resumen de este tema.

[10] Nótese que aquí se incluyen dos tipos de trayectorias silla-silla: i)cuando la trayectoria conecta a dos puntos silla diferentes, en cuyo caso la variedad inestable de uno se conecta con la variedad estable del otro. A dicha trayectoria se le denomina *heteroclínica* y ii)cuando solo es un punto silla, por lo que la trayectoria es un «buckle» llamada *trayectoria homoclínica* que conecta la variedad inestable con la variedad estable del punto silla.

sistema $\vec{G}$ con $d(\vec{F}, \vec{G}) < \delta$, podamos asociar un homeomorfismo h de $\mathcal{B}^1$ en sí misma, tal que:

1. h mapea trayectorias de $\vec{F}$ en trayectorias de $\vec{G}$,
2. h es un ε-homeomorfismo, i.e., para todo punto $p \in \mathcal{B}^1$, $d(p, h(p)) < \varepsilon$, donde d es la distancia euclidiana usual.

Para después dar condiciones necesarias y suficientes para que aquellos sean estructuralmente estables. Esta idea la extiende para campos vectoriales definidos en la bola unitaria n-dimensional $\mathcal{B}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1$; mientras que en [9] el propio Peixoto adoptó la siguiente definición de estabilidad estructural para campos vectoriales definidos en variedades de dimensión dos.

Definición 2.3. Un campo vectorial $\vec{F}$ definido en una variedad de dimensión dos, M_2, se dice que es estructuralmente estable si dada ε se puede hallar una vecindad, V_ε, de $\vec{F}$ tal que siempre que $\vec{G} \in V_\varepsilon$ exista un ε-homeomorfismo de M_2 en sí misma que transforme trayectorias de $\vec{F}$ en trayectorias de $\vec{G}$.

Después se dio cuenta que la finura de la ε-dependencia del homeomorfismo se podía obviar dando por resultado que la definición anterior fuese equivalente a esta:

Definición 2.4. Un campo vectorial $\vec{F}$ definido en M_2 se dice que es estructuralmente estable si existe una vecindad, V, de $\vec{F}$ tal que siempre que $\vec{G} \in V$, exista un homeomorfismo de M_2 en sí misma que transforme trayectorias de $\vec{F}$ en trayectorias de $\vec{G}$.

En el siguiente teorema, Peixoto dio condiciones necesarias y suficientes para que campos vectoriales definidos en una variedad de dimensión dos, sean estructuralmente estables.

Teorema 2.2 (tomado de [9])**.** *A fin de que el campo vectorial $\vec{F}$ sea estructuralmente estable en M_2, es necesario y suficiente que las siguientes condiciones se satisfagan:*

1. *Que solo tenga un número finito de puntos de equilibrio y todos sean hiperbólicos.*
2. *Que los conjuntos α y ω-límite de cada trayectoria pueden ser solamente puntos de equilibrio o trayectorias cerradas.*
3. *Que no haya trayectorias que conecten puntos silla.*
4. *Que haya solamente un número finito de trayectorias cerradas y todas sean simples (atractoras o repulsoras)*[11].

[11] De hecho que sean hiperbólicas. Véase la nota 9.

Una pregunta natural que uno puede plantearse es si para dimensiones mayor o igual a tres existe un teorema análogo al de Andronóv-Pontriagin que dé condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial sea estructuralmente estable. Planteado así de general, la respuesta es: no. Sin embargo, existe una familia de campos vectoriales para los que se dan condiciones suficientes a fin de que sean estructuralmente estables. Éstos los definió el destacado matemático estadounidense Stephen Smale quien, a finales de la década de los años cincuenta del siglo pasado, introdujo el enfoque topológico en los sistemas dinámicos. Al extender el trabajo de Peixoto sobre estabilidad estructural para sistemas de dimensión $n > 2$, Smale definió como sigue los que ahora se llaman *sistemas Morse-Smale*:

Definición 2.5. Un sistema Morse-Smale es aquél que:

1. Tiene un número finito de puntos de equilibrio y todos son hiperbólicos.
2. Tiene un número finito de ciclos límite y todos son atractores o repulsores —todos ellos hiperbólicos— y cuyas variedades estable e inestable se tocan transversalmente.
3. No tiene otros *puntos no errantes o recurrentes*[12].

Smale conjeturó que un campo vectorial es estructuralmente estable si y solo si es Morse-Smale. Sin embargo, estando de visita en el Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) en Río de Janeiro, Smale recibió una carta de Norman Levinson —matemático del MIT— en la que le anunciaba haber encontrado un contrajemplo a su conjetura[13]. El campo vectorial al que se refería Levinson, provenía del oscilador de van der Pol con forzamiento periodico (de hecho de la forma $F_0 \cos \omega t$), deducido por el ingeniero y físico holandés Balthazar van der Pol a propósito del estudio de un circuito no lineal. En un contexto algo diferente (la versión inglesa del radar), este sistema había sido estudiado durante la década de los años cuarenta por los matemáticos británicos Mary Lucy Cartwright y Edderson Littlewood. Cuando el concepto de *caos determinista* aún no se había introducido, Cartwright y Littlewood —adelantándose unos veinte años— lo vislumbraron en sus análisis del oscilador de van der Pol con forzamiento al que el propio Levinson también había hecho contribuciones al entendimiento de su dinámica.

Una vez que Smale tradujo a sus propios términos (geométricos), los detallados análisis de la pareja de ingleses y de Levinson, construyó una descripción geométrica abstracta de conjunto caótico —ahora llamado

[12]La definición de punto errante se encuentra (Definición A.9) en el Apéndice A. Por negación de esta, se tiene la de punto no errante.

[13]En [16] el lector encontrará una bella narrativa de la autoría del propio Smale sobre estas cuestiones.

herradura de Smale— y la usó como un contraejemplo de su propia conjetura. De hecho, construyó un ejemplo de sistema que tiene un número infinito numerable de órbitas periodicas y un conjunto de Cantor no numerable no errante (véase [16]). Esto ocurrió en 1960 mientras Smale visitaba al matemático brasileño Mauricio Peixoto en el IMPA, institución brasileña que se ha ganado una merecida reputación mundial en sistemas dinámicos.

Siguiendo esta vena de desarrollo, diremos que a principios de la década de los años sesenta del siglo pasado, Stephen Smale formuló lo que él llamó *El problema de estabilidad estructural*, enunciándolo como la siguiente pregunta:

Pregunta: *¿Forman las ecuaciones diferenciales estructuralmente estables un conjunto denso en la topología C^1 dentro de todas las ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas de primer orden?*

Una respuesta afirmativa a esta pregunta, fue dada por matemáticos soviéticos y por Peixoto para el caso de sistemas bidimensionales definidos sobre un disco y para variedades compactas de dimensión dos. El siguiente teorema sintetiza los estudios realizados por estos matemáticos.

Teorema 2.3 (Andronóv-Pontriagin y De Baggis-Peixoto, citado de [7].)**.** *El conjunto de los flujos estructuralmente estables es denso (y abierto) en $\chi^r(M_2)$ para cualquier variedad compacta bidimensional.*

Para dimensiones mayores, Smale también dio una respuesta afirmativa para ciertos sistemas que poseen una infinidad de soluciones periodicas; mientras que para dimensión mayor o igual a tres, el propio Smale en su artículo: *Structurally stable systems are not dense* (véase [15]), dio una respuesta negativa al problema general que enunció. Por ello, la mayoría de los campos vectoriales que tienen atractores extraños y comportamientos caóticos, no son estructuralmente estables.

Precisamente este fue uno de los puntos que, con ojo avizor, Zeeman detectó como una de las debilidades del concepto que nos ha ocupado en los últimos párrafos. El otro, es el relacionado con la densidad de los estructuralmente estables.

3. El programa de clasificación de Zeeman y su concepto de estabilidad

En su exposición, Zeeman empezó por observar que el concepto de estabilidad estructural —no obstante lo relativamente sencillo de entender— tiene características que en su opinión, lo hacen «poco elegante» y con dificultades prácticas para su uso. En efecto:

1. La definición de estabilidad estructural se da en términos de un homeomorfismo —para el que basta que él y su inverso sean funciones continuas, no necesariamente diferenciables, no necesariamente funciones suaves— Por ello, según Zeeman:

    > ... decir que algún modelo en la matemática aplicada es topológicamente equivalente a un modelo estándar, no asegura [la existencia de] un cambio suave de coordenadas con respecto al cual el modelo aplicado es estándar.

2. El conjunto de los campos vectoriales estructuralmente estables definidos sobre variedades de dimensión mayor o igual a tres, no es denso dentro del conjunto de todos los campos vectoriales. Esto es delicado pues aunque hay campos vectoriales —como los Morse-Smale con atractores extraños hiperbólicos— que son estructuralmente estables, no dejan de ser casos muy especiales. Sin embargo, campos vectoriales que aparecen en modelación matemática como el sistema de Lorenz, tienen atractores extraños y exhiben comportamientos caóticos, no son estructuralmente estables.

Estas deficiencias condujeron a Zeeman a desechar la estabilidad estructural y a introducir un sentido de estabilidad que las superara: la *estabilidad estocástica*[14], misma que más adelante se precisa y que resultó apropiada para sistemas no lineales disipativos.

Enseguida Zeeman —usando este nuevo concepto de estabilidad— introdujo lo que él llamó *Programa de clasificación*. Este consistía de los siguientes cuatro pasos (véase [20]):

1. Escoger una relación de equivalencia en $\mathcal{V}$ y definir un campo vectorial *estable* como aquél que tiene una vecindad [de campos vectoriales] equivalentes en $\mathcal{V}$,

[14] El concepto *estabilidad estocástica* surgió en el estudio de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE). Un ejemplo de este tipo de ecuaciones es

$$dx(t) = f(x(t),t)dt + g(x(t),t)dB(t),\ t \geq 0,$$

donde $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ y $B(t)$ representa un movimiento browniano. En EDE hay varios sentidos de estabilidad. Uno de ellos usa como criterio el que el límite

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{t} \log(|x(t)|),$$

sea negativo. Por que pudiera prestarse a confusión, quizás el término adoptado por Zeeman, no haya sido el más apropiado.

2. Demostrar que [el conjunto de] los [campos vectoriales] estables, es denso en $\mathcal{V}$,
3. Clasificar las clases [de los campos vectoriales] estables,
4. Clasificar las clases [de campos vectoriales] inestables de codimensión 1,2,... etcétera.

3.1 Tras los pasos de Thom

Clasificar **todos** los campos vectoriales definidos en variedades —como se lo propuso Zeeman en 1987— es una tarea imposible. Un antecedente importante al estudio de este problema lo hicieron —aparentemente de forma independiente— los matemáticos soviéticos Andronóv, Pontriagin y De Baggis y el brasileño Peixoto quienes demostraron que para las variedades de dimensión dos era posible clasificar un conjunto abierto y denso de ellos: los estructuralmente estables (véase el teorema 3). Un poco más de una década después, René Thom buscó hacer algo equivalente en dimensión mayor y empezó con los de tipo gradiente es decir, para los que existe una función suave, $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que $\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x})$, donde ∇ denota al operador gradiente, $\vec{x} \in X$. En dos dimensiones este operador —al actuar sobre la función U— es el vector $\nabla U = (\partial U/\partial x, \partial U/\partial y)$. Ejemplos de campos vectoriales gradiente son el campo gravitacional y el campo eléctrico. Ambos se deducen de un potencial: el gravitacional y el eléctrico, respectivamente los cuales dependen del inverso de la distancia que separa o bien a dos masas o bien a dos cargas eléctricas, según sea el caso. Los sistemas de EDO gradiente se escriben como $\dot{\vec{x}} = -\nabla U$. Por ello, los puntos de equilibrio de los sistemas gradiente, son puntos críticos de la función $-U$ es decir, puntos en los que $\nabla U = \vec{0}$. Supondremos que éstos son *no degenerados* en el sentido de que el determinante de la matriz de Hess evaluada en ellos, no se anula por lo que su caracterización puede hacerse usando la forma cuadrática[15] que localmente (en una vecindad del punto crítico), aproxima a U. Para ello, Thom usó la conjugación o equivalencia izquierda-derecha (véase la sección 2.2) de la función potencial, la cual se vio después que no es lo mismo que la existencia de un homeomorfismo que preserve trayectorias. Con estos ingredientes, el programa de clasificación de Zeeman funcionó: los campos vectoriales estables gradiente, son densos.

Después se vio que en dimensión mayor o igual a tres, los estructuralmente estables no son densos (véase [15]). Esto y su definición mediante homeomorfismos, llevó a Zeeman a desechar la estabilidad

[15]Para dos dimensiones la forma cuadrática es: $ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2$ donde $a = U_{x_1x_1}$, $b = U_{x_1x_2}$ y $c = U_{x_2x_2}$. Aquí los «subs» en U denotan derivadas parciales de esta función las cuales están evalúadas en el punto crítico.

estructural y a buscar una manera de asociar a todos los campos vectoriales funciones diferenciables, extendiendo lo que hizo Thom con los campos gradiente. Para ello Zeeman usó la ecuación de Fokker-Planck —también llamada *ecuación de Kolmogórov hacia adelante*— como herramienta. A fin de introducir dicha ecuación, sean: $p : X \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una función de probabilidad por lo que $p(\vec{x}, t) \geq 0 \ \forall \ \vec{x} \in X, \ t > 0$, $\int_X p = 1$, $\vec{F}$ un campo vectorial definido en X. Luego, dada $\varepsilon > 0$, la ecuación de Fokker-Planck es la ecuación diferencial parcial (EDP):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varepsilon \nabla^2 p - \nabla \cdot (p\vec{F}), \tag{2}$$

la cual da la dinámica espacio-temporal de la probabilidad, p, de que una partícula en movimiento se encuentre en el punto (x_1, x_2, x_3) al tiempo t. Al calcular la divergencia que aparece en el segundo término de la derecha de (2), esta ecuación se escribe así:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varepsilon \nabla^2 p - \vec{F} \cdot \nabla p - p\nabla \cdot \vec{F}, \tag{3}$$

versión que permite hacer transparente la interpretación física de cada uno de sus términos. Por ejemplo

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varepsilon \nabla^2 p - \vec{F} \cdot \nabla p, \tag{4}$$

es una EDP de tipo *difusión-advección*. Aquélla se deduce considerando la caminata aleatoria de una partícula que se mueve en un espacio tridimensional[16] en donde se usan condiciones suficientes de suavidad de la función p y la llamada *aproximación difusiva*. En la ecuación (4) el primer término de la derecha es el término difusivo el cual —para ε «pequeña»— puede verse como una perturbación también pequeña; mientras que el segundo, representa una «desviación» o «arrastre» en la dirección del campo vectorial $\vec{F}$.

De existir, el estado estacionario, $\tilde{p}$, de la ecuación de Fokker-Planck (2) satisface la EDP:

$$\varepsilon \nabla^2 p - \nabla \cdot (p\vec{F}) = 0. \tag{5}$$

[16] En el caso de dimensión uno, un tipo de caminata aleatoria —quizás la más simple— se reduce a que la partícula se mueva la izquierda o a la derecha con probabilidad L y R, respectivamente. Si $p(x, t)$ denota la probabilidad de que la partícula esté en el punto x al tiempo t entonces, a segundo orden de aproximación, se prueba (véase [13]) que p satisface la ecuación diferencial parcial $p_t = Dp_{xx} - vp_x$, donde se supone que los límites

$$v = \lim_{\lambda,\tau\to 0} \left[\frac{\beta\lambda}{\tau}\right] \quad \text{y} \quad D = \lim_{\lambda,\tau\to 0} \left[\frac{\lambda^2}{2\tau}\right],$$

existen y son finitos. Aquí $L + R = 1$ y $\beta = R - L$, siendo λ la separación entre los puntos en los que se discretiza la recta real y τ el tiempo que le lleva a la partícula trasladarse de un punto a otro del espacio discretizado.

Refiriéndose a la EDP (2), en su presentación Zeeman bosquejó la demostración del siguiente teorema[17]:

Teorema 3.1. *Si la variedad X es cerrada y acotada, entonces la ecuación de Fokker-Planck (2) tiene un único estado estacionario, $\tilde{p}$, y [no importando qué condición inicial se tome] todas las soluciones de dicha ecuación tienden a él.*

En [19], Zeeman dio los ingredientes básicos de los que consta la demostración del teorema 4. Así lo escribió:

> La demostración de este teorema usa argumentos del tipo Perron-Frobenius[18]: el mapeo temporal de la evolución del flujo es un operador compacto fuertemente positivo y el único vector propio resultante en $\mathcal{P}$ viene a ser el estado estacionario.

Nótese que el estado estacionario de la ecuación de Fokker-Planck depende tanto del coeficiente de difusión ε, como del campo vectorial considerado. Ahora podemos usar el estado estacionario $\tilde{p}$ como una herramienta para estudiar el campo vectorial $\vec{F}$. Para ello, Zeeman introdujo el mapeo $\Pi : \mathcal{V} \to \mathcal{P}$ del espacio de todos los campos vectoriales al espacio $\mathcal{P}$ de todas las funciones de probabilidad es decir, Π le asocia a cada $\vec{F} \in \mathcal{V}$ una función de probabilidad $p \in \mathcal{P}$. Estos son los dos resultados que, en calidad de conjetura, Zeeman adelantó en la *Waddington Memorial Conference* de Oaxtepec:

Teorema 3.2. [19] *El mapeo $\Pi : \mathcal{V} \to \mathcal{P}$ es suave, abierto y sobre.*

En [19] Zeeman escribió:

---

[17]La numeración que aquí les asignamos a los teoremas 4, 5 y 6 corresponden a 1, 2 y 3, respectivamente en la presentación que hizo Zeeman.

[18]Dentro de la matemática y sus aplicaciones, los *problemas de valores propios* son de fundamental importancia. Si A es una matriz de $n \times n$, el problema de valores propios se enuncia así: ¿Existen $\vec{x}$ y λ tales que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$? De tener solución, el significado de este problema es el siguiente: el efecto de aplicar A al vector $\vec{x}$ es solo modificarle su magnitud. Por lo que, de existir solución, se trata de determinar los subespacios invariantes de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cuya matriz asociada es A. Dependiendo, tanto de la estructura de A como de las cualidades de sus entradas, ello determinará las propiedades que tengan sus valores propios, λ, y sus vectores propios $\vec{x}$. Esta es la versión del Teorema de Perron-Frobenius correspondiente a una familia de matrices:

Teorema. *Si A es no negativa, irreducible y primitiva, entonces:*

1. *Tiene un único valor propio, λ_0, que es real, positivo, simple y tal que $\lambda_0 > ||\lambda_j||$ para $j \neq 0$,*
2. *Todas las componentes del vector propio derecho correspondiente a λ_0, son reales y estrictamente positivas.*

En lo que menciona Zeeman, se trata de un problema de valores propios asociado a un operador diferencial cuyo origen es la ecuación de Fokker-Planck.

[19]En [19] el equivalente a este teorema, Zeeman lo enuncia así:

Teorema. *El mapeo $\Pi : \mathcal{V} \to \mathcal{P}$ es una fibración trivial suave con fibra los campos vectoriales de divergencia nula y sección tranversal los campos vectoriales gradiente.*

> [La demostración del] el Teorema 5 es un trabajo conjunto con Santiago López de Medrano y Marc Chaperon; [mientras que] el resultado análogo para difeormorfismos, es un trabajo conjunto también con Charlotte Watts.

La relación de equivalencia entre dos funciones p y p' de X en $\mathbb{R}$ que Zeeman usó, es la conjugación que definimos en la sección 2.2. A fin de enunciar su resultado de clasificación, conviene precisar los conceptos que en él intervienen. Éstos son[20]:

Definición 3.1. Un campo vectorial $\vec{F} : X \to X$ es estable si tiene una vecindad de campos vectoriales que le son equivalentes en el espacio de todos los campos vectoriales suaves en X con la topología C^∞.

Definición 3.2. Un campo vectorial se dice que es ε-estable si tiene una vecindad de ε-equivalentes en el espacio de todos los campos vectoriales definidos en X.

Definición 3.3. Un campo vectorial es estable si es ε-estable para $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeña.

Definición 3.4. Dos campos vectoriales $\vec{F}$ y $\vec{G}$ definidos en X son ε-equivalentes si las correspondientes soluciones estacionarias, $\tilde{p}_{\vec{F}}$ y $\tilde{p}_{\vec{G}}$, de

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varepsilon \nabla^2 p - \nabla \cdot (p\vec{F}) = 0$$

y

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varepsilon \nabla^2 p - \nabla \cdot (p\vec{G}) = 0$$

respectivamente, son equivalentes.

Una vez introducidas estas definiciones, enunciemos el segundo teorema que Zeeman conjeturó durante su presentación en Oaxtepec:

Teorema 3.3. [21]

1. *Los campos vectoriales ε-estables son abiertos y densos en $\mathcal{V}$.*
2. *Las clases ε-estables son clasificadas por funciones de Morse*[22].

[20] La versión que aquí presentamos es una versión apenas retocada de la que aparece en [7].

[21] En [19] el equivalente a este teorema, Zeeman lo da como el siguiente corolario:

Corolario.

1. *Los campos vectoriales ε-estables son abiertos y densos,*
2. *Los campos vectoriales ε-estables son clasificados por funciones de Morse,*
3. *Los campos vectoriales ε-inestables de codimensión r son clasificados por las catástrofes elementales de codimensión r.*

[22] Una función suave real-valuada definida en una variedad X, es *función de Morse* si no tiene puntos críticos degenerados. El siguiente es un resultado muy importante que satisfacen las funciones de Morse: El conjunto de las funciones de Morse forman un subconjunto abierto y denso dentro de todas las funciones de X en $\mathbb{R}$ en la topología C^2.

3. Las clases ε-inestables son clasificadas por catástrofes elementales[23] *y sus conjuntos de Maxwell*[24].

Según el concepto de estabilidad de Zeeman, el conjunto de campos vectoriales estables es denso, por lo que la mayoría de los sistemas que exhiben atractores extraños, son estables. De esta manera quedó superada la dificultad que presentaba el concepto de estabilidad estructural.

4. ¿Cómo fue? Esta es mi versión

4.1 El perdido y un anuncio

Al día siguiente, muy de mañana, Santiago se levantó y se metió al baño, ahí permaneció hoooras, mismas que a los demás se nos hicieron eternas[25]. Durante la sesión matutina de la Conferencia, Santiago suspendió su labor de aprendiz de camarógrafo que había venido desempeñando desde que se incoporó al evento, anduvo escondido, nadie sabía dónde se había metido. Más tarde, apareció en uno de los recesos de la conferencia. Lo vimos sentado a la mesa en un jardín que rodea a la torre parlamentaria del bello centro vacacional de Oaxtepec. Estaba acompañado de Christopher Zeeman. Sobre la mesa había unas hojas en las que estaban escritos algunos símbolos matemáticos y, a juzgar por lo concentrado de ambos, con esa mirada típica del matemático cuando está absorto en sus pensamientos, con esa mirada que «ve, pero no ve», por que está viendo otra cosa, discutían algún problema importante.

Antes de que iniciara la sesión de la tarde, Zeeman pidió al moderador que le permitiera dar una información. Empezó preguntando a la audiencia: ¿Recuerdan que ayer les presenté un proyecto de investigación que ocuparía parte de los años que me quedan por vivir? Se escuchó un *yeeeees* generalizado. Pues bien, añadió Zeeman, «quiero informarles que ya no tengo proyecto, que Santiago López de Medrano lo resolvió y que estoy muy contento por que voy a publicarlo con él». Las miradas de todos se dirigieron hacia Santiago quien había retomado su labor de aprendiz de camarógrafo, un cerrado aplauso del público se dejó escuchar. Ante ello, Santiago —de pie tras la cámara— se encogió de hombros, puso esa mirada de sorpresa (con los ojos muy abiertos)

[23] El término *catástrofe elemental* fue introducido por René Thom. Sus análisis lo condujeron a establecer una lista de siete catástrofes elementales. Una descripción de estas se encuentra en [14] o en [17].

[24] En la convención de Maxwell de la teoría de catástrofes dado un polinomio, importa determinar las condiciones alegraicas que han de satisfacer los coeficientes que lo definen, a fin de que tenga un par de mínimos cuya tangente sea horizontal (y la misma). Al conjunto de coeficientes del polinomio para el cual esto ocurre, se le llama conjunto de Maxwell.

[25] Esto lo sé por que mis queridos colegas y amigos Guillermo Gómez, José Antonio Gómez y yo compartimos con Santiago la cabaña en la que nos alojamos en Oaxtepec.

que creo muy pocos le saben interpretar. A todos nos sorprendió y nos dio mucho gusto que en menos de veinticuatro horas Santiago haya resuelto una parte del proyecto matemático que Zeeman había planteado el día anterior.

4.2 Así lo consignaron para la posteridad

En el libro: *Theoretical Biology. Epigenetic and evolutionary order from complex systems* (véase [5]), se recogió la versión *in extenso* de los trabajos presentados en la *Waddington Memorial Conference* de Oaxtepec. En el prólogo de este texto, sus editores —Brian Goodwin y Peter Saunders— de forma sucinta, narran el pasaje descrito en los párrafos anteriores. Lo expresaron así:

> Zeeman expuso un teorema que recién había demostrado dando una definición de estabilidad para sistemas dinámicos de dimensión n basada en la noción original de estabilidad estructural para sistemas gradiente debida a Thom. Él [Zeeman] añadió la conjetura que esta es una propiedad genérica de sistemas dinámicos, una conjetura para la cual López de Medrano, en el transcurso de la Conferencia, fue capaz de sugerir una demostración. Esta condujo a una clasificación de ecuaciones diferenciales genéricas y sus bifurcaciones.

En la contribución de Zeeman al libro mencionado, con un poco más de detalle y con notorio júbilo, el fundador del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Warwick, lo describió de la siguiente manera:

> ... Me las arreglé para completar la demostración del teorema justo antes de la conferencia de Oaxtepec. Yo estaba tan lleno de entusiasmo por el resultado que los organizadores en Oaxtepec amablemente me permitieron diez minutos para explicarlo a los asistentes a la Conferencia, aunque aún no tenía alguna aplicación a la biología. En esos diez minutos, describí el teorema 4 y conjeturé el teorema 6. Por una feliz coincidencia ocurrió que Santiago López de Medrano se apareció durante esos diez minutos. Para el siguiente día, él había bosquejado una demostración del teorema 5 y resolvió así mis conjeturas.

Agradecimientos. El autor agradece la cuidadosa lectura del manuscrito realizada por los árbitros. Sus observaciones y sugerencias, debidamente atendidas, contribuyeron a mejorar este trabajo. De igual manera

les estoy muy agradecido a mis amigos Pedro Miramontes y Santiago López de Medrano por sus atinadas y pertinentes observaciones.

Apéndice A. Conceptos y resultados básicos

Los conceptos y resultados que aquí se exponen, pueden ser consultados en cualquier texto básico sobre el tema. Por ejemplo el texto de Arrowsmith y Place [3], es una buena referencia. En un ámbito más local, aquéllos forman parte de unas notas que están siendo preparadas por el autor. Véase [12].

Un ejemplo de sistema dinámico son los sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$, donde $\vec{x}$ es un vector columna de n componentes, el punto sobre aquél denota la derivada respecto al tiempo t y $\vec{F}$ es un *campo vectorial* es decir, una función que a cada punto $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ (o bien un subconjunto de este) le asigna el vector $\vec{F}(\vec{x})$ que también está en $\mathbb{R}^n$. Nótese que el campo vectorial $\vec{F}$ puede estar definido en una variedad X de la que $\mathbb{R}^n$ es un caso particular. Ahora, dado un campo vectorial, $\vec{F}$, le podemos asociar el sistema de EDO $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ y viceversa. Luego, podemos referirnos a uno o a otro de forma indistinta.

En las siguientes definiciones se introducen algunos conceptos fundamentales.

Definición A.1. Un punto $\vec{x}^*$ perteneciente al dominio de $\vec{F}$ se le llama punto de equilibrio del sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ siempre que $\vec{F}(\vec{x}^*) = \vec{0}$.

Definición A.2. Sea $\vec{x}^*$ punto de equilibrio del sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ y supóngase que el campo vectorial $\vec{F}$ es de clase C^1 en una vecindad de $\vec{x}^*$ y sea $J[\vec{F}]|_{\vec{x}^*}$ la matriz de Jacobi de $\vec{F}$ evalúada en $\vec{x}^*$. Al sistema

$$\dot{\vec{x}} = J[\vec{F}]|_{\vec{x}^*}\vec{x},$$

se le llama la aproximación lineal de $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ en una vecindad de $\vec{x}^*$.

Definición A.3. Si ninguna de las partes reales de los valores propios de la matriz de Jacobi, $J[\vec{F}]|_{\vec{x}^*}$, es igual a cero, entonces se dice que el equilibrio $\vec{x}^*$ es *hiperbólico.* Negando esta definición se tiene la *no hiperbolicidad* de un equilibrio $\vec{x}^*$ del sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$.

Definición A.4. Sea $\mathcal{C}$ una trayectoria cerrada del sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$. Si existe una vecindad «tubular» que contenga a $\mathcal{C}$ en la cual el sistema anterior no tenga otra trayectoria cerrada, entonces a $\mathcal{C}$ se le llama *ciclo límite* del sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$.

Definición A.5. Un *flujo* definido en el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, es una función $\Phi : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ con primera derivada continua tal que para cada $t \in \mathbb{R}$, la restricción $\Phi(t, \cdot) \equiv \Phi_t(\cdot)$ satisface:

1. $\Phi_0 =$ la identidad en Ω,
2. $\Phi_{t_1+t_2} = \Phi_{t_2}(\Phi_{t_1})$, para todo t_1, t_2 en $\mathbb{R}$.

Nótese que si en la condición 2 tomamos $t_2 = -t_1$ entonces $\Phi_{t_1-t_1} = \Phi_0$ por lo que de las condiciones 1 y 2, se sigue que existe el inverso, $(\Phi_t)^{-1}$, y que, para cada t, está dado por Φ_{-t}. Más todavía, Φ_{-t} también tiene derivada continua, por lo que el flujo Φ_t es un *difeomorfismo* para cada t.

Definición A.6. Por *órbita* de Φ a través de $\vec{x}_0$ se entiende al conjunto $\{\Phi_t(\vec{x}_0) |\ t \in \mathbb{R}\}$ orientada en el sentido de las t crecientes.

Es nuestro interés establecer la relación entre flujos y sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$. Empezamos introduciendo la siguiente definición.

Definición A.7. Se define *la velocidad o campo vectorial* $\vec{F}$ de un flujo Φ, como

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{d\Phi_t}{dt}|_{t=0} \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\Phi(\varepsilon, \vec{x}) - \Phi(0, \vec{x})}{\varepsilon} \right],$$

para cada $\vec{x} \in \Omega$.

En términos geométricos, la órbita $\{\Phi_t(\vec{x}) | t \in \mathbb{R}\}$ define una curva en Ω que pasa por $\vec{x}$ y el vector $\vec{F}(\vec{x})$ tiene la dirección del vector tangente a la curva en $\vec{x}$ y su magnitud es la rapidez de la curva parametrizada por t.

El siguiente lema establece la relación que buscamos.

Lema A.1. *El flujo* $\Phi_t(\vec{x}_0)$ *es la solución del problema de Cauchy*

$$\begin{array}{rcl} \dot{\vec{x}} & = & \vec{F}(\vec{x}) \\ \vec{x}(0) & = & \vec{x}_0. \end{array} \tag{6}$$

Demostración. Para esto, definamos $\xi(t) = \Phi_t(\vec{x}_0)$ entonces de las propiedades del flujo y la definición de velocidad de flujo dada arriba, se sigue la cadena de igualdades

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\xi(t+\varepsilon)-\xi(t)}{\varepsilon}\right]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\Phi_{t+\varepsilon}(\vec{x}_0)-\Phi_t(\vec{x}_0)}{\varepsilon}\right]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\Phi_{\varepsilon}(\Phi_t(\vec{x}_0))-\Phi_t(\vec{x}_0)}{\varepsilon}\right]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\Phi_{\varepsilon}(\xi(t))-\Phi_t(\vec{x}_0)}{\varepsilon}\right]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\Phi(\varepsilon,\xi(t))-\Phi(0,\xi(t))}{\varepsilon}\right]\\
&= \vec{F}(\xi(t)).
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\xi(t)$ es solución del sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$. Ahora, como Φ_0 es la identidad entonces $\xi(0) = \Phi_0(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$. Esto prueba que ξ satisface, además, la condición inicial. □

La siguiente definición precisa la noción de «origen» y «destino» de trayectorias de un sistema de EDO.

Definición A.8. Un punto $\vec{y} \in \Omega$, se dice que es punto ω-límite de la solución de (6) que pasa por $\vec{x}_0$, si existe una sucesión, $\{t_n\} \to \infty$, tal que $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(\vec{x}_0) = \vec{y}$. Al conjunto de puntos ω-límite de las trayectorias de (6) que pasan por $\vec{x}_0$, se le llama conjunto ω-límite de $\vec{x}_0$ y se denota por $\omega(\vec{x}_0)$ o $L_\omega(\vec{x}_0)$. Si donde aparece $\{t_n\} \to \infty$, se sustituye por $\{t_n\} \to -\infty$, entonces al correspondiente punto se le llama punto α-límite y al conjunto de todos los puntos α-límite, se le llama conjunto α-límite y se denota por $\alpha(\vec{x}_0)$ o $L_\alpha(\vec{x}_0)$.

Ejemplos de conjuntos ω-límite (α-límite) son: puntos de equilibrio o ciclos límite.

El objetivo de los tres párrafos que siguen, es introducir el concepto de *mapeo de Poincaré*. En éstos, aunque nos restringimos a campos vectoriales $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, la línea de razonamiento se puede extender a dimensiones mayores.

Sea $\vec{x}_0 \in \Omega$ un punto que no es punto de equilibrio del sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$. Un segmento, l, de recta que pasa por $\vec{x}_0$ y es perpendicular a $\vec{F}(\vec{x}_0)$ se le llama *línea transversal* de $\vec{F}(\vec{x})$ y la denotaremos por $l(\vec{x}_0)$. Luego, $l(\vec{x}_0)$ es la recta que pasando por $\vec{x}_0$, es generada por un vector $\vec{v}$, perpendicular $\vec{F}(\vec{x}_0)$.

Dada la continuidad de $\vec{F}$, en una vecindad suficientemente pequeña —llamada *sección local* y denotada por $\mathcal{S}$— de $\vec{x}_0$ pero contenida en $l(\vec{x}_0)$ el campo $\vec{F}$ no se anula y, por la forma en la que se eligió a $l(\vec{x}_0)$, $\vec{F}(\vec{x})$ no le es tangente y tampoco se anula en punto alguno de esta vecindad. Entonces las trayectorias de $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ tocan transversalmente a $l(\vec{x}_0)$.

Sean $\mathcal{C}$ un ciclo límite del sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$, $\vec{x}_0 \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{S}$ la sección local al campo vectorial $\vec{F}$ en $\vec{x}_0$. Consideremos el *mapeo retorno* definido en $\mathcal{S}$ el cual asocia, a cada punto $\vec{x} \in \mathcal{S}$, el punto $\Pi(\vec{x}) = \Phi_T(\vec{x}) \in \mathcal{S}$, donde T es el menor tiempo positivo para el cual $\Phi_T(\vec{x}) \in \mathcal{S}$. Este mapeo está definido para todo punto $\vec{x} \in \mathcal{S}$. Sin embargo, la imagen, $\Phi_T(\vec{x})$, no necesariamente está en $\mathcal{S}$ para todo $\vec{x} \in \mathcal{S}$. Lo que sí ocurre, es que si $\vec{x}_0 \in \mathcal{C}$, entonces $\Pi(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$ es decir, $\vec{x}_0$ es *punto fijo* de Π y, como este mapeo es discreto que va de la sección local $\mathcal{S}$ en ella misma entonces, echando mano de resultados válidos para sistemas dinámicos discretos[26] de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tenemos que, dependiendo del valor de la derivada $\Pi'(\vec{x}_0)$, el ciclo límite $\mathcal{C}$ es asintóticamente estable o inestable. De hecho:

- Si $|\Pi'(\vec{x}_0)| < 1$, entonces $\mathcal{C}$ es asintóticamente estable,
- Si $|\Pi'(\vec{x}_0)| > 1$, entonces $\mathcal{C}$ es inestable.

Definición A.9. Para campos vectoriales $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, un punto $p \in \Omega$ se dice que es errante si tiene una vecindad, $U(p)$, y un tiempo T tal que para todo $t > T$ la imagen, $\Phi_t(U(p))$, de $U(p)$ bajo flujo asociado al campo vectorial, no tiene puntos en común con $U(p)$. Es decir, a partir del tiempo T en adelante, todos los puntos de $U(p)$ bajo el flujo, abandonan la vecindad $U(p)$. Un punto p para el que no existe tal vecindad, se le llama punto no errante.

La siguiente definición establece una noción de dinámicas equivalentes.

Definición A.10. Los sistemas de ecuaciones diferenciales $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ y $\dot{\vec{x}} = \vec{G}(\vec{x})$ donde los campos vectoriales $\vec{F}$ y $\vec{G}$ están definidos en Ω_1 y Ω_2 subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, respectivamente, se dice que son *topológicamente equivalentes*, si existe un homeomorfismo[27] $h : \Omega_1 \to \Omega_2$ que transforme trayectorias del primero en trayectorias del segundo, preservando su orientación al aumentar el tiempo t.

El *Teorema de Hartman-Grobman* (véase [3]) asegura que si el punto de equilibrio $\vec{x}^*$ del sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ es hiperbólico entonces, en una vecindad de $\vec{x}^*$, los sistemas $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ y $\dot{\vec{x}} = J[\vec{F}]|_{\vec{x}^*}\vec{x}$ son topológicamente equivalentes.

La definición que sigue dice cuándo dos flujos son conjugados.

Definición A.11. Se dice que los flujos Φ_t y Ψ_t —ambos de M en M— son conjugados, si existe un homeomorfismo $h : M \to M$ tal que

$$h \circ \Phi_t = \Psi_t \circ h, \tag{7}$$

[26] Véase [6].

[27] Sean Ω_1 y Ω_2 subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Una función $h : \Omega_1 \to \Omega_2$ continua con inversa, h^{-1}, continua, es un *homeomorfismo* de Ω_1 en Ω_2.

para todo $t \in \mathbb{R}$. Si en vez de ser h un homeomorfismo, es un difeomorfismo con derivada continua de orden $k \geq 1$, entonces se dice que Φ_t y Ψ_t son C^k-conjugados.

Bibliografía

[1] J. Adem, A. Barajas et al., eds., *Symposium Internacional de Topología Algebraica*, Universidad Nacional Autónoma de México y UNESCO. México, 1958.

[2] A. Andronóv y L. S. Pontriagin, «Sistemes grossiers», *Doklady Akademi Nauk SSSR*, vol. 5, 1937, 247–250.

[3] D. Arrowsmith y C. Place, *An Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1990.

[4] H. D. Baggis, «Dynamical systems with stable structures», en *Contributions to the theory of nonlinear oscillations*, ed. S. Lefschetz, vol. 2, 1952, 37–59.

[5] B. Goodwin y P. Saunders, eds., *Theoretical Biology. Epigenetic and evolutionary order from complex systems*, The John Hopkins University Press, 1992.

[6] J. King Dávalos y H. Méndez Lango, *Sistemas dinámicos discretos*, Las Prensas de Ciencias. Facultad de Ciencias, UNAM, 2014.

[7] K. Lee, *Lectures on Dynamical Systems. Structural Stability and their Applications*, World Scientific Publishing Company. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1992.

[8] J. Milnor, «On simply connected 4-manifolds», en *Symposium Internacional de Topología Algebraica*, Universidad Nacional Autónoma de México y UNESCO, 1958, 122–128.

[9] M. M. Peixoto, «Structural stability on two-dimensional manifolds», *Topology*, vol. 1, 1962, 101–120.

[10] ———, «On structural stability», *Annals of Mathematics*, vol. 69, núm. 1, January 1959, 199–222.

[11] F. Sánchez Garduño, *La Escuela de Otoño de Biología Matemática: su origen y desarrollo*, Enviado a la Revista Ciencias de la Facultad de Ciencias, UNAM.

[12] ———, «Una Introducción a la Dinámica no Lineal: Teoría y modelación matemáticas», En preparación.

[13] F. Sánchez Garduño, V. Castellanos Vargas, I. Quilantán Ortega y G. Velázquez López, «Matemáticas en la distribución espacial de poblaciones», *Miscelánea Matemática, SMM*, núm. 48, 2009, 75–101.

[14] P. Saunders, «Una introducción a la teoría de catástrofes», Siglo XXI de España editores S. A., 1983. Traducción al español de la correspondiente en inglés publicada por Cambridge University Press en 1980.

[15] S. Smale, «Structurally stable systems are not dense», *Am. J. Math.*, vol. 88, 1966, 491–496.

[16] ———, «Finding a Horshoe in the beaches of Rio», *The Mathematical Intellingencer*, vol. 20, núm. 1, 1998, 39–44.

[17] R. Thom, *Estabilidad Estructural y Morfogénesis. Ensayo de una teoría general de los modelos*, Editorial Gedisa S.A., Barcelona 1987, Traducción al español de la versión en francés publicada en 1977.

[18] E. C. Zeeman, *Catastrophe Theory. Selected papers 1972-1977*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1980.

[19] ———, «On the clasification of dynamical systems», *Bull. London. Math. Soc.*, vol. 20, 1988, 545–557.

[20] ———, «A new concept of stability», en *Theoretical Biology, Epigenetic and evolutionary order from complex systems*, The John Hopkins University Press, 1992, 8–15.