Miscelánea Matemática **79** (2024) 41-56

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7905

Pinceles de curvas planas: una introducción a las superficies fibradas

Alexis García Zamora
Unidad Académica de Matemáticas,
Universidad Autónoma de Zacatecas
alexiszamora@uaz.edu.mx

. . . del reloj en vela
que rondan los palomos colipavos
las campanadas caen como centavos.
«La suave patria»
Ramón López Velarde

1. Introducción

El objetivo de este artículo es presentar una introducción a la teoría de superficies proyectivas fibradas. Mi punto de vista será centrarme sobre todo en el caso particular de pinceles de curvas planas y las fibraciones asociadas.

Trabajaremos sobre el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos y cuando hablemos de una *variedad proyectiva* entenderemos una variedad compleja analítica que puede ser expresada como el conjunto de ceros de polinomios homogéneos en un espacio proyectivo (véase [9, cap. 0.2]).

Con esta definición, las variedades son automáticamente no singulares. Sin embargo, al menos en el caso de curvas planas, es imposible eludir a las curvas singulares. De este modo presentamos la definición de singularidad en este caso.

La organización del artículo es como sigue: en la sección 2 introducimos los conceptos de curvas planas afines y proyectivas y explicamos la relación de estos dos conceptos entre sí y su relación con las superficies de Riemann. Esto nos permite introducir el concepto de género de una curva desde un punto de vista topológico.

La sección 3 está dedicada al concepto de pinceles de curvas planas, sus propiedades elementales y a enunciar los dos teoremas claves para su estudio: el de Bézout y el de Bertini. En la sección 4 presentamos diversos ejemplos de pinceles que satisfacen propiedades interesantes e ilustran los conceptos que se han presentado anteriormente.

Hasta este punto el artículo es elemental y pretende ser accesible para cualquiera que conozca el concepto de variedad compleja analítica y algunos fundamentos de topología. Solo los últimos ejemplos de pinceles requieren más teoría para ser comprendidos totalmente, pero en todo caso los enunciados sobre sus propiedades son sencillos.

La situación cambia en la sección 5, donde los conceptos son más sofisticados y es necesario conocer fundamentos de geometría algebraica para comprenderlos.

Hemos tratado de incluir ideas de cómo se demuestran los resultados presentados, aunque sea en casos particulares. Los ejercicios planteados a lo largo del artículo son esenciales para la compresión del texto.

Este artículo está dedicado a todos mis alumnos de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, que durante años me han ayudado a desarrollarme como profesional y como ser humano.

Agradecimientos

Varios árbitros anónimos hicieron observaciones y correcciones que ayudaron substancialmente a la mejora del artículo. El Dr. Juan Vázquez Aquino realizó una lectura detallada del texto e hizo valiosas correcciones.

2. Curvas Algebraicas

Definición 2.1. La curva afín C asociada a un polinomio $f \in \mathbb{C}[x, y]$ es el conjunto de ceros del polinomio f, esto es:

$$C := \{p \in \mathbb{C}^2 \mid f(p) = 0\}.$$

Un elemento $p \in C$ se dice no singular si alguna de las derivadas parciales $f_x(p)$ ó $f_y(p)$ no se anula. C se dice no singular si todos sus puntos son no singulares. El grado de C será el grado del polinomio f.

Los fundamentos de la teoría de curvas planas pueden consultarse en [8] y [17].

La curva C es un espacio topológico con la topología inducida por la topología euclidiana de $\mathbb{C}^2$. En un punto no singular de C podemos aplicar el teorema de la función implícita (holomorfo) para demostrar que localmente C es una variedad compleja analítica de dimensión 1. Si C es no singular estas estructuras locales son compatibles y determinan una estructura global de superficie de Riemann sobre C. Véase [11, cap I, teo. 2.1] y la discusión que le sigue.

Muchos de los teoremas importantes de la teoría de superficies de Riemann se refieren al caso de superficies compactas. Las curvas afines quedan fuera de este caso:

Proposición 2.2. *Sea $C \subset \mathbb{C}^2$ una curva afín, entonces C no es compacta.*

Idea de la demostración.

La idea es demostrar que C, aún cuando es un conjunto cerrado, no puede ser acotado. Esto es consecuencia del hecho de que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado. En efecto, consideremos una bola $\mathbb{B}_M$ con centro cero y radio M arbitrariamente grande. Sea $x_0 \in \mathbb{C}$, tal que $|x_0| > M$. Consideramos la ecuación $f(x_0, y) = 0$ para concluir que $C \not\subset \mathbb{B}_M$. $\square$

La no compacidad de las curvas afines (en general de las variedades afines) es una de las motivaciones principales para introducir el estudio de las variedades proyectivas. En $\mathbb{C}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}$ podemos definir la siguiente relación de equivalencia: $(x_0, \dots, x_n) \equiv (y_0, \dots, y_n)$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo i. Consideramos π la aplicación cociente y definimos $\mathbb{P}^n$ como el cociente $\mathbb{C}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}/\equiv$. Notemos que $\mathbb{P}^n = \pi(S)$ donde $S = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\} \mid \sum |x_i|^2 = 1\}$. De este modo $\mathbb{P}^n$ es un espacio topológico con la topología cociente inducida por la topología euclidiana de $\mathbb{C}^{n+1}$. Además, $\mathbb{P}^n$ es compacto, pues es la imagen bajo la función continua π del compacto S. Para una discusión sobre la topología y otras propiedades de las variedades proyectivas complejas véase [12, cap. I, §10], en particular el teorema 2.

La clase de equivalencia de un elemento $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}$ se denota por $p = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$.

Definición 2.3. Sea $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ un polinomio homogéneo. La curva plana proyectiva (o simplemente curva plana) asociada a F se define como:

$$C := \{p \in \mathbb{P}^2 \mid F(p) = 0\}.$$

El grado de C será el grado del polinomio F. Si el polinomio F es irreducible, decimos que C es irreducible.

Muchas veces para referirnos a C usamos simplemente la expresión $\{F = 0\}$.

Notemos que, para que la expresión $F(p) = 0$ esté bien definida, es decir, no dependa del representante de p que elijamos es necesario suponer que F es un polinomio homogéneo.

Existe una relación entre curvas planas afines y proyectivas dada por la siguiente correspondencia: Si $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, entonces podemos construir un polinomio homogéneo $z^d \cdot f(x/z, y/z)$, con d el grado de f. Este polinomio resulta ser también de grado d. Inversamente, a un polinomio homogéneo F en tres variables le podemos asociar un polinomio (en general no homogéneo) en dos variables: $F(x, y, 1)$. La curva afín $\{f = 0\}$ puede considerarse como la intersección de $\{F = 0\}$ con el abierto $z \neq 0$ de $\mathbb{P}^2$. El conjunto $\{F = 0\}$ será así la cerradura en $\mathbb{P}^2$ de $\{f = 0\}$.

Ejercicio. Dado $f(x, y) = y^2 - x^3 + x^4$ calcule el polinomio homogéneo F descrito arriba. Luego calcule el polinomio no homogéneo asociado a F y compruebe que se recupera f.

Definición 2.4. Sea $C = \{F = 0\}$ una curva plana, un punto $p \in C$ se dice no singular si alguna de las derivadas parciales $F_x(p)$, $F_y(p)$ ó $F_z(p)$ es diferente de cero. Si todos los puntos de C son no singulares, entonces decimos que la curva C es no singular. Si en un punto $p \in \mathbb{P}^2$ se anulan todas las derivadas parciales de F, entonces decimos que p es un punto singular de C.

Observación 2.5. Si F es homogéneo de grado d, entonces se satisface la fórmula de Euler:

$$d \cdot F = xF_x + yF_y + zF_z, \tag{FE}$$

de este modo si un punto anula a todas las derivadas parciales de F, entonces $p \in C$.

Es una vez más consecuencia del teorema de la función implícita (versión holomorfa) que si $C = \{F = 0\}$ es no singular, entonces C tiene estructura de superficie de Riemann compacta [11, cap. I.3].

Ejercicio. Demuestre que la curva afín $\{f = 0\}$ es no singular si y solo si dado el polinomio homogéneo $F(x, y, z) = z^d \cdot f(x/z, y/z)$, la curva proyectiva $\{F = 0\}$ es no singular en todo punto del abierto $z \neq 0$.

Observación 2.6. A partir de ahora, aún cuando escribamos $\{f(x, y) = 0\}$, estaremos pensando en la curva proyectiva $\{F = 0\}$ asociada.

Si C es una curva proyectiva plana no singular, entonces resulta ser compacta y orientable, por lo tanto tiene definido su invariante topológico: el género. Es decir, C será homeomorfa a una esfera con g asas, el número de asas es llamado el género de C. Para este y otros hechos topológicos sobre superficies de Riemann se puede consultar [14], especialmente el capítulo 5.

Existe una fórmula que relaciona el grado de F con el género g:

$$g = \frac{d(d-3)}{2} + 1. \tag{FG}$$

En general, si C es singular existe una desingularización:

$$\phi : \tilde{C} \to C,$$

donde $\tilde{C}$ es una superficie de Riemann y ϕ es biyectiva en el complemento de la preimagen de los puntos singulares de C. La aplicación ϕ se puede construir como composición de aplicaciones llamadas explosiones (véase la sección 5). Existen fórmulas para calcular el género de $\tilde{C}$ en función del grado de C y de las singularidades de C (véase [9, cap. 2.1], [11, cap. III.2] o [8, cap. 8, prop. 5]).

3. Pinceles de curvas planas

Una idea fundamental de la geometría algebraica es estudiar las variedades en familias. Por ejemplo, en el caso de curvas planas en lugar de estudiar una sola curva, consideraremos lo que se conoce como un pincel (un árbitro anónimo hizo notar que el término se deriva del italiano «penello»):

Definición 3.1. Sea F un polinomio homogéneo irreducible de grado d y G un polinomio homogéneo del mismo grado d, $F \neq c \cdot G$, con c una constante. El pincel generado por F y G es el conjunto de curvas planas proyectivas:

$$\mu F + \lambda G = 0,$$

$(\mu : \lambda) \in \mathbb{P}^1$. Es decir, para cada $(\mu : \lambda)$ tenemos definida una curva plana de grado d. El pincel se denota por Λ y para cada $(\mu : \lambda)$ escribimos $\mu F + \lambda G = 0 \in \Lambda$.

Observación 3.2. Al tomar el valor $\lambda = 0$, obtenemos la curva $F = 0$ y al tomar el valor $\mu = 0$ la curva $G = 0$. Así $F, G \in \Lambda$. Usualmente, si $\mu \neq 0$ escribimos $F_\lambda := F + \lambda G$ para un elemento del pincel. Aún si $\mu = 0$ se suele escribir $F + \lambda G$, entendiendo en este caso que «$\lambda = \infty$», es decir $(\mu : \lambda) = (0 : 1)$.

La hipótesis de que F es irreducible garantiza que todos los elementos del pincel, salvo tal vez un número finito son irreducibles. Vea más abajo el teorema 3.6 y la nota que le sigue.

En lo que sigue cuando nos refiramos a un pincel Λ, supondremos fijos a los generadores F y G. Diremos que una propiedad se satisface para un elemento general de Λ si esta se satisface para todos los $\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, salvo tal vez para un número finito de estos.

Un pincel puede interpretarse como una función de un abierto $U \subset \mathbb{P}^2$ en $\mathbb{P}^1$:

$$\Lambda : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1,$$

donde para cada $p \in \mathbb{P}^2$ definimos:

$$\Lambda(p) = (F(p) : G(p)).$$

La flecha discontinua indica que la aplicación está definida solo en un abierto, a saber aquellos puntos p donde $F(p) \neq 0$ ó $G(p) \neq 0$, es decir, es lo que se conoce en geometría algebraica como una aplicación racional.

Definición 3.3. Sea Λ un pincel de curvas planas. El conjunto de puntos $p \in \mathbb{P}^2$ tales que $F(p) = G(p) = 0$ se denomina el lugar base de Λ.

El resultado fundamental sobre el lugar base de un pincel es:

Teorema 3.4 (Débil de Bézout)**.** *Sea Λ un pincel, entonces el conjunto de puntos base de Λ es finito y no vacío.*

Observación 3.5 (Teorema fuerte de Bézout)**.** La versión más general del teorema de Bézout establece que dos curvas de grado m y n sin componentes comunes se intersectan en nm puntos «contados con multiplicidad». Definir qué debemos entender por multiplicidad excede el objetivo de este trabajo. Por el momento lo importante es recordar que si dos polinomios homogéneos no tienen componentes irreducibles comunes, entonces las curvas que definen se intersectan en un número finito de puntos. Véase [8, cap. 5.3].

Idea de la demostración del teorema de Bézout. La parte compleja de la demostración es definir el número de intersección de manera que satisfaga una serie de propiedades «naturales», entre ellas que este solo dependa del grado de las curvas que se intersectan. Es decir, si llamamos (F, G) al número de intersección de dos curvas proyectivas dadas por F y G y el grado de F es d, entonces sucede que $(F, G) = (F', G)$ con $\{F' = 0\}$ cualquier otra curva de grado d [8, cap. 5.3].

Una vez que este hecho está establecido, entonces la demostración se reduce a calcular número de intersección con rectas. Si $L = \{z = 0\}$ es una recta y G es un polinomio de grado m que no es divisible por z, las intersecciones de L y $G = 0$ están dadas por las soluciones de la ecuación:

$$G(x, y, 0) = 0.$$

Como G resulta ser homogéneo en dos variables, tendrá exactamente m soluciones $(x : y)$, si las contamos con multiplicidad. Para calcular el número (F, G) con F de grado n debemos incluir en nuestra definición de número de intersección la propiedad de que $(H^d, G) = d(H, G)$ para cualquier número natural d y cualquier polinomio homogéneo H.

De este modo:

$$(F, G) = (L^n, G) = n(L, G) = nm. \quad \square$$

El otro hecho fundamental de la teoría de pinceles es el siguiente:

Teorema 3.6 (Bertini). *Sea Λ un pincel, entonces el elemento general del pincel no tiene puntos singulares fuera del lugar base.*

Observación 3.7. Existen versiones más generales del teorema 3.6, que se refieren a morfismos algebraicos con valores en espacios proyectivos, véase [9, cap. I.1, p. 137]. Como lo hemos formulado aquí es equivalente a demostrar que como por definición F es irreducible entonces para todos los valores de λ, excepto tal vez un número finito, las curvas $F + \lambda G$ son irreducibles.

Idea de la demostración del teorema de Bertini. Suponemos que F es irreducible. Fijemos coordenadas proyectivas $(x_0 : x_1 : x_2)$ (para esta demostración será más útil esta notación que $(x : y : z)$.)

Un punto $p \in \mathbb{P}^2$ es un punto singular de la curva $F + \lambda G$ si y solo si:

$$\begin{aligned} F(p) + \lambda G(p) &= 0, \\ F_i(p) + \lambda G_i(p) &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

donde F_i denota a F_{x_i}. Como $\lambda \in \mathbb{P}^1$ debe ser distinto de cero, si suponemos que p no es punto base de Λ debemos tener que:

$$F(p)G_i(p) - G(p)F_i(p) = 0, \quad i = 0, 1, 2.$$

Así, si para algún $i \neq j$ $FG_i - GF_i$ y $FG_j - GF_j$ no tienen factores comunes entonces por el teorema 3.4 existirán un número finito de tales p. Además, como p no está en el lugar base de Λ, podemos suponer que, por ejemplo, $G(p) \neq 0$. En este caso el único elemento del pincel que contiene a p será

$$F + \lambda_0 G,$$

con $\lambda_0 = -\frac{F}{G}(p)$.

De este modo, concluimos que en el complemento de los posibles factores comunes de $FG_i - GF_i$ existen un número finito de λ tales que $F + \lambda G$ tienen puntos singulares fuera del lugar base.

Ahora debemos comprobar que si H es el máximo común divisor de los polinomios $FG_i + GF_i$, los puntos de $\{H = 0\}$ están contenidos en un número finito de elementos del pincel Λ. Esto se sigue del siguiente:

Lema 3.8. *Sea H el máximo común divisor de $FG_i - GF_i$, $i = 0, 1, 2$ y $H = \prod H_k^{n_k - 1}$ $(H_k \neq H_l)$ su descomposición en factores irreducibles, entonces para cada k existe λ_k tal que:*

$$F + \lambda_k G = H_k^{n_k} A_k,$$

donde H_k no divide a A_k. Inversamente si para algún λ_k

$$F + \lambda_k G = H_k^{n_k} A_k,$$

entonces $H_k^{n_k-1}$ divide a H.

Como los posibles valores de k son finitos, del lema se concluye el teorema.

Una de los implicaciones del Lema es bastante sencilla, si:

$$F + \lambda_k G = H_k^{n_k} A_k,$$

entonces:

$$\frac{F}{G} + \lambda_k = \frac{H_k^{n_k} A_k}{G}.$$

Diferenciando obtenemos:

$$d\left(\frac{F}{G}\right) = \frac{H_k^{n_k-1}}{G^2}\omega,$$

para algún diferencial ω. Tomando en cuenta que el numerador de $d(\frac{F}{G})$ es:

$$\sum_i (FG_i - GF_i) dx_i,$$

obtenemos que $H_k^{n_k-1}$ divide a H. Por supuesto, para que esta demostración sea válida debemos formalizar el concepto de diferenciales. Esto se obtiene mediante la teoría de diferenciales de Kähler o diferenciales regulares [13].

La demostración completa del lema se puede encontrar en [10, 2.3.5].

□

Definición 3.9. Si $F_\lambda \in \Lambda$, decimos que es un elemento singular del pincel si tiene una singularidad fuera del lugar base de Λ.

Otra propiedad importante de los pinceles es la de ser (o no) isotrivial.

Para definir esta noción, debemos recordar primero qué significa que dos curvas planas sean isomorfas. Dadas dos curvas planas C, B una función:

$$\phi : C \to B,$$

se dice regular si para cada $p \in C$ existe una vecindad $U \subset C$ de p tal que $\phi \mid_U = L/M$ con L y M polinomios homogéneos del mismo grado y $M(p) \neq 0$.

Un isomorfismo es una ϕ como antes tal que admite una función inversa que también es regular.

Definición 3.10. Un pincel Λ se dice isotrivial si para λ y μ generales $F_\lambda = 0$ y $F_\mu = 0$ son isomorfas. En caso contrario decimos que el pincel no es isotrivial.

En la próxima sección brindaremos ejemplos de pinceles que satisfacen estas definiciones.

En el estudio de pinceles existen algunos problemas de interés que se relacionan con la teoría de curvas algebraicas. Mencionamos dos de ellos:

Número de elementos singulares: Dado Λ un pincel establecer condiciones sobre sus elementos para que existan al menos cierto número de elementos singulares. Para estudiar este problema una de las primeras condiciones que se debe pedir es que el pincel no sea isotrivial.

Automorfismos de un pincel: Se trata de establecer si existen automorfismos lineales o birracionales de $\mathbb{P}^2$ que restringidos a los elementos del pincel determinan un automorfismo de cada elemento. Por un automorfismo lineal de $\mathbb{P}^2$ entendemos una aplicación:

$$L : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2,$$

dada por una matriz invertible, es decir, $L \in PGL(2, \mathbb{C})$.

4. Ejemplos de pinceles

En los ejemplos que presentaremos en esta sección serán utilizados varios resultados de clasificación de superficies de Riemann de género 0 y 1. Para las demostraciones y hechos relacionados el lector se debe referir a [8], [11], [14] y [17]. Aunque considerados como resultados básicos de la teoría de superficies de Riemann, distan mucho de ser triviales y generalmente se derivan como consecuencia del teorema de Riemann-Roch.

Ejemplo 4.1. Cónicas por 4 puntos.

Partimos de cuatro puntos en $\mathbb{P}^2$ tales que cualesquiera tres de ellos no están sobre una misma recta (se dice que los puntos están en posición general) y consideramos el conjunto de todos los polinomios homogéneos de grado 2 en $\mathbb{C}[x, y, z]$ que se anulan en estos cuatro puntos. Supongamos por ejemplo, que el conjunto de cuatro puntos es: $B = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1), (1 : 1 : 1)\}$. Un polinomio homogéneo de grado 2 tiene la siguiente forma:

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4y^2 + a_5yz + a_6z^2,$$

donde $a_i \in \mathbb{C}$.

La condición para que el polinomio se anule en los primeros tres puntos es que $a_1 = a_4 = a_6 = 0$. La condición para que se anule en el cuarto punto es: $a_2 + a_3 + a_5 = 0$. De este modo, nuestro conjunto de polinomios de grado dos determina el pincel:

$$\Lambda : \quad x(y-z) + \lambda y(z-x) = 0.$$

El conjunto de puntos base de Λ es precisamente B. Claramente los elementos $F_\infty = y(z-x)$, $F_0 = x(y-z)$, $F_1 = z(x-y)$ son elementos singulares del pincel con singularidades fuera del lugar base en los puntos $(1:0:1)$, $(0:1:1)$ y $(1:1:0)$ respectivamente.

Ejercicio. Demuestre que efectivamente estos son los únicos elementos singulares del pincel.

Este pincel resulta ser isotrivial. Esto se puede deducir del hecho de que el género de todos los elementos no singulares es, en virtud de la fórmula (FG):

$$g = \frac{d(d-3)}{2} + 1 = 0,$$

y que todas las curvas de género cero son isomorfas entre sí (veáse, por ejemplo, [11, prop. 1.7, p. 197]).

Ejemplo 4.2. Curvas de género 1.

Consideremos:

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda).$$

Esta es la ecuación general de una curva de género 1 [11]. A medida que el parámetro λ varía en $\mathbb{C}$ obtenemos curvas no isomorfas.

La expresión anterior es equivalente a:

$$\Lambda : \quad y^2 - x^2(x-1) + \lambda x(x-1) = 0,$$

en realidad estamos considerando curvas proyectivas, recuérdese la nota 2.6.

De este modo, Λ es no isotrivial y además parametriza a todas las superficies de Riemann de género uno, además de ciertas curvas singulares. Por ejemplo, los valores $\lambda = 0$ y $\lambda = \infty$ dan lugar a curvas singulares.

Ejercicio. Calcule los puntos base de Λ y todos los valores de λ para los que se obtienen curvas singulares.

Ejemplo 4.3. Una familia de pinceles isotriviales.

Consideramos ahora

$$\Lambda : \left(\prod_{i=1}^{d-1} (x + a_i y) + \prod_{i=1}^{d} (x + \alpha_i y) \right)^n + \lambda \prod_{i=1}^{k} (x + a_i y)^{n_i},$$

donde $k \leq d-1$, $\prod_{i=1}^{d-1} a_i \neq 0$, $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, $a_i \neq \alpha_j$ para todo i y j, $\sum_{i=1}^{k} n_i = nd$ y cada n_i relativamente primo con n.

Este pincel tiene las siguientes propiedades:

i) El único punto base de Λ es el $(0,0)$.
ii) El elemento general de Λ es irreducible.
iii) El género geométrico del elemento general de Λ es $g = \frac{(k-2)(n-1)}{2}$.

La propiedad más importante de este pincel es que es isotrivial (veáse la definición 3.10). De este modo, brinda ejemplos de pinceles de género arbitrariamente grande que son isotriviales. La demostración de estos hechos escapa a las pretensiones del presente artículo. Los detalles se pueden consultar en [1], donde también se explica la relevancia de este pincel en el estudio de ecuaciones diferenciales algebraicas en el plano complejo.

Ejemplo 4.4. Pincel de Wiman-Edge.

En este caso, dada la naturaleza simétrica de la expresión de las curvas F y G, usaremos las coordenadas proyectivas $(x_0 : x_1 : x_2)$ en lugar de $(x : y : z)$. Consideremos la curva:

$$2\sum_{i,j,l}(x_i^4 x_j x_l) + x_i^3 x_l^3) - 2\sum_{i \neq j}(x_i^4 x_j^2) + \sum_{i,j,l} x_i^3 x_j^2 x_l - 6x_0^2 x_1^2 x_2^2 = 0.$$

Esta curva es conocida como curva de Wiman y tiene la propiedad de que pasa por los 4 puntos del conjunto B definido en el ejemplo 4.1 y además tiene una singularidad en cada uno de estos puntos.

La curva W admite una acción del grupo simétrico S_5. La acción puede describirse del siguiente modo: llamemos e_i, $i = 1, \ldots, 4$ a los elementos de B. Consideremos los automorfismos lineales L_i de $\mathbb{P}^2$ que fijan a e_i e intercambian cíclicamente a los e_j, $j \neq i$. Por ejemplo, L_1 está dado por la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos además las transformaciones cuadráticas Q_i de $\mathbb{P}^2$ que dejan fijo a e_i y tienen como triángulo fundamental a $\{e_j\}$ con $j \neq i$. El subgrupo de transformaciones generado por estos automorfismos es isomorfo a S_5, los L_i son los ciclos de longitud tres y los Q_i las transposiciones. Todas estas transformaciones dejan invariante a la curva de Wiman e inducen, por tanto, automorfismos de esta curva.

Sea ahora l_{ij} la recta que une a los puntos e_i y e_j y sea $C = \prod l_{ij}$. C es invariante por la acción de los L_i, pero no de los Q_i, esto es, admite la acción del grupo alternante A_5. El pincel generado por estas dos curvas es llamado el pincel de Wiman-Edge:

$$\Lambda : W + \lambda C.$$

Ejercicio. Calcule la expresión de cada una de las transformaciones L_i y demuestre que C es invariante bajo todas ellas.

Su elemento general es una curva de género 6 que admite una acción de A_5 y algunas curvas especiales, como W, una acción de S_5. Este pincel tiene singularidades en cuatro de sus puntos base (los e_i), pero de acuerdo a nuestra definición de elemento singular de un pincel (definición 3.9), solo admite un número finito de elementos singulares. Estos elementos han sido descritos explícitamente y resultan ser precisamente 5.

Algunos trabajos dedicados al estudio de este pincel son: [6], [7] y [18].

5. Fibraciones

Entendemos por una superficie proyectiva X a una variedad compleja analítica de dimensión 2 que puede expresarse como los ceros de un conjunto de polinomios homogéneos en el algún espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$. Las referencias básicas para el estudio de superficies son [3] para un tratamiento algebraico y [2] para un tratamiento complejo analítico y más completo.

Definición 5.1. Una fibración definida en X y con base una curva proyectiva B es un una aplicación holomorfa $f : X \to B$ sobreyectiva y con fibras conexas, donde por fibra denotamos a la preimagen de un punto $b \in B$.

La teoría de superficies fibradas puede entenderse como un intento para entender la geometría de objetos de dimensión 2 (la superficie X) a través de la geometría de objetos de dimensión 1 (B y las fibras de f).

Una idea fundamental es que a todo pincel de curvas planas se le puede asociar una fibración. Para esto necesitamos el concepto de explosión, que es fundamental para el estudio de curvas y superficies.

Si partimos del plano $\mathbb{C}^2$, la explosión centrada en $(0,0)$ se define como:

$$\tilde{\mathbb{C}^2} := \{xu_1 - yu_0 = 0\} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1,$$

donde (x, y) son las coordenadas de $\mathbb{C}^2$ y $(u_0 : u_1)$ las de $\mathbb{P}^1$. $\tilde{\mathbb{C}^2}$ es una superficie (que no es afín ni proyectiva) y viene dotada de una aplicación sobreyectiva:

$$\pi : \tilde{\mathbb{C}^2} \to \mathbb{C},$$

a saber, la restricción a $\tilde{\mathbb{C}}^2$ de la proyección: $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}^2$.

La propiedad fundamental es que para todo punto $p \in \mathbb{C}^2 - (0,0)$, la preimagen $\pi^{-1}(p)$ es un punto, mientras que $\pi^{-1}(0,0)$ es isomorfo a $\mathbb{P}^1$.

Ejercicio. Demuestre la última afirmación.

Este proceso sirve como «modelo local» para definir la explosión de una superficie X en un punto $p \in X$. Dada la pareja (X, p) siempre existe otra superficie $\tilde{X}$ y un morfismo sobreyectivo:

$$\pi : \tilde{X} \to X,$$

tal que para todo punto $q \in X - p$, la preimagen $\pi^{-1}(q)$ es un punto, mientras que $\pi^{-1}(p)$ es isomorfo a $\mathbb{P}^1$.

Teorema 5.2. *Sea Λ un pincel de curvas planas, después de un número finito de explosiones obtenemos una superficie proyectiva X y un diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbb{P}^2 \arrow[r, dashed, "\Lambda"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd},$$

donde π es la sucesión de explosiones y $f : X \to \mathbb{P}^1$ es una fibración. Además, excepto por un número finito las fibras de f son no singulares y todas las fibras no singulares tienen el mismo género.

Véase [3, teo. II.7], o [13, cap. IV 3,3].

Así este proceso, que se llama «resolución de la indeterminación», resuelve al mismo tiempo dos problemas: elimina las indeterminaciones de la aplicación Λ y las posibles singularidades de los elementos del pincel en los puntos base.

Para enunciar el teorema principal de esta sección necesitamos la siguiente:

Definición 5.3. Sea $C = C_1 \cup \cdots \cup C_k$ una unión de curvas proyectivas, posiblemente singulares. C se dice semiestable si:

i) $C_i \neq C_j$ para $i \neq j$,
ii) C es conexa,
iii) toda singularidad de C es de tipo nodal,
iv) si C_l es racional, entonces intersecta al resto de las C_j en al menos dos puntos.

Una singularidad nodal es una que localmente es isomorfa al producto de dos rectas. Si en la definición 5.3 parte iv) cambiamos la condición «en al menos dos puntos» por «en al menos tres puntos», entonces la curva se llama *estable*.

La definición de curva semiestable puede parecer a primera vista poco natural, pero su estudio resulta interesante por la siguiente razón:

existe un espacio analítico $\mathcal{M}_g$ que parametriza a las clases de isomorfismo de superficies de Riemann de género g. Esto es, a cada clase de isomorfismo de una superficie de Riemann de género g le corresponde de manera unívoca un punto de $\mathcal{M}_g$ y viceversa. Sin embargo, este espacio, conocido como moduli de curvas de género g, no es compacto. Uno de los modos de compactificar $\mathcal{M}_g$ es «agregar las curvas semiestables», el espacio así construido se denota por $\overline{\mathcal{M}}_g$ (véase en [12] Curves and Their Jacobians, Lecture II).

El concepto de isotrivialidad (definición 3.10) puede trasladarse de pinceles a fibraciones sin ningún cambio.

Teorema 5.4 (Beauville, Tan)**.** *Sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibración no isotrivial y con todas sus fibras semiestables y denotemos por s el número de sus fibras singulares. Si el género g de la fibra general es al menos* 2*, entonces $s \geq 5$.*

El teorema puede interpretarse como un resultado sobre de la geometría de $\mathcal{M}_g$. Si la fibración $f : X \to \mathbb{P}^1$ es semiestable y no isotrivial, entonces tenemos definida una aplicación $\mathbb{P}^1 \to \overline{\mathcal{M}}_g$, que asigna a cada $p \in \mathbb{P}^1$ la clase de la fibra $f^{-1}(p)$ y cuya imagen es una curva. De este modo el teorema 5.4 afirma que no existe ninguna curva isomorfa a $\mathbb{P}^1$ en $\mathcal{M}_g$ y cualquiera que exista en $\overline{\mathcal{M}}_g$ debe tocar al «borde» de $\mathcal{M}_g$ en al menos 5 puntos (si $g \geq 2$). El estudio de fibraciones con un número bajo de fibras singulares es un problema naturalmente importante y generalmente conduce a superficies X con propiedades especiales.

Observación 5.5. La hipótesis de que la base de la fibración sea $\mathbb{P}^1$ no puede ser evitada, si la base es una curva de género mayor, entonces existen ejemplos de fibraciones con una o ninguna fibra singular.

El teorema 5.4 aparece demostrado en [4] y [16], existen varios refinamientos del mismo, véase por ejemplo [15] y [5]. La demostración es complicada y basada en teoremas profundos como la desigualdad de Miyaoka. Presentaremos aquí una demostración elemental de un caso particular. Decimos que un pincel de curvas planas de grado d, Λ, es transversal si su lugar base consta exactamente de d^2 puntos, esto es, dos generadores F y G son no singulares y en sus puntos de intersección tienen tangentes distintas.

Demostración del teorema 5.4 para pinceles transversales.
Supongamos que nuestra fibración semiestable $f : X \to \mathbb{P}^1$ se obtiene como resolución del lugar base de un pincel trasversal de curvas planas Λ, es decir por medio del proceso enunciado en el teorema 5.2. Las fibras singulares de f se corresponden con los elementos singulares del pincel Λ y como la fibración es semiestable estos elementos solo pueden tener nodos como singularidades.

Existe una fórmula para contar el número total de nodos e_f en las fibras de f. Esta fórmula se deriva de un cálculo de características topológicas de Euler:

$$e_f = e(X) + 4(g-1),$$

donde $e(X)$ denota la característica topológica de Euler de X [2, III.11, prop. 11.4]. En nuestro caso X se obtiene de realizar d^2 explosiones en $\mathbb{P}^2$. El efecto de una explosión es aumentar la característica de Euler en uno, intuitivamente porque quitamos un punto y en su lugar colocamos una esfera. De este modo:

$$e_f = d^2 + 3 + 4(g-1),$$

pues $e(\mathbb{P}^2) = 3$. Sustituyendo en esta igualdad la fórmula (FG) obtenemos:

$$e_f = 3d^3 - 6d + 3.$$

Ahora, si F_0 es una curva plana reducida de grado d el número máximo de nodos que admite es $\frac{d(d-1)}{2}$, este número se alcanza en el producto de d rectas distintas. Por tanto, si $s = 4$ debemos tener:

$$3d^2 - 6d + 3 \leq 4\frac{d(d-1)}{2} = 2d^2 - 2d,$$

que es posible solo si $d \leq 3$. Por la fórmula (FG) $d \leq 3$ equivale a $g \leq 1$. $\square$

Notemos que el pincel de Wiman-Edge (ejemplo 4.4) nos brinda un ejemplo de una fibración que satisface las hipótesis del teorema 5.4 y que admite el número mínimo posible $s = 5$ de fibras singulares (véase [18]).

Bibliografía

[1] C. R. Alcántara y A. G. Zamora, «Families of integrable foliations on $\mathbb{P}^2$ with a unique singular point», Sometido para publicación.

[2] W. Barth, C. Peters y A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Springer Verlag, 1984, https://doi.org/10.1007/978-3-642-57739-0.

[3] A. Beauville, *Surfaces algébriques complexes*, vol. 54, Astérisque, 1978.

[4] ———, «Le nombre minimum de fibres singulières dúne courbe stable sur $\mathbb{P}^1$», *Astérisque*, núm. 86, 1981, 97–108.

[5] M. Castañeda Salazar y A. G. Zamora, «Semistable fibrations over $\mathbb{P}^1$ with five singular fibers», *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, núm. 25, 2019, 13–19, https://doi.org/10.1007/s40590-017-0185-3.

[6] I. Dolgachev, B. Farb y E. Looijenga, «Geometry of the Wiman-Edge pencil, i: algebro-geometric aspects», *European Journal of Mathematics*, vol. 4, 2018, 879–930, https://doi.org/10.1007/s40879-018-0231-3.

[7] W. L. Edge, «A pencil of four-nodal plane sextics», *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, núm. 89, 1981, 413–421, https://doi.org/10.1017/S0305004100058321.

[8] W. Fulton, *Algebraic curves: An introduction to algebraic geometry*, Addison-Wesley, 1989, Reprint of 1969 original.
[9] P. Griffiths y J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley & Sons, Inc., 1978, https://doi.org/10.1002/9781118032527.
[10] J. Jouanolou, *Equations de pfaff algébriques*, Springer Verlag LNM 708, 1979, https://doi.org/10.1007/BFb0063393.
[11] R. Miranda, *Algebraic curves and riemann surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, 1995, https://doi.org/10.1090/gsm/005.
[12] D. Mumnford, *The red book of varieties and schemes*, Lecture Notes in Mathematics 1358, Springer, 1999, https://doi.org/10.1007/b62130.
[13] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry 1*, 3.ª ed., Springer Verlag, 2013, https://doi.org/10.1007/978-3-642-37956-7.
[14] G. Springer, *Introduction to riemann surfaces*, vol. 313, AMS Chelsea Publishing Series, 2001.
[15] S. L. Tan, Y. Tu y A. Zamora, «On complex surfaces with 5 or 6 semistable singular fibers over $\mathbb{P}^1$», *Math. Z.*, núm. 249, 2005, 427–438, https://doi.org/10.1007/s00209-004-0706-4.
[16] S. Tan, «The minimal number of singular fibers of a semistable curve over $\mathbb{P}^1$», *J. Algebraic Geom.*, núm. 4, 1995, 591–596, https://doi.org/10.1007/s11425-010-3116-6.
[17] R. J. Walker, *Algebraic curves*, Dover Publications, 1962.
[18] A. Zamora, «Some remarks on the Wiman-Edge pencil», *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. 61, núm. 2, 2018, 401–412, https://doi.org/10.1017/S0013091517000232.