

Una versión de la Ley de los Grandes Números: el Límite Hidrodinámico

Sergio I. López Ortega

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
sil@ciencias.unam.mx

Resumen

En este artículo exponemos un tema actual de investigación relacionado directamente con la Ley de los Grandes Números: el Límite Hidrodinámico. Este concepto matemático fue desarrollado de forma posterior al desarrollo de la mecánica estadística y es una interpretación alternativa de la Ley de los Grandes Números. Explicamos qué es el Límite Hidrodinámico y un ejemplo del formalismo matemático en un contexto simple.

1. Otra interpretación de la Ley de los Grandes Números

La Ley de los Grandes Números (LGN), probada por Jacob Bernoulli en su *Ars Conjectandi* [1], representó una innovación matemática y filosófica con muchas vertientes que se pueden analizar. Nos centraremos en un único aspecto de su trabajo: su uso posible. Lo haremos sin remordimiento, pues en este volumen hay colegas que discuten con mayor precisión y profundidad este importante teorema.

Para Bernoulli, la LGN era una herramienta matemática que permitiría hacer afirmaciones científicas sobre eventos en el mundo práctico (*Cap. 4*, [1]):

... if someone will consider the atmosphere for many previous years and note how many times it was fine or rainy; [...] he will discover the ratio of the number of cases in which the same event will probably happen or not also in the future under circumstances similar to those previously existing. [...]. Although this is known by nature to everyone, its proof, derived

from scientific principles, is not at all usual and we ought therefore to expound it here.

El método que Bernoulli propone como aplicación de la LGN es un método *a posteriori*: tras observar un evento repetidas veces, se podrán hacer afirmaciones probabilistas acerca de él (lo que nos sugiere un precedente de la estadística). Según Bernoulli, para ello no hace falta conocer en su totalidad al evento en cuestión; como ejemplos presentados se encuentran el riesgo específico para una persona de morir por una enfermedad, la supervivencia humana, y la victoria o derrota en juegos en donde interviene la perspicacia o la agilidad humana (*Cap. 4, [1]*). En nuestra opinión, el uso moderno le dió la razón: la prevalencia epidemiológica, las curvas de supervivencia y los porcentajes de bateo en el beisbol son contrapartes estadísticas a los ejemplos anteriores.

De manera explícita, Bernoulli descarta cualquier método *a priori* para hacer afirmaciones de fenómenos con excesiva complejidad (*Cap. 4, [1]*):

And who will count the innumerable cases of changes to which the air is subjected each day so as to form a conjecture about its state in a month, to say nothing about a year?

Esta aseveración de Bernoulli es muy razonable pero, debido al progreso científico, nuestra apreciación de lo que es excesivamente complejo ha ido cambiando con el tiempo. Precisamente para sistemas físicos como el ejemplo mostrado por Bernoulli (los cambios en el aire), nuevos métodos fueron desarrollados y entre ellos se encuentra uno que representa una nueva interpretación de la LGN: el Límite Hidrodinámico (LHD).

A mediados del siglo XX, tras el monumental avance de la física a nivel microscópico y del análisis matemático, surgió la idea de que los modelos que describen a los sistemas macroscópicos (típicamente ecuaciones diferenciales) pueden ser deducidos a partir de modelos microscópicos (modelos de sistemas de partículas). La idea original del LHD es atribuida a Morrey [14], en un trabajo publicado en 1955 (citado en [8]).

Exponemos ahora el concepto del LHD. Supongamos que queremos estudiar un sistema con un gran número de componentes, como las moléculas de un fluido o un gas. Como la cantidad de componentes es abrumadora (del orden 10^{23} en algunos sistemas, derivado por la constante de Avogadro), describir la evolución exacta del sistema puede ser demasiado ambicioso. Entonces, utilizando el enfoque de Boltzmann, nos restringimos a examinar exclusivamente sistemas en *equilibrio local*: aquellos en donde en vecindades pequeñas las partículas están en equilibrio (posiblemente aleatorio). Para estos sistemas en equilibrio

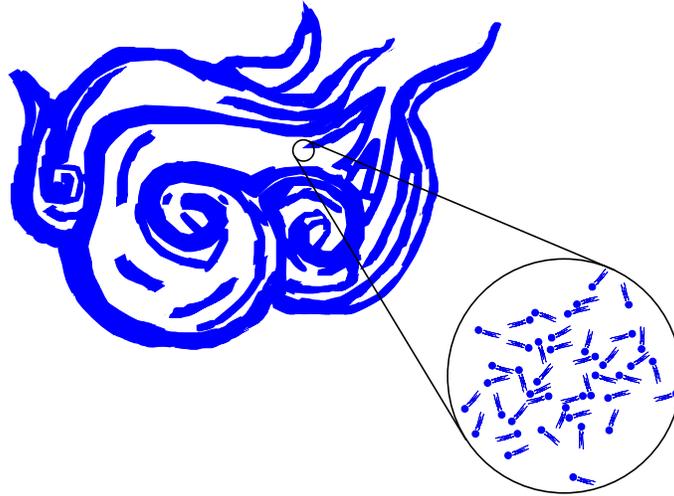


Figura 1. La dinámica del sistema microscópico se traduce en una evolución macroscópica suave.

local, caracterizamos a sus estados macroscópicos asociados (lo que observamos a escala humana) por una cantidad finita de variables como la temperatura, la densidad, la presión, etc. A estas variables macroscópicas se les llama *variables de estado o termodinámicas*. Ahora, cuando el sistema microscópico evoluciona en el tiempo a través de la interacción de las partículas que lo conforman, las variables termodinámicas lo hacen también. El teorema del LHD es el siguiente:

- El equilibrio local es conservado en el sistema durante toda la evolución en el tiempo, y
- las variables de estado evolucionan de manera suave y determinista.

A la ecuación diferencial que caracteriza esta evolución se le llama *ecuación hidrodinámica*. El LHD es una LGN: los movimientos rápidos y las fuertes interacciones a nivel microscópico de una cantidad gigantesca de partículas, sufren un efecto promediante que elimina la aleatoriedad y las oscilaciones abruptas en el sistema macroscópico. Es una interpretación cualitativamente diferente a la de Bernoulli: el fenómeno promediante ocurre en el espacio y no en el tiempo. Se da una representación del LHD en la figura 1.

Los primeros resultados rigurosos del LHD surgieron más de 25 años después de su planteamiento, en los trabajos de Rost [15] (para el proceso de exclusión simple, del que hablaremos en la siguiente sección) y de Boldrighini, Dobrushin y Suhov [2] para un modelo microscópico de varillas que colisionan, del cuál dedujeron la ecuación de Euler

para fluidos ideales. Esto fue posible tras el desarrollo de una teoría matemática de sistemas de partículas que interactúan, marco conceptual planteado por Spitzer en un célebre trabajo [16] y consolidado por Durrett [4] y Liggett [12] (citado en [9]). En la actualidad, el LHD es un área matemática que por su naturaleza involucra técnicas avanzadas de probabilidad y de ecuaciones diferenciales; puede consultarse [10] para ver una introducción clásica a la teoría, y [3] para ver un estudio con un enfoque cercano a la física.

2. El Límite Hidrodinámico de un proceso de exclusión simple

En esta sección desarrollamos una parte del resultado original de Rost [15], siguiendo en algunas partes a Landim [11] y Martínez [13] (ambas versiones simplificadas de la exposición en el libro clásico de LHD por Kipnis y Landim [10]). Introducimos un sistema específico de partículas que interactúan y deducimos la evolución macroscópica derivada de este sistema.

2.1 La descripción microscópica

Supongamos que tenemos partículas en el toro discreto unidimensional de tamaño N , es decir, el espacio $\{0, 1, \dots, N - 1\}$ donde el número natural N está identificado con el 0, usualmente representado por una circunferencia (ver la figura 2). Denotaremos por \mathbb{T}_N al toro N -dimensional y consideraremos como único parámetro del sistema a la densidad de partículas. Definimos a continuación una dinámica aleatoria para las partículas: el proceso de exclusión.

Denotamos al conjunto de estados posibles (o configuraciones) por X_N , conformado por todas las funciones η definidas en \mathbb{T}_N y que toman valores en el conjunto $\{0, 1\}$. Una configuración $\eta = \{\eta(x)\}_{x \in \mathbb{T}_N}$ codifica las posiciones de las partículas de la siguiente manera: $\eta(x) = 1$ indica que en la posición x hay una partícula y $\eta(x) = 0$ significa que la posición x está vacía. Permitimos a lo más una partícula por posición para tener el *principio de exclusión* presente: dos partículas no pueden ocupar el mismo lugar simultáneamente. La descripción de la dinámica es la siguiente: cada partícula tiene asociada una alarma de reloj aleatoria, que al sonar le indica que debe saltar (en promedio, todas las alarmas tardan lo mismo en sonar). En ese momento, decide saltar de su lugar actual x a un nuevo lugar z , con probabilidad $p(x, z)$. Debido a la exclusión, si el lugar z está ocupado, el salto potencial es ignorado.

Esta descripción tiene su contraparte formal. La dinámica de un proceso estocástico de Markov (aquellos procesos en donde el futuro del proceso depende exclusivamente del estado presente) se puede caracterizar unívocamente por un funcional lineal, llamado *generador infinitesimal* (ver [5], p. 155). La intuición del generador es que en un tiempo infinitesimal observamos la evolución del proceso: los estados posibles a los que puede cambiar y las tasas de cambio hacia cada uno de ellos.

Para el proceso de exclusión, y $f : X_N \rightarrow \mathbb{R}$, el generador está definido por

$$L_N[f](\eta) := \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \sum_{y \in \mathbb{T}_N} \underbrace{1}_{\text{tasa de salto}} \underbrace{p(x, x+y)}_{\text{probabilidad de transición de } x \text{ a } x+y} \underbrace{\eta(x)[1 - \eta(x+y)]}_{\text{sitio } x \text{ ocupado, sitio } x+y \text{ libre}} \underbrace{[f(\eta^{x,x+y}) - f(\eta)]}_{\text{diferencia de la evaluación entre el estado futuro y el actual}}, \quad (1)$$

donde $\eta^{u,v}$ es la misma configuración que η , tras haber intercambiado los valores de las posiciones u y v . La interpretación del generador definido en la Ecuación (1) es la siguiente: Desde todos los lugares posibles $x \in \mathbb{T}_N$ tenemos una tasa constante 1 de salto. Una vez que una partícula decide saltar, elige el lugar $x+y$ con probabilidad $p(x, x+y)$. Este potencial salto se lleva a cabo siempre que originalmente x esté ocupado ($\eta(x) = 1$) y el sitio $x+y$ esté vacío ($1 - \eta(x+y) = 1$); en ese caso la configuración η se convierte en la configuración $\eta^{x,x+y}$.

Nos restringiremos a estudiar al proceso en donde las partículas se pueden mover exclusivamente a sus lugares contiguos: $p(x, x+1) = p$ y $p(x, x-1) = 1-p$, con $p \in [0, 1]$, ver la Figura 2.

Este caso particular es conocido como *Proceso de exclusión simple* y es un modelo estándar de transporte, [7]. Una linda simulación (con $p = 1$) puede ser vista online en la página de Patrick Ferrari <http://wt.iam.uni-bonn.de/ferrari/research/continoustasep/> (poner 100 partículas, de radio 10, a velocidad 5).

2.2 La descripción macroscópica

Nuestro espacio es el toro continuo S_1 , en el que consideramos un fluido. Para cada posición $u \in S_1$, $\rho(t, u)$ representa la densidad del fluido alrededor de u (en una vecindad suficientemente pequeña) al tiempo t . La evolución del fluido está caracterizada por una ecuación diferencial con condición inicial ρ_0 , de la cuál $\rho(t, u)$ es solución.

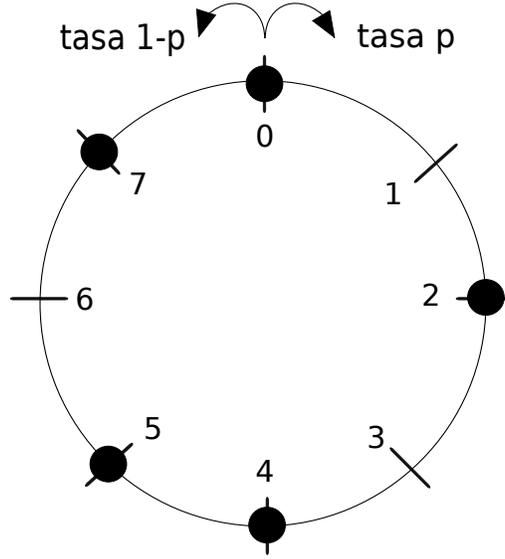


Figura 2. El proceso de exclusión en el toro \mathbb{T}_8 .

Dada una configuración del proceso macroscópico, $\rho_0(u) : S_1 \rightarrow [0, 1]$, $\rho_0 \in \mathcal{C}^2(S_1)$, llamada en este contexto *perfil*, podemos asociar una configuración microscópica (aleatoria) en el espacio microscópico. Consideremos el toro discreto \mathbb{T}_N con vértices en $\frac{x}{N}$, $x \in \mathbb{T}_N$, y en cada vértice $\frac{x}{N}$, con probabilidad $\rho_0(\frac{x}{N})$ ponemos una partícula y con probabilidad complementaria el sitio queda vacío. Hacemos esto de manera independiente entre los vértices, y obtenemos una configuración discreta, ver la figura 3. En este caso, diremos que la configuración obtenida tiene como distribución una *medida producto asociada al perfil* ρ_0 . En la figura 3 podemos apreciar que cuanto mayor es el valor del perfil ρ_0 en un subconjunto de S_1 , más probable es que el correspondiente subconjunto en el espacio discreto tenga lugares ocupados por partículas.

Denotemos por $\mathbb{E}_\mu(X)$ a la esperanza matemática de la variable aleatoria X respecto a la medida de probabilidad μ (i.e. la integral de Lebesgue de la función X respecto a la medida μ). Entonces, si $\nu_{\rho_0}^N$ denota a la medida producto en \mathbb{T}_N asociada al perfil ρ_0 , ocurre que

$$\mathbb{E}_{\nu_{\rho_0}^N}[\eta([uN])] = \rho_0\left(\frac{[uN]}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \rho_0(u).$$

Esto se debe a que el valor esperado en la posición $\eta([uN])$ coincide con la probabilidad de que la posición esté ocupada, que converge a $\rho_0(u)$ cuando N crece a infinito. Observamos aquí una LGN: conforme N crece a infinito, la densidad de partículas en un entorno fijo alrededor de u de una configuración aleatoria η en \mathbb{T}_N , converge a la densidad

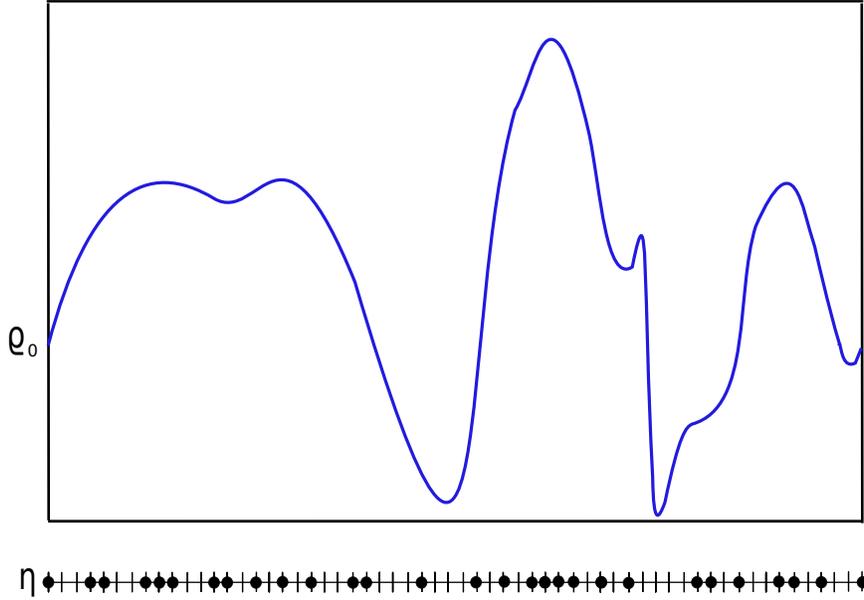


Figura 3. Un perfil ρ_0 y una configuración aleatoria η asociada.

$\rho_0(u)$. Esta convergencia corresponde al equilibrio local mencionado en la sección 1.

2.3 La ecuación hidrodinámica

Dada la condición de equilibrio local en el sistema de partículas a tiempo inicial, el equilibrio local es conservado en el sistema durante toda la evolución en el tiempo. No probaremos este resultado, que puede consultarse en [10]. Nos conformaremos aquí con deducir, a partir del sistema microscópico, la ecuación diferencial que gobierna el sistema macroscópico y para ello supondremos que el equilibrio local de las partículas es conservado en todo momento.

Consideremos una función $H : \mathbb{T}_N \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}_N)$ y a un proceso estocástico M_t^H (con valores reales) definido por

$$M_t^H := \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} H\left(\frac{x}{N}\right) \eta_t(x) - \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} H\left(\frac{x}{N}\right) \eta_0(x) - \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} H\left(\frac{x}{N}\right) L_N[\eta_s(x)] ds.$$

Usaremos una proposición que pertenece a la teoría general de procesos de Markov: el proceso M_t^H tiene valor promedio igual a 0 en todo tiempo, es decir

$$\mathbb{E}_{\nu_{\rho_0}^N}(M_t^H) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (2)$$

La prueba puede consultarse en ([5], p. 162). A continuación, derivamos la expresión explícita de M_t^H para el proceso de exclusión.

Definimos $p(1) := p, p(-1) := 1 - p$. Entonces, el generador del proceso de exclusión (1), tiene la forma:

$$L_N[f](\eta) = \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \sum_{y=-1,1} p(y)\eta(x)(1 - \eta(x+y))[f(\eta^{x,x+y}) - f(\eta)].$$

Ponemos $c(x, y, \eta) := p(y)\eta(x)(1 - \eta(x+y))$, y notamos que si elegimos a f como $f(\eta) = \text{proy}_z(\eta) := \eta(z)$ (la proyección de η en su posición $z \in \mathbb{T}_N$) obtenemos

$$\begin{aligned} L_N[\text{proy}_z](\eta) &= \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \sum_{y=-1,1} c(x, y, \eta)[\eta^{x,x+y}(z) - \eta(z)] \\ &= c(z+1, 1, \eta) - c(z, -1, \eta) + c(z+1, -1, \eta) - c(z, 1, \eta) \\ &= \frac{1}{2}[W_{z+1,z} - W_{z,z+1} + W_{z-1,z} - W_{z,z-1}], \end{aligned}$$

donde donde $W_{x,y} := W_{x,y}(\eta) = c(x, y-x, \eta) - c(y, x-y, \eta)$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} H\left(\frac{x}{N}\right) L_N[\text{proy}_x](\eta_s) &= \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} H\left(\frac{x}{N}\right) \sum_{y=-1,1} \frac{1}{2}[W_{x-y,x}(\eta_s) \\ &\quad - W_{x,x+y}(\eta_s)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \sum_{y=-1,1} \left[H\left(\frac{x+y}{N}\right) - H\left(\frac{x}{N}\right) \right] \\ &\quad \frac{1}{2} W_{x,x+y}(\eta_s). \end{aligned}$$

Ahora, cuando N es grande, podemos aproximar a la diferencia $H\left(\frac{x+y}{N}\right) - H\left(\frac{x}{N}\right)$ por la derivada de H :

$$\frac{dH}{dx}\left(\frac{x}{N}\right) = \left[H\left(\frac{x+y}{N}\right) - H\left(\frac{x}{N}\right) \right] \frac{N}{y} + o(N^{-1}),$$

y tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} H\left(\frac{x}{N}\right) L_N[\text{proy}_x](\eta_s) &= \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \sum_{y=-1,1} \left[\frac{y}{N} \cdot \frac{dH}{dx}\left(\frac{x}{N}\right) + o(N^{-1}) \right] \\ &\quad \frac{1}{2} W_{x,x+y}(\eta_s) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \frac{dH}{dx}\left(\frac{x}{N}\right) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{y=-1,1} y W_{x,x+y}(\eta_s) \right\} \\ &\quad + o(N^{-1}). \end{aligned} \tag{3}$$

Definamos $W_x(\eta) := \frac{1}{2} \sum_{y=-1,1} y W_{x,x+y}(\eta)$ y si denotamos por τ_x el corrimiento en el toro por x unidades, tenemos que $W_x(\eta) = \tau_x \circ W_0(\eta)$. Finalmente, M_t^H tiene la expresión:

$$\begin{aligned} M_t^H &= \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} H\left(\frac{x}{N}\right) \eta_t(x) - \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} H\left(\frac{x}{N}\right) \eta_0(x) \\ &\quad - \int_0^t \frac{1}{N^2} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \frac{dH}{dx}\left(\frac{x}{N}\right) \tau_x \circ W_0(\eta_s) ds + o(N^{-1}). \end{aligned}$$

Debido a la ecuación (2) ocurre que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} H\left(\frac{x}{N}\right) \mathbb{E}_{\nu_{\rho_0}^N}[\eta_t(x)] - \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} H\left(\frac{x}{N}\right) \mathbb{E}_{\nu_{\rho_0}^N}[\eta_0(x)] \\ &= \int_0^t \frac{1}{N^2} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \frac{dH}{dx}\left(\frac{x}{N}\right) \mathbb{E}_{\nu_{\rho_0}^N}[\tau_x \circ W_0(\eta_s)] ds + o(N^{-1}). \end{aligned} \quad (4)$$

Como estamos suponiendo que el equilibrio local es conservado, la configuración al tiempo t tiene una medida producto asociada a $\rho(t, \cdot)$ y podemos cambiar la medida utilizada en las esperanzas de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}_{\nu_{\rho_0}^N}[\eta_t(x)] = \mathbb{E}_{\nu_{\rho(t, \frac{x}{N})}}[\eta(0)] \text{ y } \mathbb{E}_{\nu_{\rho_0}^N}[\tau_x \circ W_0(\eta_s)] = \mathbb{E}_{\nu_{\rho(s, \frac{x}{N})}}[W_0(\eta_s)].$$

Tras hacer los cambios de medida y notar que $\mathbb{E}_{\nu_{\rho_0}^N}[\eta_0(x)] = \rho_0(\frac{x}{N})$, la ecuación (4) se transforma en:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} H\left(\frac{x}{N}\right) \rho\left(t, \frac{x}{N}\right) - \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} H\left(\frac{x}{N}\right) \rho_0\left(\frac{x}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N} \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \frac{dH}{dx}\left(\frac{x}{N}\right) \mathbb{E}_{\nu_{\rho(s, \frac{x}{N})}}[W_0(\eta_s)] ds + o(N^{-1}). \end{aligned}$$

Ahora, aproximando cada suma por una integral tenemos que

$$\begin{aligned} &\int_{S_1} H(u) \rho(t, u) du - \int_{S_1} H(u) \rho_0(u) du = \\ &\quad \frac{1}{N} \int_0^t \int_{S_1} \frac{dH}{dx}(u) \tilde{W}(\rho(s, u)) ds + o(N^{-1}), \end{aligned}$$

donde $\tilde{W}(\alpha) := \mathbb{E}_{\nu_\alpha}[W_0(\eta)]$. Haciendo $N \rightarrow \infty$ concluimos

$$\int_{S_1} H(u) \rho(t, u) du - \int_{S_1} H(u) \rho_0(u) du = 0.$$

Esta ecuación se cumple para toda $H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}_N)$, por lo que $\rho(t, u)$ resuelve (débilmente, ver [6]) la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0, \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot). \end{cases} \quad (5)$$

La solución de (5) está dada por $\rho(t, u) \equiv \rho_0(u)$, lo que significa que a nivel macroscópico el perfil inicial no varía. Lo que ocurre es que el movimiento de las partículas a nivel microscópico es imperceptible a nivel macroscópico (los saltos de las partículas miden $\frac{1}{N}$). Para percibir el movimiento necesitamos acelerar la tasa a la que saltan las partículas y lo haremos de forma proporcional a la cantidad de partículas N . Eso se refleja en el generador de la siguiente manera: $\hat{L}_N[f] = NL_N[f]$.

Con el nuevo generador \hat{L}_N , podemos repetir el desarrollo anterior y obtener, cuando N crece a infinito, la ecuación

$$\int_{S_1} H(u) \rho(t, u) du - \int_{S_1} H(u) \rho_0(u) du = \int_0^t \int_{S_1} \frac{dH}{du}(u) \tilde{W}(\rho(s, u)) dud s. \quad (6)$$

Podemos calcular explícitamente $\tilde{W}(\alpha)$ en términos de α :

$$\begin{aligned} \tilde{W}(\alpha) &= \frac{1}{2} \sum_{y=-1,+1} y \mathbb{E}_{\nu_\alpha} [W_{0,y}(\eta)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{y=-1,+1} y \mathbb{E}_{\nu_\alpha} [p(y)\eta(0)(1-\eta(y)) - p(-y)\eta(y)(1-\eta(0))] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{y=-1,+1} y [p(y) - p(-y)] \alpha(1-\alpha) = \alpha(1-\alpha)(2p-1). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (6), obtenemos que ρ es solución (débil) de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho = -(2p-1) \frac{\partial}{\partial u} \rho(1-\rho), \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot). \end{cases} \quad (7)$$

Tenemos aquí un comportamiento interesante dependiendo del valor de p . Si $p \neq \frac{1}{2}$, las partículas tienen una dirección preferida (a la que van con mayor probabilidad) y su desplazamiento medio (en ausencia de otras partículas) está dado por $(2p-1)$. En este caso, a la ecuación (7) se le conoce como *ecuación de Burgers* en mecánica de fluidos. Es una ecuación que admite más de una solución y algunas de sus soluciones tienen discontinuidades (llamadas ondas de shock) que representan embotellamientos entre las partículas [7].

Por el contrario, cuando $p = \frac{1}{2}$, volvemos a la ecuación (5). En este caso las partículas tienen desplazamiento medio igual a 0, por lo que aún aceleradas el movimiento es imperceptible a escala macroscópica. Aceleremos aún más las partículas: $\bar{L}_N := N^2 L_N$ y retomemos los

cálculos desde la ecuación (3),

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} H\left(\frac{x}{N}\right) \bar{L}_N[\text{proy}_x](\eta_s) &= \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \frac{dH}{dx}\left(\frac{x}{N}\right) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{y=-1,1} y W_{x,x+y}(\eta_s) \right\} \\
 &\quad + o(N^{-1}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \sum_{y=-1,1} \frac{dH}{dx}\left(\frac{x}{N}\right) \left\{ y \tau_x \circ W_{0,y}(\eta_s) \right\} \\
 &\quad + o(N^{-1})
 \end{aligned}$$

Debido a que $p(1) = p(-1) = \frac{1}{2}$, tenemos que $W_{0,y} = p(y)\eta(0)(1 - \eta(y)) - p(-y)\eta(y)(1 - \eta(0)) = \frac{1}{2}[\eta(0) - \eta(y)]$ y entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} H\left(\frac{x}{N}\right) \bar{L}_N[\text{proy}_x](\eta_s) &= \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \sum_{y=-1,1} \frac{dH}{dx}\left(\frac{x}{N}\right) y \tau_x \circ \\
 &\quad \left(\frac{1}{2} [\eta(0) - \eta(y)] \right) + o(N^{-1}) \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \sum_{y=-1,1} \frac{dH}{dx}\left(\frac{x}{N}\right) y [\eta(x) - \eta(x+y)] \\
 &\quad + o(N^{-1}) \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \sum_{y=-1,1} \left[\frac{dH}{dx}\left(\frac{x}{N}\right) - \frac{dH}{dx}\left(\frac{x-y}{N}\right) \right] \\
 &\quad y \eta(x+y) + o(N^{-1})
 \end{aligned}$$

Aproximamos la diferencia $\frac{dH}{dx}\left(\frac{x}{N}\right) - \frac{dH}{dx}\left(\frac{x-y}{N}\right)$ por la derivada de segundo orden de H para obtener

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} H\left(\frac{x}{N}\right) \bar{L}_N[\text{proy}_x](\eta_s) &= \frac{1}{4} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \sum_{y=-1,1} \left[\frac{d^2 H}{dx^2}\left(\frac{x}{N}\right) \frac{y}{N} \right] y \eta(x+y) \\
 &\quad + o(N^{-1}) \\
 &= \frac{1}{4N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \frac{d^2 H}{dx^2}\left(\frac{x}{N}\right) \sum_{y=-1,1} y^2 \eta(x+y) \\
 &\quad + o(N^{-1}) \\
 &= \frac{1}{2N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \frac{d^2 H}{dx^2}\left(\frac{x}{N}\right) \tau_x \circ \\
 &\quad \left\{ \frac{1}{2} \sum_{y=-1,1} y^2 \eta(0+y) \right\} + o(N^{-1}).
 \end{aligned}$$

Esto permite escribir al proceso \bar{M}_t^N asociado a \bar{L}_N como

$$\begin{aligned} \bar{M}_t^N &= \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} H\left(\frac{x}{N}\right) \eta_t(x) - \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} H\left(\frac{x}{N}\right) \eta_0(x) \\ &\quad - \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \frac{1}{2} \frac{d^2 H}{dx^2}\left(\frac{x}{N}\right) \tau_x \circ \left\{ \sum_{y=-1,1} y^2 \eta_s(y) \right\} + o(N^{-1}). \end{aligned}$$

Podemos ahora tomar esperanzas y repetir el razonamiento utilizado cuando $p \neq \frac{1}{2}$. Tras notar que $\frac{1}{2} \sum_{y=-1,1} y^2 = 1$, obtenemos que ρ es solución (débil) de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \rho, \\ \rho(0, \cdot) &= \rho_0(\cdot), \end{cases} \quad (8)$$

la *ecuación del calor*.

3. Conclusiones

En la sección 2 hemos derivado la ecuación hidrodinámica para el proceso de exclusión simple definido en el toro en tres casos: cuando las partículas no son aceleradas y la ecuación diferencial obtenida tiene una solución constante (ecuación (5)), cuando el proceso es asimétrico y las partículas son aceleradas linealmente respecto al escalamiento espacial, y se deduce una dinámica dada por la ecuación de Burgers (ecuación (7)), y cuando el aceleramiento es cuadrático y el proceso simétrico; en este caso la ecuación de calor es inferida (ecuación (8)). Durante este procedimiento, hemos dado algún vislumbre de cómo el fenómeno promediado espacial del cuál hablamos en la Sección 1 puede expresarse rigurosamente a través de las matemáticas.

Agradecimientos. A Julián Martínez y Tertuliano Franco por las conversaciones y las referencias, y a un revisor anónimo por sus atinadas sugerencias.

Bibliografía

- [1] J. Bernoulli, «On the law of large numbers», 2005, Traducido al inglés por Oscar Shynin, <http://www.sheynin.de/download/bernoulli.pdf>, 1–33.
- [2] C. Boldrighini, R. Dobrushin y Y. Sukhov, «One-dimensional hard rod caricature of hydrodynamics», *Journal of Statistical Physics*, vol. 31, núm. 3, 1983, 577–616.
- [3] A. DeMasi y E. Presutti, *Mathematical methods for hydrodynamic limits*, Springer, 1991.
- [4] R. Durrett, *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation*, Wadsworth and Brooks, 1988.

- [5] S. Ethier y T. Kurtz, *Markov Processes: Characterization and convergence*, Wiley, 1986.
- [6] L. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.
- [7] P. Ferrari, «Shocks in the Burgers Equation and the Asymmetric Simple Exclusion Process», en *Automata Networks, Dynamical Systems and Statistical*, 1992.
- [8] J. Fritz, *An Introduction to the Theory of Hydrodynamic limits*, Lectures in Mathematical Sciences 18. The University of Tokyo, 2001.
- [9] D. Griffeath, «Frank Spitzer's pioneering work on interacting particle systems», *The Annals of Probability*, vol. 21, núm. 2, 1993, 608–621.
- [10] C. Kipnis y C. Landim, *Scaling limits of interacting particle systems*, Springer, 1998.
- [11] C. Landim, *Hydrodynamic Limit of Interacting Particle Systems*, Lecture given at the School and Conference on Probability Theory, Trieste, 2002.
- [12] T. Liggett, *Interacting Particle Systems*, Springer, 1985.
- [13] J. Martínez, *Comportamiento Hidrodinámico para el proceso de Exclusión simple Simétrico*, Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires, 2008.
- [14] C. Morrey, «On the derivation of the equations of hydrodynamics from statistical mechanics», *Communications on Pure and Applied Mathematics.*, vol. 8, 1955, 279–326.
- [15] H. Rost, «Nonequilibrium behaviour of a many particle process: density profile and local equilibria», *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, vol. 58, 1981, 41–53.
- [16] F. Spitzer, «Interaction of Markov processes», *Advances in Math.*, vol. 5, 1970, 246–290.