Miscelánea Matemática **81** (2025) 111-128 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.8106

De la elasticidad a la cuenta de raíces

Víctor F. Breña Medina
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México
victor.brena@itam.mx

1. Introducción

En este ensayo discutiremos el concepto de la derivada logarítmica, resaltando su relevancia en el análisis de funciones diferenciables y su uso en una variedad de disciplinas como la física, la economía y la biología. A través de indagar el significado del cociente f'/f y sus implicaciones en el campo de los números reales, al igual que en el de los números complejos, exploraremos la conexión entre este concepto y el *principio del argumento*, el cual se fundamenta en el análisis de las singularidades de una función analítica. A través de algunos ejemplos y demostraciones simples, revisaremos cómo estos conceptos se entrelazan, proporcionando herramientas fundamentales en el estudio de, por ejemplo, procesos naturales.

En el estudio de la naturaleza y del universo, en general, ocurre una muy estrecha conexión con el concepto de relaciones de correspondencia y, en particular, con la noción de función. Esta conexión consiste en un extenso y minucioso compendio de propiedades de relaciones cuantitativas entre conjuntos de números. Estos conjuntos usualmente provienen de observaciones empíricas y, por lo tanto, podemos pensar que las propiedades del o de los fenómenos en cuestión también tienen origen en estas observaciones. En este sentido, la noción de función captura una inmensa variedad de propiedades de las relaciones que subyacen en la identificación, comprensión y análisis de hipótesis que emergen cuando descubrimos y describimos nuestro entorno. De este manera, se pueden distinguir patrones o, dicho de otra forma, órdenes relacionales entre

Palabras clave: Derivada logarítmica, teoría del índice, principio del argumento.
Este artículo forma parte de la celebración por los 50 años de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas en el Instituto Tecnológico Autónomo de México.
Agradezco a Pablo Castañeda y Edith Vargas por los comentarios, las críticas, las conversaciones, el café y las risas con ideas que surgen cada vez, especialmente durante el período de cocción de este platillo. Este trabajo fue apoyado por la Asociación Mexicana de Cultura A.C.

conjuntos de mediciones. Estos órdenes son esencialmente funciones, las cuales no son más que objetos abstractos que, además de ser ubicuos, nos conceden, a través de sus propiedades, la descripción de los fenómenos naturales de una manera universal.

En este manuscrito discutiremos una de las funciones trascendentales más importantes y que suele aparecer en una amplia variedad de fenómenos del quehacer cotidiano. Con este fin, este ensayo consiste en la breve exposición de un nexo entre la función logaritmo y su uso para extraer información relacionada con la razón de crecimiento de alguna cierta cantidad dependiente de otra (*e. g.* un bien y su precio) en un ejemplo sencillo, veáse la sección 2. A continuación, en la sección 3, a partir de que el cociente f'/f aparece en términos de la derivada logarítmica, extenderemos la discusión en un recorrido del papel que este juega en el plano complejo y las consecuencias que el matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789–1857), uno de los matemáticos más notables de la historia al igual que pionero del Análisis Matemático, analizó respecto al cálculo de raíces y polos de una función analítica. Al final, en la sección 4, concluimos con algunos comentarios relacionados con las consecuencias de las relaciones discutidas en las secciones anteriores. Para ello, echaremos mano de un par de ejemplos de manera superficial y con el fin de que el lector se interese por sí mismo en su entendimiento. En ambos ejemplos, las ideas aquí vertidas tienen implicaciones en el estudio de interacciones naturales, sobre todo cuando sus propiedades son utilizadas para la compresión de nuestro ámbito.

2. El logaritmo real y su derivada

John Napier de Merchiston (1550–1617) fue un matemático, físico y astrónomo escocés conocido principalmente por el descubrimiento de los logaritmos. En su trabajo titulado «*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*», publicado en 1614, Napier discute, en el contexto de la trigonometría esférica y su uso en la astronomía, los logaritmos de productos de funciones trigonométricas. Un año después, el matemático inglés Henry Briggs (1561–1630) se interesó por el descubrimiento de Napier hasta el grado que, con la finalidad de simplificar las operaciones, propone un re-escalamiento del logaritmo a la base 10. Cabe mencionar que el número e, el cual corresponde a la base natural del logaritmo, representaba un particular reto en la época debido a que no es un número natural, sino que es un número particularmente interesante, puesto que, además de ser un número mayor que dos y menor que tres, es *trascendental*[1]. El descubrimiento de dicho número se debe al suizo Jacob Bernoulli (1655–1705); para mayores detalles históricos véase, por ejemplo, [5].

Con el fin de motivar el estudio de una de las características clave del logaritmo natural, a veces, erróneamente, conocido como *logaritmo neperiano*, al igual que algunas de sus consecuencias, consideraremos primero un ejemplo simple: el interés compuesto.

2.1 Acumulación de intereses

Consideremos que $y_0 > 0$ es la cantidad que representa un capital inicial y $x > 0$ la tasa de interés constante en un determinado intervalo de tiempo de longitud $T > 0$. De esta manera, en el primer período de inversión el capital estará dado por $y_1 = y_0 + xy_0 = (1 + x)y_0$; en el segundo período de inversión, obtenemos un incremento de tal modo que $y_2 = y_1 + xy_1 = (1+x)y_1 = (1+x)^2 y_0$. Al continuar sucesivamente, en el m-ésimo período de inversión, el capital estará dado por

$$y_m = (1 + x)^m y_0 \,.$$

Ahora, observemos que la tasa de interés puede calcularse en fracciones del m-ésimo período de inversión, lo cual da lugar a un ajuste de la fórmula anterior por medio del cálculo de la tasa de interés pero considerando subperíodos de capitalización[2]. Es decir, supongamos que se tienen n-subperíodos de capitalización, lo cual conduce a que el período en el cual el capital crece corresponde al tiempo en el cual ocurre el aumento del capital multiplicado por el número de subcapitalizaciones, es decir se satisface que $m = nT$. Siendo de esta manera, la tasa de interés estará entonces determinada por el cociente de la razón de crecimiento del capital $x > 0$ dividido por el número de subperíodos de inversión $n \in \mathbb{N}$. De este modo, tenemos entonces que la tasa de interés por subperíodo de capitalización es representado por el cociente x/n. Finalmente, sin pérdida de generalidad, tomemos en cuenta que el tiempo de inversión total puede ser re-escalado y considerarse como el tiempo unitario, *i. e.* $T = 1$. En consecuencia, obtenemos la relación de correspondencia conocida como la *sucesión de Euler* (véase, por ejemplo, [10]):

$$y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n y_0 \,. \tag{1}$$

---

[1] Recordemos que un número real trascendental es un número *no algebraico*, es decir: no corresponde a ninguna raíz de algún polinomio con coeficientes enteros; en este sentido, estos números se pueden definir por medio de una serie infinita.

[2] Un subperíodo de capitalización corresponde a una fracción del período, dado por el intervalo de longitud T, donde el capital aumenta; el incremento ocurre respecto al subperíodo de capitalización anterior.

Cabe hacer notar que, independientemente de la construcción anterior, esta sucesión también puede deducirse tomando en cuenta una amplia diversidad de fenómenos de agregación, por ejemplo: la división celular por mitosis[3].

La relación (1) plantea algunas preguntas interesantes; por ejemplo, si consideramos que los períodos de inversión ocurren en cada instante, entonces podemos estimar que $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, el cual existe como puede verse en [6], por ejemplo. Más aún, nótese que se puede verificar rigurosamente que la sucesión y_n no solamente converge para $x > 0$, sino que también ocurre para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$. De este modo, las siguientes preguntas resultan relevantes:

(a) ¿Cuál es el valor de y?
(b) ¿Es posible conocer el valor de x a partir de tener un valor conocido para y?

La respuesta a la primera pregunta está dada por el trabajo de Johann Bernoulli, quién estudió a profundidad la función exponencial a finales del siglo XVII. De este forma, sin pérdida de generalidad, supongamos que $y_0 = 1$, lo cual conduce a que $y = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$; véase, por ejemplo, [2, 6].

Por el otro lado, la respuesta a la pregunta (b) sugiere que debe existir una relación inversa a la función exponencial. Con esta interrogante en mente, examinemos la siguiente definición:

Definición 2.1. El logaritmo natural es la función $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\log(x) := \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u}\,.$$

Al utilizar el teorema fundamental del cálculo se tiene que el logaritmo natural es una función diferenciable y monótona creciente. Esto quiere decir que el teorema de la función inversa (véanse, por ejemplo, [2, 3]) garantiza que esta tiene inversa, la cual es precisamente la función exponencial[4]. En consecuencia, reuniendo todos estos elementos, se satisface que la función exponencial es la función inversa de la función logaritmo, *i. e.*:

$$(\log\circ\exp)(x) = x = (\exp\circ\log)(x)\,. \tag{2}$$

El estudio detallado de las propiedades de la función logaritmo se pueden encontrar, por ejemplo, en [2, 6], razón por la cual omitiremos

[3]La mitosis es el proceso biológico en el cual una célula replica sus cromosomas y, al liberarlos, da pie a la división celular.

[4]Nótese que esta última afirmación puede verificarse alternativamente como una consecuencia de la continuidad del logaritmo, sus propiedades y el teorema del valor medio, como puede verse particularmente en [6].

su exposición. Sin embargo, una de las propiedades más interesantes de la función logaritmo es su diferenciabilidad. En consecuencia, particularmente consideramos una función positiva y diferenciable f, se tiene que a partir de la composición dada por

$$\log[f(x)] = \int_1^{f(x)} \frac{\mathrm{d}u}{u} \underset{\substack{\uparrow \\ u = f(v), \\ \mathrm{d}u = f'(v)\,\mathrm{d}v}}{=} \int_{v_0}^{x} \frac{f'(v)}{f(v)}\,\mathrm{d}v\,,$$

donde $v_0 \in \mathbb{R}$ es tal que $f(v_0) = 1$, se obtiene la fórmula

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\log[f(x)])'\,. \tag{3}$$

El cociente del término izquierdo en (3), se denomina *derivada logarítmica de* f, la cual no necesariamente requiere que $f(x) > 0$, puesto que el cociente f'/f es válido para cualquier función distinta de cero, $f(x) \neq 0$. No obstante, como acabamos de deducir, si $f(x)$ es positiva entonces es equivalente a la derivada de la composición en el término derecho.

Notemos que el cociente en el término izquierdo indica que la derivada logarítmica corresponde al cambio infinitesimal de una función respecto a la función misma. En otras palabras, este cociente permite determinar la sensibilidad de los cambios infinitesimales de una función cuando esta experimenta variaciones. Este concepto, conocido como *elasticidad* y definido por el economista inglés Alfred Marshal (1842–1924) inspirado en el concepto físico sobre la propiedad de algunos materiales, es utilizado en la teoría económica para cuantificar variaciones experimentadas ante cambios de uno o varios parámetros, los cuales pueden representar cantidades clave. Con el fin de simplificar lo más posible la presente discusión, en esta sección solo nos interesaremos en funciones reales de una variable. De este modo, la elasticidad se puede entender a través de (3), por ejemplo: supongamos que se tiene alguna cantidad demandada q (*e. g.* un bien, como una colección de discos de vinil) de tal modo que esta sufre un aumento de precio p; si este incremento provoca que q aumente de tal manera que es mayor a la proporción de q respecto de p previo al aumento, es decir

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p} > \frac{q}{p}\,, \quad \text{o bien} \quad \frac{p}{q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p} > 1\,, \tag{4}$$

se dice que la cantidad demandada es *elástica*. Dicho de otra manera, la cantidad demandada es sensible a los cambios en el precio. Equivalentemente, en el caso contrario, la cantidad demandada es poco sensible a los cambios del precio cuando la cantidad demandada es *inelástica*. Estas afirmaciones esquemáticamente se pueden entender en el sentido de la relación (3), puesto que al tener que $q = f(p)$, las expresiones en (4) toman la forma

$$\frac{(\log f(p))'}{(\log p)'} > 1\,,$$

donde $(\cdot)'$ es la derivada respecto a p. De este modo, la elasticidad, la cual puede definirse como

$$\eta := \frac{(\log f(p))'}{(\log p)'}\,,$$

es la proporción de las variaciones en escala logarítmica de una variable que puede representar una cantidad demandada q respecto a otra que puede corresponder al precio p de la misma. Para una discusión detallada sobre este concepto en un contexto de economía, consúltese por ejemplo [11].

2.2 ¿Y si *Ethan* se tira al vacío?

Veamos ahora un ejemplo en un contexto completamente diferente y donde la derivada logarítmica juega un papel sustancial. Si consideramos que *Ethan Hunt* se lanza desde un avión con el paracaídas cerrado y cargado con una amplia colección de material nocivo para los tripulantes del avión, por medio de la 2^{da} ley de Newton, el teorema de la función inversa y el teorema fundamental del cálculo, es posible determinar que su rapidez terminal de caída[5] está dada por

$$v_{\text{pc}} = \frac{mg}{\gamma}\,, \tag{5a}$$

donde $\gamma > 0$ es el coeficiente de fricción con el aire, g es la aceleración de la gravedad en la Tierra y m la masa de *Mr. Hunt* con todo el material nocivo. Mientras que, si abre el paracaídas, la rapidez terminal de caída es de la forma

$$v_{\text{pa}} = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}}\,. \tag{5b}$$

Supongamos ahora que, una vez alcanzada la rapidez de caída en ambos escenarios, nuestro héroe comienza a deshacerse del material nocivo, pero no puede hacerlo todo de golpe y porrazo, sino que tiene que hacerlo de manera paulatina; en este sentido, esta variación correspondería a variaciones de m, las cuales ocurren lentamente respecto al tiempo de caída de *Mr. Hunt*. Si calculamos las derivadas 'totales', habría que

[5]Este concepto corresponde a la rapidez máxima que un cuerpo alcanza en caída libre en determinado fluido, como el aire.

lidiar con la derivada de $\sqrt{\star}$; sin embargo, las derivadas logarítmicas de (5a) y (5b) respecto a m conducen de manera sencilla a que se satisfaga la identidad

$$\frac{v'_{\mathrm{pa}}}{v_{\mathrm{pa}}} = \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}\frac{v'_{\mathrm{pc}}}{v_{\mathrm{pc}}}\,. \tag{6}$$

Esta expresión indica que conforme *Ethan* se deshace del material nocivo, la razón de cambio de la rapidez terminal de caída respecto a sí misma, con el paracaídas cerrado se reduce a la mitad cuando el paracaídas se abre. Este cálculo no determina si *Mr. Hunt* se golpeará más o menos fuerte al aterrizar, sino que señala la reducción de la proporción de la variación de la rapidez terminal de caída con respecto de sí misma, la cual es la mitad que la misma proporción cuando el paracaídas está abierto.

Con estos dos ejemplos, podemos notar que la derivada logarítmica no solamente permite simplificar cálculos relacionados con razones de cambio, sino que además, censan el impacto de estas variaciones cuando, especialmente, se tienen funciones con potencias, las cuales suelen ser utilizadas en el estudio básico de cantidades en economía y en el estudio de algunas interacciones de fluidos, por ejemplo. En particular, veámos que las ecuaciones en (6) quedan en términos de m una vez alcanzada las rapideces terminales de caída, consecuencia de la derivada logarítmica, lo cual facilita notar que al disminuir m, la proporción dada por $v'_{\mathrm{pc}}/v_{\mathrm{pc}}$ aumenta a un ritmo que es el doble de $v'_{\mathrm{pa}}/v_{\mathrm{pa}}$. ¡Esta es una diferencia considerable! Pues sí, más vale abrir el paracaídas si uno decide salvar al mundo en caída libre.

3. Una mirada compleja

En la sección anterior discutimos brevemente una de las consecuencias clave de la función logaritmo en $\mathbb{R}$ y, crucialmente, su relación con el cociente entra la derivada de una función y ella misma. A continuación profundizaremos las consecuencias de resultados como este, pero en el plano complejo, denotado por $\mathbb{C}$. Con este fin, primero tomemos en cuenta que al igual que en el campo $\mathbb{R}$, un número $w \in \mathbb{C}$ se dice que es un logaritmo de $z \in \mathbb{C}$, $w = \log(z)$, siempre y cuando $e^w = z$ se satisface. De este modo, la esencia de la definición 2.1 se puede extender por medio de las características de la función exponencial tal como se indica en el siguiente resultado (para mayores detalles, véanse [1, 10]):

Proposición 3.1. *Cada real positivo* $r > 0$ *tiene exactamente un logaritmo real* $\log(r)$ *y cada número complejo* $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tiene logaritmos de la forma* $\log(r) + i\theta + i2\pi n$ *con* $n \in \mathbb{Z}$ *y* $\log(r) \in \mathbb{R}$.

Como se puede apreciar a partir de la proposición 3.1, el logaritmo de un número complejo no determina una función necesariamente, puesto que cada $z \in \mathbb{C}$ tiene una infinidad de logaritmos, sino que corresponde a una relación entre conjuntos de números complejos donde sus características provienen de la periodicidad de la función exponencial. De este modo, con el fin de determinar propiamente una función logaritmo y las condiciones de invertibilidad (2) en $\mathbb{C}$, el dominio se restringe de tal modo que se garanticen las condiciones del teorema de la función inversa. De esta manera, podemos afirmar que cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es representado únicamente por $z = |z|e^{i\theta}$, donde $|z| > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. Al restringir el dominio de esta manera, conocido como *rama principal del logaritmo*, se garantiza que $\log|z| + i\theta$ es el único logaritmo de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

En este ensayo estamos particularmente interesados en discutir las consecuencias de la derivada logarítmica en términos del cociente f'/f. En este sentido, se pueden consultar particularmente las referencias [1, 10] para una discusión profunda y detallada sobre todas las propiedades de $\log(\cdot)$. En particular, la función logaritmo es analítica.

Ahora, con el fin de tomar en cuenta la definición 2.1 de manera fidedigna y como punto de partida, reconsideremos la noción de integral en el campo de los números complejos. Primero, observemos que para una función de una variable real integrable $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, se satisface que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \underset{\substack{\uparrow \\ x(u) = bu + a(1-u), \\ \mathrm{d}x = (b-a)\,\mathrm{d}u}}{=} \int_0^1 f\left(x(u)\right) x'(u)\,\mathrm{d}u = F\left(x(1)\right) - F\left(x(0)\right)\,, \tag{7a}$$

donde F representa a una primitiva de f; lo cual señala que la integral de f sobre el intervalo $[a, b]$ corresponde a la integral a lo largo de una curva diferenciable, en este caso un segmente de recta, dada por $x(u)$ con $0 \leq u \leq 1$ de tal manera que $x(0) = a$ y $x(1) = b$. Es posible utilizar esta misma idea para cualesquiera dos números $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ por medio de tomar en cuenta a una curva diferenciable $\gamma(u)$ tal que $\gamma(0) = z_0$ y $\gamma(1) = z_1$. Con el fin de comprender fielmente esta interpretación, recordemos que todo número $z \in \mathbb{C}$, en coordenadas cartesianas, está dado por la transformación $z = x + iy$, para cualquier par de números $x, y \in \mathbb{R}$. Dicho de otro modo, dado que los campos $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ comparten las mismas propiedades topológicas, entonces la pareja ordenada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ corresponde biunívocamente al número $z \in \mathbb{C}$ de tal forma que se pueden definir a los elementos unitarios $1 := (1, 0) \in \mathbb{C}$ e $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$. Siendo este el caso, si $\gamma : [0, 1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es diferenciable, entonces la composición de γ con una función analítica f en los complejos, dada por $(f \circ \gamma)(u) = f(\gamma(u))$ para $0 \leq u \leq 1$, es tal que $f(\gamma(0)) = f(z_0)$ y $f(\gamma(1)) = f(z_1)$, donde $\gamma(u) = \gamma_1(u) + i\gamma_2(u)$ donde $\gamma_{1,2} : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son dos funciones diferenciables. Esta observación conduce a la denominada *integral de línea* en el campo de los complejos dada por

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \underset{\substack{\uparrow \\ z=\gamma(u),\ \gamma(0)=z_0, \\ \mathrm{d}z=\gamma'(u)\,\mathrm{d}u,\ \gamma(1)=z_1,}}{=} \int_0^1 f(\gamma(u))\,\gamma'(u)\,\mathrm{d}u = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)), \tag{7b}$$

siendo F una primitiva de f. En particular, notemos que si γ es una curva cerrada, entonces $\gamma(0) = \gamma(1)$, lo cual daría lugar a que la integral en (7b) se anula.

Notemos que las integrales (7a) y (7b) capturan una consecuencia crucial del teorema fundamental del cálculo: el valor de la integral de una función, a lo largo de una curva, depende de la diferencia de las evaluaciones de la imagen de sus primitivas en los puntos final e inicial de dicha curva, siempre y cuando las primitivas existan; para una discusión detallada sobre estos conceptos, se pueden consultar, por ejemplo, [1, 3, 7, 10].

A manera de ejemplo y que nos permitirá indagar el papel que juega la función logaritmo en los complejos, consideremos la integral de $f(z) = z^n$ con $n \in \mathbb{Z}$ a lo largo de la curva cerrada $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, es decir:

$$\int_{|z|=1} z^n\,\mathrm{d}z \underset{\substack{\uparrow \\ z=e^{2\pi i u}, \\ \mathrm{d}z=2\pi i e^{2\pi i u}\,\mathrm{d}u.}}{=} \int_0^1 2\pi i e^{2\pi i(n+1)u}\,\mathrm{d}u = \begin{cases} 0\,, & \text{si } n \neq -1\,, \\ 2\pi i\,, & \text{si } n = -1\,. \end{cases}$$

Como se puede apreciar, el cálculo anterior señala que la integral de la función z^n a lo largo de una circunferencia de radio unitario centrada en el origen es cero para todo $n \in \mathbb{Z}$, excepto cuando $n = -1$. Este resultado indica que la función $1/z$ no posee primitivas como consecuencia del *criterio de integrabilidad*[6], el cual establece que una función tiene primitivas, si su integral para toda curva cerrada se anula (véase [10]).

[6] Este criterio está íntimamente ligado al teorema integral de Cauchy.

En particular, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z}=1\,, \tag{8}$$

siempre y cuando el recorrido a lo largo de la circunferencia sea en contra de la manecillas del reloj en un solo ciclo.

Notemos que el integrando en (8) es similar al integrando de la definición 2.1. En este sentido, la función $1/z$ no tiene primitivas en $\mathbb{C}$ en una región que contenga al origen, sin embargo en el campo de los reales, la función $1/x$ sí las tiene en términos del logaritmo en $\mathbb{R}$, la cual es una consecuencia de que $1/x$ es continua para todo $x>0$. En ambos escenarios, el cero no pertenece al dominio de $1/x$ ni al de $1/z$, correspondientemente. Esta observación hace énfasis en una característica sutil: la presencia del origen en la región de integración parece hacer distinción entre la existencia de primitivas para la función $1/z$. Por esta razón, averiguaremos la relación que provee la definición de la función logaritmo en $\mathbb{R}$ y el impacto que ocurre cuando se considera el campo de los números complejos. Con este objetivo en mente, consideremos una función analítica $f(z)\neq 0$ en $0<|z|<\rho$ con $\rho>1$ y la integral

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z\,, \tag{9}$$

la cual tiene la característica de que el integrando tiene la forma de la derivada logarítmica, al igual que el término izquierdo en (3).

Al parametrizar la curva dada por $|z|=1$ por medio de $z=e^{2\pi i\theta}$ con $0\leq\theta\leq 1$ y definir a la función auxiliar $g:[0,1]\to\mathbb{C}$ dada por

$$g(t)=f\left(e^{2\pi it}\right)\exp\left(-2\pi i\int\limits_0^t\frac{f'\left(e^{2\pi i\theta}\right)}{f\left(e^{2\pi i\theta}\right)}e^{2\pi i\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)\,,$$

obtenemos que su derivada se anula idénticamente, es decir: $g'(t)\equiv 0$. En consecuencia, la función $g(t)$ es constante para todo $t\in[0,1]$, lo cual significa particularmente que $g(0)=g(1)$, es decir:

$$f(1)=g(0)=g(1)=f\left(e^{2\pi i}\right)\exp\left(-2\pi i\int\limits_0^1\frac{f'\left(e^{2\pi i\theta}\right)}{f\left(e^{2\pi i\theta}\right)}e^{2\pi i\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)\,.$$

Debido a que $f(1)=f\left(e^{2\pi i}\right)$, entonces se obtiene la ecuación

$$\exp\left(-2\pi i\int\limits_0^1\frac{f'\left(e^{2\pi i\theta}\right)}{f\left(e^{2\pi i\theta}\right)}e^{2\pi i\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)=1\,,$$

la cual conduce a que el argumento de la función exponencial debe anularse. Sin embargo, la función exponencial es 2π-periódica en $\mathbb{C}$, lo cual significa que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, se satisface la identidad

$$\frac{1}{i} \int\limits_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z = 2\pi \int\limits_{0}^{1} \frac{f'\left(e^{2\pi i\theta}\right)}{f\left(e^{2\pi i\theta}\right)} e^{2\pi i\theta}\, \mathrm{d}\theta = 2\pi n\,. \tag{10}$$

Por lo tanto, se concluye que la integral en (9) es tal que $I \in \mathbb{Z}$. Nótese que este cálculo puede reproducirse para un anillo general de la forma $r_0 < |z - z_0| < r_1$, donde $r_0, r_1 > 0$ y $z_0 \in \mathbb{C}$.

El resultado anterior es sorprendente en el sentido de que para toda función analítica no nula en un anillo dado, la integral de su derivada logarítmica en el sentido complejo a lo largo de una curva circular es un número entero. Debido a esta razón, de nueva cuenta el criterio de integrabilidad señala que, en este sentido, el cociente f'/f no tiene primitivas, lo cual es aparentemente contradictorio con la definición 2.1 y con la identidad en (3), entonces: ¿qué representa este resultado?

Para poder responder satisfactoriamente la pregunta anterior, consideremos la siguiente definición:

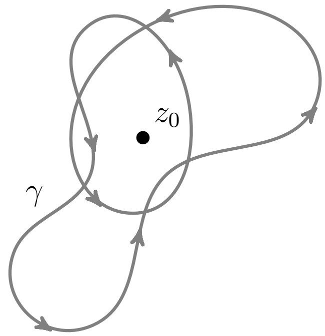
Definición 3.2. Sea $\gamma \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ una curva cerrada, donde $\Omega \subset \mathbb{R}$, y $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$. El índice de z_0 respecto de γ es

$$\operatorname{Ind}(z_0, \gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}\,. \tag{11}$$

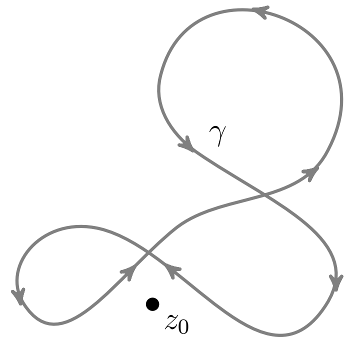
Primero observemos que haciendo $f(z) = z - z_0$ en (9), tendremos que $\operatorname{Ind}(z_0, |z| = 1) \in \mathbb{Z}$, donde es posible generalizar este resultado a cualquier curva cerrada $\gamma \subset \mathbb{C}$ por medio de un argumento de homotopía u homología; véase [1] para una discusión detallada. Independientemente de estos conceptos y con el fin de hacer una adecuada interpretación de la integral en (11), consideremos la curva cerrada centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$ y cuyo módulo no necesariamente es constante dada por $\gamma(r, \theta) = z_0 + re^{i\theta}$, donde $r > 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. En consecuencia, debido a que el campo de los complejos comparte las mismas propiedades topológicas que $\mathbb{R}^2$, podemos calcular la razón de cambio total de tal modo que $\mathrm{d}z = e^{i\theta}\,\mathrm{d}r + ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$. De esta manera, veamos que al construir el integrando en (11), tenemos que

$$\frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \frac{\mathrm{d}r}{r} + i\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\left[\log(r)\right] + i\mathrm{d}\theta\,.$$

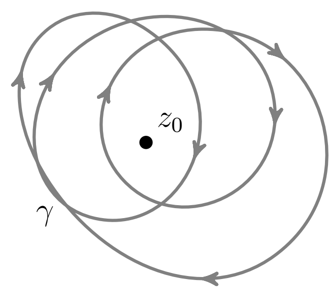
Pongamos atención en los sumandos de la derecha de esta expresión: el argumento de la integral (11) está escrito en términos de la derivada total del logaritmo real y la derivada total del ángulo de rotación de la curva. Es decir, a partir de la proposición 3.1, vemos que este cálculo



(a) $\mathrm{Ind}(z_0, \gamma) = 2$.



(b) $\mathrm{Ind}(z_0, \gamma) = 0$.



(c) $\mathrm{Ind}(z_0, \gamma) = -3$.

Figura 1. Diferentes configuraciones del índice para: (a) $z_0 \in \mathrm{int}(\gamma)$, (b) $z_0 \in \mathrm{ext}(\gamma)$ y (c) $z_0 \in \mathrm{int}(\gamma)$ y γ orientada a favor de las manecillas del reloj.

señala que la existencia del logaritmo como función primitiva en los complejos depende, en su parte real, de la derivada logarítmica del logaritmo real, mientras que la parte imaginaria depende de la rotación de la curva γ alrededor de z_0. De este manera, tomando en cuenta que γ es una curva cerrada y plana, esta divide a $\mathbb{C}$ en dos componentes: (I) el interior de γ corresponde al conjunto de puntos acotado por la curva, denotado por $\mathrm{int}(\gamma)$; (II) los puntos que no se encuentran acotados por la curva forman el conjunto exterior de γ, el cual lo denotamos por $\mathrm{ext}(\gamma)$. Por lo tanto, se tiene que la variación total del sumando real en el término derecho es cero, es decir: $\mathrm{d}\,[\log(r)] = 0$. Dicho de otro modo, la expresión (11) corresponde al cambio total del término angular θ de γ. Es otras palabras, el índice determina el número de vueltas alrededor de z_0, siempre y cuando $z_0 \in \mathrm{int}(\gamma)$. Si la curva está orientada en contra del sentido de las manecillas del reloj, entonces $\mathrm{Ind}(z_0, \gamma) > 0$, en el caso contrario, se tiene que $\mathrm{Ind}(z_0,\gamma) < 0$; finalmente, si $z_0 \in \mathrm{ext}(\gamma)$, entonces $\mathrm{Ind}(z_0,\gamma) = 0$. En la figura 1, se pueden ver estos tres escenarios donde el índice: (a) es positivo para una curva que rodea al punto z_0 en el sentido contrario a las manecillas del reloj; (b) es cero cuando z_0 se encuentra en el exterior de γ; (c) es negativo, dado que la curva γ gira alrededor de z_0 en el sentido a favor de las manecillas del reloj. Nótese que en el primer y en el tercer caso, la curva gira alrededor del punto z_0 dos y tres veces, respectivamente.

3.1 Cauchy con sus raíces y sus polos

En la sección anterior, observamos que el índice de un punto dado respecto a una curva cerrada corresponde al número de vueltas de esta alrededor de un punto; además de que el sentido de rotación de la misma es caracterizado por el signo del índice. Asimismo, con la intención de entender las consecuencias de la integral (9) y, por lo tanto, la conexión que esta tiene con la definición 3.2, notemos que, si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ es una curva diferenciable, tal que $\gamma(0) = \gamma(1)$, tenemos entonces que

$$
\begin{aligned}
I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{0}^{1} \frac{f'(\gamma(\theta))}{f(\gamma(\theta))}\gamma'(\theta)\,\mathrm{d}\theta, \qquad (12)\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ w = f(\gamma(\theta)),\ \tilde{\gamma} = f\circ\gamma,\\ \mathrm{d}w = f'(\gamma(\theta))\,\gamma'(\theta)\,\mathrm{d}\theta.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{\gamma}} \frac{\mathrm{d}w}{w} = \mathrm{Ind}(0,\tilde{\gamma}),
\end{aligned}
$$

Es decir, la integral I no solamente toma valores en los enteros, como señala la identidad (10), sino que, como se puede ver en el término derecho en (12), es equivalente al índice del número 0 respecto a la curva cerrada $\tilde{\gamma}$ dada por la composición analítica $f \circ \gamma$. Dicho de otro modo, la integral I corresponde al número de rotación de las raíces de f que yacen en el interior de $\tilde{\gamma}$. Esta observación conduce al *principio del argumento*, el cual puede ser formulado como sigue:

Teorema 3.3 (Principio del argumento)**.** *Si $f(z)$ es una función analítica excepto en un conjunto de puntos aislados llamados polos*[7] *en* $\Omega \subset \mathbb{C}$

[7]Un *polo* de una función analítica en una región dada es una singularidad que ocurre en un punto $q \in \mathbb{C}$ de tal modo que $f(z) \to \infty$ cuando $z \to q$. Si el límite de $f(z)(z-q)^{\nu}$ con $\nu \in \mathbb{N}$ existe conforme $z \to q$, entonces decimos que $q \in \mathbb{C}$ es un *polo de orden* ν, el cual corresponde a su multiplicidad; véase, por ejemplo, [10].

con raíces $\{p_k\}_{k=1}^n$ y polos $\{q_j\}_{j=1}^m$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^n \mu_k Ind(p_k,\gamma) - \sum_{j=1}^m \nu_j Ind(q_j,\gamma)\,,$$

para cada curva cerrada y suave γ en Ω y tal que $p_k, q_j \notin \gamma$ para todo $k = 1,\dots,n$ y $j = 1,\dots,m$, donde $\{\mu_k\}_{k=1}^n$ y $\{\nu_j\}_{j=1}^m$ son los conjuntos de las multiplicidades de cada raíz y cada polo, respectivamente.

Con vistas a ilustrar brevemente el tipo de razonamientos que se siguen para verificar que la afirmación anterior es verdadera, veamos que la siguiente argumentación constituye la espina dorsal de los conceptos en discusión en el presente texto.

Demostración. Sin pérdida de generalidad y con el fin de simplificar lo más posible los argumentos, tomemos en cuenta el caso más sencillo. Es decir, supongamos que $p, q \in \mathbb{C}$ son una raíz y un polo de $f(z)$ de multiplicidad $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, respectivamente. En consecuencia, debido a que f es una función analítica excepto en el polo q, tenemos que existe una función analítica φ tal que $\varphi(p) \neq 0$, $\varphi(q) \neq 0$ y

$$f(z) = \frac{(z-p)^\mu}{(z-q)^\nu}\varphi(z)\,.$$

Notemos que la derivada logarítmica de $f(z)$ está entonces dada por

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\mu}{z-p} - \frac{\nu}{z-q} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,,$$

la cual conduce a que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \mu\,\mathrm{Ind}(p,\gamma) - \nu\,\mathrm{Ind}(q,\gamma) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,\mathrm{d}z\,.$$

Debido a que φ'/φ es una función analítica particularmente en la región delimitada por γ, entonces el criterio de integrabilidad garantiza la existencia de sus primitivas en términos de $\log[\varphi(z)]$ y, por lo tanto, su integral a lo largo de γ se anula. La conclusión se sigue a partir de estos argumentos. □

De este modo, el teorema 3.3 resulta ser una herramienta sumamente útil para el estudio de una amplia diversidad de fenómenos tanto de naturaleza teórica, como en el terreno de las aplicaciones. Por ejemplo, si $p_n(z)$ es un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$, entonces como alternativa al uso del teorema de Liouville[8], el principio del argumento permite garantizar que $p_n(z) = 0$ tiene n raíces en $\mathbb{C}$. La idea central consiste en tener presente a la región $\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C}\,|\,|z| < R\}$, con $R \gg 1$ fijo,

[8]Recordemos que este teorema establece que una función entera y acotada, debe ser constante.

de tal modo que $p_n(z) \neq 0$ con $|z| \geq R$. De esta manera, para la curva dada por $\gamma(\theta) = Re^{2\pi i\theta}$, donde $0 \leq \theta \leq 1$, y si $q_n(z) = a_n z^n$ con $a_n \neq 0$, se tiene que las curvas suaves y cerradas dadas por $\gamma_q = q_n \circ \gamma$ y $\gamma_p = p_n \circ \gamma$ no cruzan el origen. De este modo, a partir del cálculo en (12), obtenemos que los índices del 0 respecto a γ_q y γ_p satisfacen las relaciones

$$\operatorname{Ind}(0, \gamma_q) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{q_n'(z)}{q_n(z)}\, \mathrm{d}z \quad \text{y} \quad \operatorname{Ind}(0, \gamma_p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{p_n'(z)}{p_n(z)}\, \mathrm{d}z\,, \tag{13a}$$

respectivamente.

Por el otro lado, la combinación convexa entre γ_q y γ_p, dada por la función diferenciable $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$, es tal que

$$H(t, \theta) = tp_n(\gamma(\theta)) + (1-t)q_n(\gamma(\theta))\,,$$

donde $H(0,\theta) = q_n(\gamma(\theta))$ y $H(1,\theta) = p_n(\gamma(\theta))$; entonces, tenemos que

$$\operatorname{Ind}(0, \gamma_q) = \operatorname{Ind}(0, H(0,\theta)) \quad \text{y} \quad \operatorname{Ind}(0, \gamma_p) = \operatorname{Ind}(0, H(1,\theta))\,. \tag{13b}$$

Tomando las observaciones anteriores como base, podemos asegurar que la función auxiliar $\mathcal{I} : [0,1] \to \mathbb{Z}$ definida por

$$\mathcal{I}(t) := \operatorname{Ind}(0, H(t,\theta)) = R \int_0^1 \frac{tp_n'\left(Re^{2\pi i\theta}\right) + (1-t)q_n'\left(Re^{2\pi i\theta}\right)}{tp_n\left(Re^{2\pi i\theta}\right) + (1-t)q_n\left(Re^{2\pi i\theta}\right)} e^{2\pi i\theta}\, \mathrm{d}\theta$$

es continua. Por añadidura, observemos que la función anterior es un número entero para cada $t \in [0,1]$, como puede verse a partir de la identidad en (10); por este motivo, es constante en todo su dominio y, en particular, se satisface que $\mathcal{I}(0) = \mathcal{I}(1)$.

Por lo tanto, a partir de las identidades (13a) y (13b), obtenemos las relaciones

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{q_n'(z)}{q_n(z)}\, \mathrm{d}z = \operatorname{Ind}(0, H(0,\theta)) = \operatorname{Ind}(0, H(1,\theta)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{p_n'(z)}{p_n(z)}\, \mathrm{d}z$$

y, al echar mano del teorema 3.3 y tomando en cuenta que la derivada logarítmica de $q_n(z)$ conduce a que $\operatorname{Ind}(0, \gamma_q) = n$, concluimos que existen n raíces del polinomio $p_n(z)$ en el interior de γ.

4. Algunos comentarios finales

Con la intención de ilustrar la conexión que existe entre una de las funciones trascendentales más importantes de la teoría de las funciones y un concepto, aunque avanzado, de una gran simpleza, hemos llevado a cabo un recorrido conectando algunas interrogantes que surgen al estudiar al logaritmo. La noción de derivada logarítmica suele estudiarse en cualquier curso de cálculo y, a pesar de verse como una herramienta que facilita algunos cálculos, aquí hemos exhibido el poder teórico que conlleva, al igual que las interpretaciones que emergen a partir de extender y profundizar las consecuencias del cociente f'/f. Para ello, hicimos evidentes las vicisitudes de su extensión al plano complejo, donde mostramos, sobre todo, la conexión e interpretación del índice con el principio del argumento, como puede verse en la sección 3, donde discutimos crucialmente el concepto de la derivada logarítmica y el papel que juega en $\mathbb{C}$. Esta discusión, en este texto, comienza con una interrogante simple: ¿qué interpretaciones y, por lo tanto, qué consecuencias tiene el cociente f'/f? Con el fin de comprender las implicaciones que esta interrogante ofrece, observamos una conexión particularmente relevante entre el índice y el principio del argumento, por ejemplo a través de su uso para demostrar el teorema fundamental del álgebra, donde el argumento intrínseco está capturado en la identidad (12).

El índice y el principio del argumento corresponden a conceptos que son utilizados en una amplia variedad de análisis de funciones y sus características en el plano complejo. En particular, puede utilizarse para determinar propiedades dinámicas en un sistema de reacción-difusión, los cuales son sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, usualmente no lineales (véase [9] para una rica discusión en el tema), los cuales suelen ser una herramienta clave para entender algunas interacciones espacio-temporales de origen biológico, por ejemplo. Cabe mencionar que muchas de las herramientas que se usan para modelar ciertos fenómenos naturales se dan en términos de funciones analíticas. Por ejemplo, a nivel subcelular, en la dinámica de crecimiento de la planta *Arabidopsis thaliana* participan una amplia variedad de familias de proteínas, las cuales son catalizadas por flujos hormonales, tales que son responsables de distintos efectos en el ser vivo. Entre estas consecuencias, se encuentran la sanación de heridas, florecimiento, anclaje al suelo y toma de nutrientes, entre otras. En particular, en la epidermis de sus raíces, los *pelos radiculares* son células que desarrollan una protuberancia (hasta tres veces mayor que el tamaño de la célula) que les permite particularmente obtener nutrientes del suelo. Cuando el proceso bioquímico de iniciación ocurre, es decir, cuando estas protuberancias comienzan a desarrollarse, los pelos radiculares han alcanzado un tamaño crítico. Una vez superado este umbral, la pared celular de la célula comienza a debilitarse como consecuencia del agregamiento de una cierta familia de proteínas. La localización de estos sitios de iniciación bioquímica es determinado por la distribución espacial de un flujo de una hormona conocida como *auxina* en el interior del pelo radicular. En la literatura especializada se pueden encontrar una amplia variedad de trabajos donde se aborda esta dinámica desde diferentes perspectivas, una de ellas consiste en modelar la dinámica de formación de parches bioquímicos desde el punto de vista de los sistemas de reacción-difusión. En particular, en [4] se analiza la dinámica de esta interacción de origen bioquímico buscando dar respuesta a las consecuencias geométricas (relacionadas con el crecimiento de la célula y su morfología) que pueden ocurrir e influenciar en la iniciación de estas protuberancias. En otras palabras, la idea central del trabajo consiste en analizar teóricamente la posibilidad de observar la acumulación de las proteínas con la forma de una banda transversal a la longitud de la célula.

Desde esta perspectiva, los temas discutidos en el presente texto conforman una estrategia metodológica clave para el análisis de ciertas propiedades dinámicas de un tipo particular de soluciones; cabe hacer notar que el enfoque consiste en las ideas plasmadas en la definición 3.2 y el teorema 3.3 principalmente. Asimismo, estos conceptos y el resultado previamente comentado en el párrafo anterior dan sólido sustento a uno de las contribuciones que se han llevado a cabo en la teoría de formación de patrones, la cual se encuentra aún incompleta.

El problema consiste en averiguar la estabilidad de un tipo de soluciones particulares; para lograr este objetivo, se analiza un problema de valores propios, el cual es no lineal y no local. Como se puede consultar en [4], la estrategia consiste en re-escribir un problema de valores propios en términos de una función trascendente y verificar la existencia de una raíz con parte real positiva. En consecuencia, se garantiza que el valor propio principal (el mayor en magnitud) yace en el semi-plano derecho del plano complejo. Con este fin, se utilizan los ingredientes discutidos en el presente texto.

De esta manera, la consecuencia crucial de este resultado junto con algunos argumentos que aquí no se exponen, pero sí analizados a profundidad en [4], culmina en una interpretación que se formula en términos de un principio de mínima energía, en el sentido de que las proteínas que debilitan la dermis de la célula dan lugar a la formación de parches bioquímicos cuya distribución espacial es identificada con el mínimo costo energético. Dicho de una manera coloquial, las proteínas que se activan para iniciar el proceso de la formación de la protuberancia ocurre de tal manera que la morfología del mismo es tal que se minimiza el gasto energético para la planta. Para una discusión detallada de este análisis, véase [4] junto con las referencias ahí incluidas.

Para finalizar, en particular observemos que la identidad en (12) subraya que cuando la región encerrada por γ se encuentra en el dominio de analiticidad de f, el número de vueltas de la función a lo largo de la curva coincide con el número total de raíces de f en dicha región. Este argumento y el teorema 3.3 conforman el corazón de las condiciones que dan veracidad al teorema de Rouché, cuya demostración yace en argumentos similares a los que se utilizaron para verificar la veracidad del teorema fundamental del álgebra. El resultado dado por el teorema de Rouché establece las condiciones para que dos funciones tengan el mismo número de raíces (véase [1]), el cual es utilizado por la Comisión Ballenera Internacional (IWC, por sus siglas en inglés) en un modelo dinámico discreto con retraso para monitorear la población de ballenas en el planeta (véase [8]).

Espero que este breve ensayo sirva para ilustrar que los conceptos básicos, sobre todo en la modelación matemática, son esenciales para obtener información de fenómenos de diversa índole. Más aún, que este texto funcione como motivación para seguir haciendo y respondiendo preguntas sobre nuestro entorno (dinámico), es decir, entenderlo… y entendernos mejor en este proceso también dinámico: la vida.

Bibliografía

[1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis. An Introduction to the Theory of Analytic Functions on One Complex Variable*, 3.ª ed., Mc. Graw–Hill, 1979.
[2] T. M. Apostol, *Cálculus*, vol. 1, Editoral Reverté, 2006.
[3] ———, *Cálculus*, vol. 2, Editoral Reverté, 2006.
[4] V. Breña-Medina, D. Avitabile y M. Ward, «Stripe to Spot in a Plant Root Hair Initiation Model», *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 75, núm. 3, 2015, 1090–1119.
[5] J. J. Connor y E. F. Robertson, «John Napier», *MacTutor History of Mathematics Archive*, 1998, .
[6] R. Courant y J. Fritz, *Introduction to Calculus and Analysis*, vol. 1, Interscience Publishers, 1965.
[7] ———, *Introduction to Calculus and Analysis*, vol. 2, Interscience Publishers, 1965.
[8] J. Murray, *Mathematical Biology I: An Introduction*, 3.ª ed., Springer–Verlag, 2001.
[9] ———, *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, 3.ª ed., Springer–Verlag, 2001.
[10] R. Remmert, *Theory of Complex Functions*, Springer–Verlag, 1991.
[11] A. H. Smith, *Economics. An Introduction to Fundamental Problems*, 6.ª ed., Mc. Graw–Hill, 1945.