Miscelánea Matemática **58** (2014) 49-65 SMM

Sobre los coeficientes del polinomio $\prod_{i=1}^{n}(x+i)$

José Luis Cereceda Berdiel
Distrito Telefónica, Edificio Este 1
28050 – Madrid, España
jl.cereceda@movistar.es

Resumen

En este artículo se detallan tres métodos para calcular los coeficientes $\sigma_1(n), \sigma_2(n), \ldots, \sigma_n(n)$ del polinomio de grado n, $\prod_{i=1}^{n}(x+i)$, donde n es cualquier entero arbitrario $n \geq 1$. Calculamos explícitamente los coeficientes $\sigma_k(n)$ para $k = 1, \ldots, 7$, y deducimos ciertas propiedades generales de $\sigma_k(n)$. En particular, se demuestra que $\sigma_k(n)$ es un polinomio en n de grado $2k$. Se describe también la relación existente entre los coeficientes $\sigma_k(n)$ y los números de Stirling de primera especie.

1. Introducción

Consideremos el siguiente polinomio en x de grado n:

$$p_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x+i) = x^n + \sigma_1(n)x^{n-1} + \sigma_2(n)x^{n-2} + \cdots + \sigma_{n-1}(n)x + \sigma_n(n). \tag{1}$$

Cada coeficiente $\sigma_k(n)$ en (1) viene determinado por la respectiva función simétrica elemental de los n primeros enteros $\sigma_k(1, 2, \ldots, n)$ [11, 17, 16]:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(n) &= \sigma_1(1, 2, \ldots, n) = 1 + 2 + \cdots + n, \\
\sigma_2(n) &= \sigma_2(1, 2, \ldots, n) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \cdots + 1 \cdot n + \cdots + (n-1)n, \\
\sigma_3(n) &= \sigma_3(1, 2, \ldots, n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + \cdots + (n-2)(n-1)n, \\
&\vdots \\
\sigma_n(n) &= \sigma_n(1, 2, \ldots, n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,
\end{aligned}$$

con $\sigma_k(n) = 0$ para todo $k > n$. Por conveniencia para lo que sigue, introducimos la función constante $\sigma_0(n)$ definida como $\sigma_0(n) = 1$ para todo $n \geq 1$, y $\sigma_0(0) = 1$. Así mismo, convenimos que $\sigma_k(0) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Para $0 \leq k \leq n$, podemos por tanto expresar $\sigma_k(n)$ de manera compacta como

$$\sigma_k(n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} i_1 i_2 \cdots i_k, \tag{2}$$

donde cada i_s, $s = 1, 2, \ldots, k$, es un entero en el intervalo $1 \leq i_s \leq n$. En particular, tenemos que

$$\sigma_1(n) = \frac{1}{2} n(n+1). \tag{3}$$

Para valores de n relativamente pequeños podemos expandir el producto en (1) y obtener los coeficientes correspondientes, o bien evaluar directamente cada una de las funciones elementales $\sigma_k(n)$. Por ejemplo, para $n = 6$, obtenemos

$$p_6(x) = x^6 + 21x^5 + 175x^4 + 735x^3 + 1624x^2 + 1764x + 720.$$

Sin embargo, a medida que n crece, el desarrollo del producto $\prod_{i=1}^{n}(x+i)$ así como la determinación «a mano» de las funciones $\sigma_k(n)$ se vuelve exponencialmente más complejo. Por ejemplo, para $n = 100$, el número de sumandos solo en $\sigma_2(100)$ es ya de $\binom{100}{2} = 4950$.

El objetivo de este artículo es evaluar de manera sistemática los coeficientes del polinomio (1) o, equivalentemente, las funciones simétricas elementales (2). Para ello proponemos tres métodos que permiten, en principio, calcular $\sigma_k(n)$ para cualquier entero arbitrario $n \geq 1$ y para cualquier $k = 1, 2, \ldots, n$. El primer método es un método iterativo equivalente a las identidades de Newton y hace uso de las sumas de potencias de enteros, mientras que el segundo involucra la resolución de un sistema lineal de ecuaciones tipo Cramer. Como ilustración de dichos métodos, y partiendo de la ecuación (3) para $\sigma_1(n)$, evaluaremos explícitamente $\sigma_k(n)$ para $k = 2, \ldots, 7$. Por el camino deduciremos ciertas propiedades generales de $\sigma_k(n)$, como el hecho de que $\sigma_k(n)$ es un polinomio en n de grado $2k$. A continuación expondremos la relación existente entre los coeficientes del polinomio (1) y los números de Stirling de primera especie. Posteriormente se detalla un tercer método iterativo para calcular $\sigma_k(n)$ basado en la ecuación aditiva de Cauchy. Al final del artículo se incluye una fórmula explícita para $\sigma_k(n)$.

2. Identidades de Newton

Las identidades de Newton [11, 15, 18], también conocidas como las fórmulas de Newton–Girard, relacionan las funciones simétricas elementales con otro tipo de funciones simétricas como son las sumas de potencias. Si nos especializamos en el polinomio (1), las identidades de Newton se pueden expresar como

$$k\sigma_k(n) + \sum_{r=1}^{k}(-1)^r S_r(n)\sigma_{k-r}(n) = 0, \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

donde $S_r(n)$ denota la suma de potencias r-ésimas de los primeros n enteros positivos:

$$S_r(n) = 1^r + 2^r + \cdots + n^r.$$

En lo que sigue escribiremos $S_r(n)$ simplemente como S_r, en el entendimiento de que S_r depende explícitamente de n. A partir de la relación (4) se puede determinar $\sigma_k(n)$ en función de las sumas de potencias $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Así, recordando que $\sigma_0(n) = 1$, de (4) obtenemos sucesivamente que

$$\begin{aligned}
\sigma_1(n) &= S_1,\\
\sigma_2(n) &= \frac{1}{2}S_1^2 - \frac{1}{2}S_2 = \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} S_1 & 1 \\ S_2 & S_1 \end{vmatrix},\\
\sigma_3(n) &= \frac{1}{6}S_1^3 - \frac{1}{2}S_1S_2 + \frac{1}{3}S_3 = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

etc. Puede demostrarse que, tal como se adivina de las expresiones anteriores, para un índice arbitrario k la función $\sigma_k(n)$ está dada por el determinante de orden k:

$$\sigma_k(n) = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{k-1} & S_{k-2} & S_{k-3} & S_{k-4} & \cdots & k-1 \\ S_k & S_{k-1} & S_{k-2} & S_{k-3} & \cdots & S_1 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

En forma expandida el determinante (5) viene dado por la fórmula de Waring [8]

$$\sigma_k(n) = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_k)'} \frac{(-1)^{k+i_1+i_2+\cdots+i_k}}{i_1! i_2! \cdots i_k!}\left(\frac{S_1}{1}\right)^{i_1}\left(\frac{S_2}{2}\right)^{i_2}\cdots\left(\frac{S_k}{k}\right)^{i_k}, \tag{6}$$

donde la suma se realiza sobre todas las k-tuplas $(i_1, i_2, \ldots, i_k)'$ de enteros no negativos que satisfacen la relación $i_1 + 2i_2 + \cdots + ki_k = k$.

Cuando se examina el determinante (5) se concluye rápidamente que el sumando de mayor grado lo constituye precisamente el producto de los elementos de la diagonal principal $S_1^k/k!$ o, equivalentemente, cuando $i_1 = k$ en la ecuación (6). Como $S_1 = \sigma_1(n)$, de (3) deducimos por tanto que $\sigma_k(n)$ es un polinomio de grado $2k$ con coeficiente de mayor grado $1/2^k k!$. Otro sumando de especial relevancia que aparece en la fórmula (6) es $(-1)^{k+1}S_k/k$, el cual es el único que no es un producto de S_r's. Para $k \geq 2$ y par, dicho sumando contiene el término de menor grado de $\sigma_k(n)$, a saber, un término en n. Para $k \geq 3$ e impar, cada uno de los sumandos $(-1)^{k+1}S_k/k$ y $(-1)^k S_1 S_{k-1}/(k-1)$ en (6) contiene un término en n^2, constituyendo la suma de ambos términos en n^2 el término de menor grado de $\sigma_k(n)$.

Concluimos esta sección con la observación obvia de que la expresión (6) para $\sigma_k(n)$ involucra a las sumas $S_1, S_2, \ldots, S_r$, hasta el índice $r = k$. En la siguiente sección expondremos un método alternativo (aunque equivalente) a las identidades de Newton para el cual el cálculo de $\sigma_k(n)$ requiere conocer las sumas S_r hasta el índice $r = 2k-1$. La ventaja del método propuesto radica en que dicho método proporciona $\sigma_k(n)$ como una *suma* de S_r's (hasta $r = 2k-1$), a diferencia de la fórmula (6) que proporciona $\sigma_k(n)$ como una suma de *productos* de S_r's (hasta $r = k$).

3. Ecuaciones de recurrencia y primer método para la evaluación de $\sigma_k(n)$

La siguiente ecuación de recurrencia fundamental se deriva directamente de la propia definición de $\sigma_k(n)$. Para $k = 1, 2, \ldots, n$, se cumple que

$$\sigma_k(n) = \sigma_k(n-1) + n\sigma_{k-1}(n-1). \tag{7}$$

Aplicando repetidamente la ecuación (7) podemos expresar cada $\sigma_k(n)$ en función de $\sigma_{k-1}(n-1), \sigma_{k-1}(n-2), \ldots,$ y $\sigma_{k-1}(k-1)$. Así, por ejemplo, para $k = 2$, de la ecuación (7) obtenemos

$$\sigma_2(n) = n\sigma_1(n-1) + \sigma_2(n-1).$$

Aplicamos ahora la ecuación (7) al término $\sigma_2(n-1)$ para obtener

$$\sigma_2(n) = n\sigma_1(n-1) + (n-1)\sigma_1(n-2) + \sigma_2(n-2).$$

Aplicamos de nuevo la ecuación (7) al último término obtenido $\sigma_2(n-2)$; a continuación la aplicamos al término resultante $\sigma_2(n-3)$, y así sucesivamente hasta llegar al resultado final

$$\sigma_2(n) = n\sigma_1(n-1) + (n-1)\sigma_1(n-2) + \cdots + 3\sigma_1(2) + 2\sigma_1(1).$$

Operando de manera similar para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, y partiendo en cada caso de la ecuación (7), se puede derivar la lista completa de relaciones recursivas:

$$
\begin{aligned}
\sigma_1(n) &= n\sigma_0(n-1) + (n-1)\sigma_0(n-2) + \cdots + 4\sigma_0(3) \\
&\quad + 3\sigma_0(2) + 2\sigma_0(1) + 1\sigma_0(0), \\
\sigma_2(n) &= n\sigma_1(n-1) + (n-1)\sigma_1(n-2) + \cdots + 4\sigma_1(3) \\
&\quad + 3\sigma_1(2) + 2\sigma_1(1), \\
\sigma_3(n) &= n\sigma_2(n-1) + (n-1)\sigma_2(n-2) + \cdots + 4\sigma_2(3) \\
&\quad + 3\sigma_2(2), \\
\sigma_4(n) &= n\sigma_3(n-1) + (n-1)\sigma_3(n-2) + \cdots + 4\sigma_3(3), \\
&\ \vdots \\
\sigma_{n-1}(n) &= n\sigma_{n-2}(n-1) + (n-1)\sigma_{n-2}(n-2), \\
\sigma_n(n) &= n\sigma_{n-1}(n-1).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Teniendo en cuenta que $\sigma_{k-1}(n) = 0$ para todo $n < k-1$, podemos expresar las relaciones (8) en forma compacta como

$$
\sigma_k(n) = \sum_{j=1}^{n} j\sigma_{k-1}(j-1), \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}
$$

Partiendo de la ecuación (3) para $\sigma_1(n)$ y aplicando sucesivamente la relación (9) podemos evaluar $\sigma_k(n)$ para cualquier k dado. A modo de ejemplo, a continuación calculamos mediante este método las funciones $\sigma_2(n)$, $\sigma_3(n)$, $\sigma_4(n)$, y $\sigma_5(n)$. Para $k = 2$, de las ecuaciones (9) y (3) tenemos que

$$
\sigma_2(n) = \sum_{j=1}^{n} j\sigma_1(j-1) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(j^3 - j^2\right) = \frac{1}{2}S_3 - \frac{1}{2}S_2.
$$

Es un resultado bien conocido que la suma de potencias de enteros S_r se puede expresar como un polinomio en n de grado $r+1$ [14]. En el cuadro 1 hemos recopilado los polinomios S_r para $r = 1, \ldots, 10$. Sustituyendo ahora en la ecuación anterior las expresiones para S_2 y S_3 que aparecen en dicho cuadro obtenemos

$$
\sigma_2(n) = \frac{1}{24}(3n^4 + 2n^3 - 3n^2 - 2n) = \frac{1}{12}(n-1)(3n+2)\sigma_1(n),
$$

de donde obtenemos, en particular, que $\sigma_2(100) = 12582075$. Provistos con $\sigma_2(n)$, podemos determinar $\sigma_3(n)$ aplicando de nuevo la ecuación

$S_1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$S_2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$
$S_3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$
$S_4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$
$S_5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$
$S_6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$
$S_7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$
$S_8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$
$S_9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2$
$S_{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$

Cuadro 1. Los polinomios S_r, $r = 1, \ldots, 10$.

(9):

$$\begin{aligned}\sigma_3(n) &= \sum_{j=1}^{n} j\sigma_2(j-1) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{8}j^5 - \frac{5}{12}j^4 + \frac{3}{8}j^3 - \frac{1}{12}j^2\right)\\ &= \frac{1}{8}S_5 - \frac{5}{12}S_4 + \frac{3}{8}S_3 - \frac{1}{12}S_2.\end{aligned}$$

Reemplazando S_2, S_3, S_4, y S_5 por sus expresiones polinómicas del cuadro 1 obtenemos

$$\sigma_3(n) = \frac{1}{48}(n^6 - n^5 - 3n^4 + n^3 + 2n^2) = \frac{1}{12}(n-1)(n-2)\sigma_1^2(n).$$

A partir de $\sigma_3(n)$ podemos obtener $\sigma_4(n)$ aplicando una vez más la ecuación (9):

$$\begin{aligned}\sigma_4(n) &= \sum_{j=1}^{n} j\sigma_3(j-1) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{48}j^7 - \frac{7}{48}j^6 + \frac{17}{48}j^5 - \frac{17}{48}j^4 + \frac{1}{8}j^3\right)\\ &= \frac{1}{48}S_7 - \frac{7}{48}S_6 + \frac{17}{48}S_5 - \frac{17}{48}S_4 + \frac{1}{8}S_3.\end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones respectivas para S_r del cuadro 1 obtenemos

$$\sigma_4(n) = \frac{1}{4!\cdot 5!}(n-1)(n-2)(n-3)\big(15n^3 + 15n^2 - 10n - 8\big)\sigma_1(n).$$

Análogamente, a partir de la ecuación (9) y de $\sigma_4(n)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\sigma_5(n) =& \frac{1}{384}S_9 - \frac{1}{32}S_8 + \frac{83}{576}S_7 - \frac{77}{240}S_6\\ &+ \frac{403}{1152}S_5 - \frac{5}{32}S_4 + \frac{1}{288}S_3 + \frac{1}{120}S_2\\ =& \frac{1}{4!\cdot 5!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\big(3n^2-n-6\big)\sigma_1^2(n).\end{aligned}$$

De esta forma, conociendo las sumas de potencias S_r hasta el índice $r = 2k-1$, la fórmula recursiva (9) permite obtener $\sigma_k(n)$ hasta cualquier k determinado.

Para el presente método basado en la ecuación (9), así como para el método de las identidades de Newton, es de utilidad la siguiente fórmula la cual proporciona las sumas S_r en función de los denominados números de Bernoulli B_j [14]:

$$S_r = \frac{1}{r+1}\sum_{j=0}^{r}\binom{r+1}{j}B_j n^{r+1-j}, \tag{10}$$

donde los primeros términos de la sucesión de números de Bernoulli vienen dados por $1, 1/2, 1/6, 0, -1/30, 0, 1/42, 0, -1/30, 0, 5/66, \dots$. Los números de Bernoulli satisfacen numerosas propiedades aritméticas y aparecen significativamente en diversas áreas de la teoría de números. Aquí destacamos simplemente que $B_j = 0$ para todo $j \geq 3$ e impar. Como se puede ver de la fórmula (10) este hecho implica, en particular, que las sumas S_k con $k \geq 3$ e impar no tienen término en n.

A la vista de las expresiones obtenidas para $\sigma_2(n)$, $\sigma_3(n)$, $\sigma_4(n)$, y $\sigma_5(n)$, y de las conclusiones de la sección anterior, podemos ya extraer las siguientes propiedades generales sobre $\sigma_k(n)$:

1. $\sigma_k(n)$ es un polinomio en n de grado $2k$ con coeficiente de mayor grado $\frac{1}{2^k k!}$.
2. Para k par, $k \geq 2$, el término de menor grado de $\sigma_k(n)$ es en n con coeficiente $-B_k/k$. Para k impar, $k \geq 3$, el término de menor grado de $\sigma_k(n)$ es en n^2 con coeficiente $\frac{(k-2)B_{k-1}}{2(k-1)}$.
3. $\sigma_k(n) = 0$ para todo $n < k$.
4. Para $k \geq 2$ y par, $\sigma_1(n)$ es un factor de $\sigma_k(n)$
5. Para $k \geq 3$ e impar, $\sigma_1^2(n)$ es un factor de $\sigma_k(n)$.

La propiedad 2 ya se esbozó en la sección anterior y se puede demostrar a partir de las ecuaciones (6) y (10). Las propiedades 4 y 5 se siguen del hecho según el cual para todo $k \geq 2$ y par, $S_2 = \frac{1}{3}(2n+1)S_1$ es un factor de S_k, mientras que para todo $k \geq 3$ e impar, S_1^2 es un factor de S_k [14, 6]. Esto asegura que, para k impar, $k \geq 3$, todos los sumandos en la ecuación (6) tienen como factor a $\sigma_1^2(n)$. Por el contrario, para k par, $k \geq 2$, el sumando $(-1)^{k+1}S_k/k$ no tiene como factor a $\sigma_1^2(n)$, siendo $\sigma_1(n)$ el factor común a cada uno de los sumandos en (6).

4. Segundo método para la evaluación de $\sigma_k(n)$

De acuerdo a las propiedades que acabamos de reseñar, para $k \geq 2$ y par podemos descomponer $\sigma_k(n)$ como el producto $\sigma_k(n) = p_k(n) \times q_k(n)$, donde

$$p_k(n) = n(n+1)\prod_{j=1}^{k-1}(n-j)$$

es un polinomio en n de grado $k+1$ y $q_k(n)$ es un polinomio en n de grado $k-1$. De esta manera, continuando con nuestra evaluación de las funciones simétricas elementales, tendremos que $\sigma_6(n)$ es un polinomio en n de grado 12 el cual se puede descomponer en la forma

$$\begin{aligned} \sigma_6(n) = n(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \\ \times \left(an^5 + bn^4 + cn^3 + dn^2 + en + f\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Para determinar los coeficientes a, b, c, d, e, y f[1] necesitamos conocer el valor de $\sigma_6(n)$ para seis valores cualesquiera de $n > 5$. Obviamente lo más sencillo es comenzar con $n = 6$ para el cual sabemos que $\sigma_6(6) = 6! = 720$. A partir de este valor, de la ecuación de recurrencia (7), y de la expresión para $\sigma_5(n)$, se deducen sucesivamente los valores $\sigma_6(7) = 13068$, $\sigma_6(8) = 118124$, $\sigma_6(9) = 723680$, $\sigma_6(10) = 3416930$, y $\sigma_6(11) = 13339535$. Evaluando ahora el polinomio en (11) para $n = 6, 7, 8, 9, 10$, y 11, obtenemos el siguiente sistema compatible determinado de seis ecuaciones con seis incógnitas:

$$\begin{aligned} 5040(6^5a + 6^4b + 6^3c + 6^2d + 6e + f) &= 720, \\ 40320(7^5a + 7^4b + 7^3c + 7^2d + 7e + f) &= 13068, \\ 181440(8^5a + 8^4b + 8^3c + 8^2d + 8e + f) &= 118124, \\ 604800(9^5a + 9^4b + 9^3c + 9^2d + 9e + f) &= 723680, \\ 1663200(10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f) &= 3416930, \\ 3991680(11^5a + 11^4b + 11^3c + 11^2d + 11e + f) &= 13339535. \end{aligned} \tag{12}$$

Resolviendo (12) mediante, por ejemplo, el programa *Mathematica*, hallamos la solución $a = \frac{1}{46080}$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{9216}$, $d = -\frac{1}{12960}$, $e = \frac{1}{20736}$, y

[1]De las propiedades 1 y 2 anteriores, sabemos de antemano que $a = 1/(2^6 \cdot 6!) = 1/46080$, y $f = B_6/(6 \cdot 5!) = 1/30240$. Sin embargo, para uniformizar el tratamiento que sigue, consideraremos también a a y f como coeficientes a determinar.

$f = \frac{1}{30240}$. Sustituyendo estos valores en (11) obtenemos finalmente

$$\sigma_6(n) = \frac{5}{2\cdot 6!\cdot 7!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \times \big(63n^5 - 315n^3 - 224n^2 + 140n + 96\big)\sigma_1(n).$$

Para $k \geq 3$ e impar, podemos descomponer $\sigma_k(n)$ como $\sigma_k(n) = p_k(n) \times q_k(n)$, donde ahora $p_k(n) = n^2(n+1)^2 \prod_{j=1}^{k-1}(n-j)$ es un polinomio en n de grado $k+3$, y $q_k(n)$ es un polinomio en n de grado $k-3$. Para hallar $\sigma_7(n)$ planteamos un sistema análogo de cinco ecuaciones con cinco incógnitas utilizando los valores $\sigma_7(7) = 7! = 5040$, $\sigma_7(8) = 109584$, $\sigma_7(9) = 1172700$, $\sigma_7(10) = 8409500$, y $\sigma_7(11) = 45995730$. Resolviendo dicho sistema obtenemos la forma factorizada:

$$\sigma_7(n) = \frac{5}{2\cdot 6!\cdot 7!}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) \times \big(9n^4 - 18n^3 - 57n^2 + 34n + 80\big)\sigma_1^2(n).$$

Obsérvese que el factor numérico que aparece al principio de la forma factorizada de $\sigma_k(n)$ es el mismo para cada una de las parejas $(\sigma_2(n), \sigma_3(n))$, $(\sigma_4(n), \sigma_5(n))$, y $(\sigma_6(n), \sigma_7(n))$. Podemos combinar este hecho con las propiedades sobre $\sigma_k(n)$ establecidas en la sección 3 para postular la siguiente forma factorizada general de las funciones $\sigma_{2k}(n)$ y $\sigma_{2k+1}(n)$ (con $k \geq 1$):

$$\sigma_{2k}(n) = \frac{r_{2k}\, n(n+1)}{2(2k)!(2k+1)!}\left(\sum_{j=0}^{2k-1} c_{2k,j}\, n^j\right)\prod_{j=1}^{2k-1}(n-j), \tag{13a}$$

$$\sigma_{2k+1}(n) = \frac{r_{2k}\, n^2(n+1)^2}{4(2k)!(2k+1)!}\left(\sum_{j=0}^{2k-2} c_{2k+1,j}\, n^j\right)\prod_{j=1}^{2k}(n-j), \tag{13b}$$

donde r_{2k} es un factor numérico racional y positivo, y donde los coeficientes $\{c_{2k,j}\}_{j=0}^{2k-1}$ y $\{c_{2k+1,j}\}_{j=0}^{2k-2}$ son números enteros. Se cumple además que $r_{2k}c_{2k,2k-1} = (2k+1)!/2^{2k-1}$.

5. Los coeficientes $\sigma_k(n)$ y los números de Stirling

Existe una estrecha relación entre los coeficientes del polinomio (1) y los números de Stirling, específicamente los denominados números de Stirling (sin signo) de primera especie, que describimos a continuación. Para abreviar el texto, en esta sección nos referiremos a dichos números meramente como números de Stirling. Existen dos maneras fundamentales de introducir este tipo de números (véanse, por ejemplo, [9, cap. 6]): de manera combinatoria y de manera algebraica. Combinatoriamente los números de Stirling, $\left[{n \atop k}\right]$, cuentan el número de permutaciones de

n objetos que tienen exactamente k ciclos. Los números de Stirling cumplen las condiciones iniciales $\left[{0 \atop 0}\right] = 1$ y $\left[{n \atop 0}\right] = \left[{0 \atop n}\right] = 0$ para $n \geq 1$. Además, como no puede haber permutaciones con más ciclos que elementos, convenimos en que $\left[{n \atop k}\right] = 0$ si $k > n$. Por otra parte, los casos extremos en los que $k = 1$ y $k = n$ vienen dados por

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)! \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1,$$

donde la primera igualdad se sigue del hecho de que existen $(n-1)!$ permutaciones cíclicas de n elementos, y la segunda del hecho de que existe una única permutación que tiene tantos ciclos como elementos (la permutación identidad).

Algebraicamente, $\left[{n \atop k}\right]$ se puede definir como el coeficiente de x^k en el producto factorial ascendente $x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$:

$$q_n(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k, \tag{14}$$

donde hemos tomado el límite inferior del sumatorio igual a $k = 0$ debido a que $\left[{n \atop 0}\right] = 0$ para $n \geq 1$. Podemos reescribir ahora el polinomio en (1) como

$$p_n(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+n) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k(n) x^{n-k}. \tag{15}$$

Comparando entonces los polinomios en las ecuaciones (14) y (15) vemos de inmediato que $xp_n(x) = q_{n+1}(x)$. Tendremos por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \sigma_k(n) x^{n-k+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1-k \end{bmatrix} x^{n+1-k}, \end{aligned}$$

de donde concluimos finalmente que

$$\sigma_k(n) = \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1-k \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Podemos expresar entonces el polinomio (1) o (15) de manera equivalente como

$$p_n(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+n) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} x^k. \tag{17}$$

Observemos incidentalmente que, sustituyendo $x = 1$ en la ecuación (15) o (17), obtenemos la suma de los coeficientes del polinomio (1), $\sum_{k=0}^{n} \sigma_k(n) = (n+1)!$.

Vamos a derivar a continuación la relación bien conocida entre los números de Stirling del tipo $\left[{n+1 \atop 2}\right]$ y los números armónicos H_n [9, 5], los cuales están definidos como las sumas parciales de la serie armónica. Para $n \geq 1$, tenemos que

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

siendo $H_1 = 1$, $H_2 = 3/2$, $H_3 = 11/6$, etc. Para ello vamos a evaluar $\sigma_{n-1}(n)$ para los primeros valores de n, lo que nos permitirá determinar la relación entre $\left[{n+1 \atop 2}\right]$ y H_n:

$$\begin{aligned}
\sigma_0(1) &= 1 = 1!H_1,\\
\sigma_1(2) &= 1 + 2 = \frac{2!}{1} + \frac{2!}{2} = 2!H_2,\\
\sigma_2(3) &= 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3 = \frac{3!}{1} + \frac{3!}{2} + \frac{3!}{3} = 3!H_3,\\
\sigma_3(4) &= 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 4 + 1\cdot 3\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot 4\\
&= \frac{4!}{1} + \frac{4!}{2} + \frac{4!}{3} + \frac{4!}{4} = 4!H_4,
\end{aligned}$$

etc. Todo parece indicar que, en general, $\sigma_{n-1}(n) = n!H_n$. Para probar rigurosamente que esto es así, acudimos a la ecuación de recurrencia (7) y a la inducción matemática. Primero vemos de las expresiones anteriores que la relación $\sigma_{n-1}(n) = n!H_n$ se cumple para $n = 1, 2, 3,$ y 4. Tomamos entonces como hipótesis inductiva que dicha relación $\sigma_{k-1}(k) = k!H_k$ es cierta para un k arbitrario dado. De la ecuación (7) se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\sigma_k(k+1) &= k! + (k+1)\sigma_{k-1}(k)\\
&= k! + (k+1)k!H_k\\
&= (k+1)!\left(H_k + \frac{1}{k+1}\right) = (k+1)!H_{k+1}.
\end{aligned}$$

Concluimos por tanto que, para todo $n = 1, 2, 3, \ldots,$ se satisface la identidad

$$\sigma_{n-1}(n) = \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n!H_n.$$

Podemos generalizar los números armónicos H_n definiendo los números armónicos de orden r como [9]:

$$H_n^{(r)} = 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots + \frac{1}{n^r}.$$

Para $r = 1$ podemos escoger a nuestro gusto tanto la notación H_n como la $H_n^{(1)}$. Es pertinente apuntar aquí que los números de Stirling $\left[{n+1 \atop m}\right]$ se pueden expresar en función de los números armónicos generalizados

$H_n^{(r)}$ hasta el orden $r = m - 1$ [3]. A modo de ejemplo, a continuación adjuntamos las expresiones de $\left[{n+1 \atop m}\right]$ para $m = 1, 2, 3$, y 4 [7, p. 217]:

$$\begin{aligned}
\sigma_n(n) &= \begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} = n!, \\
\sigma_{n-1}(n) &= \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n! H_n^{(1)}, \\
\sigma_{n-2}(n) &= \begin{bmatrix} n+1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{n!}{2}\left[\left(H_n^{(1)}\right)^2 - H_n^{(2)}\right], \\
\sigma_{n-3}(n) &= \begin{bmatrix} n+1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{n!}{6}\left[\left(H_n^{(1)}\right)^3 - 3H_n^{(1)}H_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}\right].
\end{aligned}$$

Notamos finalmente que la relación (16) es útil para determinar los valores $\sigma_k(k)$, $\sigma_k(k+1)$, $\sigma_k(k+2), \ldots$, que son necesarios para plantear el sistema de ecuaciones inherente al método expuesto en la sección 4. Así, por ejemplo, los valores correspondientes al lado derecho del sistema (12) vienen dados por $\sigma_6(6) = \left[{7 \atop 1}\right]$, $\sigma_6(7) = \left[{8 \atop 2}\right]$, $\sigma_6(8) = \left[{9 \atop 3}\right]$, $\sigma_6(9) = \left[{10 \atop 4}\right]$, $\sigma_6(10) = \left[{11 \atop 5}\right]$, y $\sigma_6(11) = \left[{12 \atop 6}\right]$.

6. Tercer método para la evaluación de $\sigma_k(n)$

El método que exponemos a continuación se basa en la ecuación aditiva de Cauchy. Desde una perspectiva puramente teórica, el método que sigue es relevante ya que aúna elementos de la matemática discreta con elementos del análisis funcional. La ecuación de Cauchy es la siguiente:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función incógnita a determinar. Una función que satisface (18) se dice que es aditiva. De la amplia teoría de las ecuaciones funcionales [2] solo necesitamos conocer, para nuestro propósito en la presente sección, que la solución continua del funcional de Cauchy está dada por

$$f(x) = cx, \tag{19}$$

donde c es una constante real, concretamente $c = f(1)$. Además, sobre el conjunto de los números racionales, la solución de la ecuación (18) es necesariamente de la forma (19) aunque no se cumpla la condición de continuidad. El método de la ecuación de Cauchy consiste esencialmente en encontrar una función aditiva $f_k(n)$ que esté relacionada con la función de interés, digamos, $\sigma_k(n)$. La solución de $f_k(n)$ será entonces de la forma $f_k(n) = c_k n$, de donde podremos extraer la función deseada $\sigma_k(n)$. Este método ha sido aplicado con éxito para obtener las sumas

S_k así como diversas funciones combinatorias (véanse, por ejemplo, los artículos de Kannappan en [13, 12]).

Seguidamente vamos a ilustrar el método de Cauchy para hallar las funciones $\sigma_2(n)$ y $\sigma_3(n)$. Para calcular $\sigma_2(n)$ partimos de la relación fácilmente comprobable

$$\sigma_1(n+m) = \sigma_1(n) + \sigma_1(m) + nm. \tag{20}$$

Por otra parte, aplicando la ecuación (7) para hallar $\sigma_2(n+1), \sigma_2(n+2), \ldots, \sigma_2(n+m)$, llegamos al resultado

$$\sigma_2(n+m) = \sigma_2(n) + \sum_{j=1}^{m}(n+j)\sigma_1(n+j-1), \tag{21}$$

mientras que la ecuación (9) para $k=2$ nos dice que

$$\sigma_2(m) = \sum_{j=1}^{m} j\sigma_1(j-1). \tag{22}$$

Combinando las ecuaciones (20), (21), y (22) obtenemos finalmente la relación

$$\begin{aligned}\sigma_2(n+m) &= \sigma_2(n) + \sigma_2(m)\\ &\quad + \frac{1}{4}\big(3n^2m^2 + 2n^3m + 2nm^3 + n^2m + nm^2 - nm\big), \end{aligned}\tag{23}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned}4\sigma_2(n+m) &= 4\sigma_2(n) + 4\sigma_2(m) + \frac{1}{2}\big[(n+m)^4 - n^4 - m^4\big]\\ &\quad + \frac{1}{3}\big[(n+m)^3 - n^3 - m^3\big] - \frac{1}{2}\big[(n+m)^2 - n^2 - m^2\big].\end{aligned}$$

De la última ecuación deducimos que la función

$$f_2(n) = 4\sigma_2(n) - \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2,$$

es una función aditiva y estará por tanto dada por $f_2(n) = c_2 n$ para una cierta constante c_2. De aquí obtenemos la función requerida

$$\sigma_2(n) = \frac{1}{8}n^4 + \frac{1}{12}n^3 - \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{4}c_2 n.$$

Como $\sigma_2(1) = 0$ tendremos que $c_2 = -\frac{1}{3}$, recuperando el resultado para $\sigma_2(n)$ de la sección 3.

Para calcular $\sigma_3(n)$ partimos de la relación (23) y de las ecuaciones

$$\sigma_3(n+m) = \sigma_3(n) + \sum_{j=1}^{m}(n+j)\sigma_2(n+j-1), \tag{24}$$

y

$$\sigma_3(m) = \sum_{j=1}^{m} j\sigma_2(j-1). \tag{25}$$

Después de una cierta dosis de álgebra elemental, de las ecuaciones (23), (24), y (25) obtenemos la relación

$$\begin{aligned}\sigma_3(n+m) = \sigma_3(n) + \sigma_3(m) + \frac{1}{48}\big(20n^3m^3 + 6n^5m + 6nm^5 + 15n^4m^2 \\ + 15n^2m^4 - 5n^4m - 5nm^4 - 10n^3m^2 - 10n^2m^3 - 18n^2m^2 \\ - 12n^3m - 12nm^3 + 3n^2m + 3nm^2 + 4nm\big),\end{aligned}$$

la cual podemos expresar igualmente como

$$\begin{aligned}48\sigma_3(n+m) &= 48\sigma_3(n) + 48\sigma_3(m) + \big[(n+m)^6 - n^6 - m^6\big] \\ &\quad - \big[(n+m)^5 - n^5 - m^5\big] - 3\big[(n+m)^4 - n^4 - m^4\big] \\ &\quad + \big[(n+m)^3 - n^3 - m^3\big] + 2\big[(n+m)^2 - n^2 - m^2\big].\end{aligned}$$

La ecuación anterior nos indica que la función

$$f_3(n) = 48\sigma_3(n) - n^6 + n^5 + 3n^4 - n^3 - 2n^2,$$

es una función aditiva y vendrá entonces dada por $f_3(n) = c_3 n$ para cierta constante c_3. Tendremos por tanto que

$$\sigma_3(n) = \frac{1}{48}n^6 - \frac{1}{48}n^5 - \frac{1}{16}n^4 + \frac{1}{48}n^3 + \frac{1}{24}n^2 + \frac{1}{48}c_3 n.$$

Ahora, como $\sigma_3(1) = 0$, tenemos que $c_3 = 0$ recuperando el resultado para $\sigma_3(n)$ de la sección 3.

Debemos conceder que el método de Cauchy no es tan práctico para calcular $\sigma_k(n)$ como lo son los otros métodos descritos en las secciones anteriores, ya que la evaluación de $\sigma_k(n+m)$ se complica mucho a medida que k crece. Sin embargo, conviene recalcar que el método de Cauchy permite en principio obtener de manera iterativa $\sigma_k(n)$ hasta cualquier k determinado. Dicho método se puede adoptar además para calcular una gran diversidad de sumas de enteros y, como ya mencionamos, constituye un método ciertamente atractivo desde un punto de vista teórico.

7. Fórmula explícita para $\sigma_k(n)$

La fórmula de Waring (6) en la sección 2 proporciona un método concreto para evaluar $\sigma_k(n)$. Sin embargo, para calcular explícitamente $\sigma_k(n)$ mediante dicha fórmula es preciso conocer de antemano las sumas de potencias $S_1, S_2, \ldots, S_k$, así como determinar todas las k-tuplas $(i_1, i_2, \ldots, i_k)'$ de enteros no negativos para las cuales $i_1 + 2i_2 + \cdots + ki_k =$

k. Por completitud, y por su interés intrínseco, en esta sección exponemos brevemente una fórmula explícita para $\sigma_k(n)$ que involucra únicamente sumas y productos de números combinatorios. Dicha fórmula está basada en la siguiente relación entre los números de Stirling de primera y de segunda especie [1]:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (-1)^{n-k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-1+j}{n-k+j} \binom{2n-k}{n-k-j} \left\{ \begin{matrix} n-k+j \\ j \end{matrix} \right\}. \tag{26}$$

Los números de Stirling de segunda especie $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ j \end{smallmatrix} \right\}$, por su parte, vienen dados explícitamente por [9]

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} i^k. \tag{27}$$

Combinando ahora las ecuaciones (16), (26), y (27) obtenemos finalmente la fórmula mencionada para $\sigma_k(n)$:

$$\sigma_k(n) = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \binom{n+j}{k+j} \binom{n+k+1}{k-j} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i} i^{k+j}. \tag{28}$$

El lector puede comprobar que, para $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, la fórmula (28) proporciona sucesivamente

$$\begin{aligned} \sigma_0(n) &= 1, \\ \sigma_1(n) &= \frac{1}{2} n(n+1), \\ \sigma_2(n) &= \frac{1}{12}(n-1)(3n+2)\sigma_1(n), \\ \sigma_3(n) &= \frac{1}{12}(n-1)(n-2)\sigma_1^2(n), \end{aligned}$$

etc. Obsérvese también que, para cada $j = 0, 1, \ldots, k$, el producto $\binom{n+j}{k+j}\binom{n+k+1}{k-j}$ en la expresión (28) es un polinomio en n de grado $2k$.

8. Conclusión

En este artículo hemos descrito diversos métodos elementales que permiten calcular los coeficientes del polinomio $p_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x+i)$ o, lo que es lo mismo, las funciones simétricas elementales de los n primeros enteros $\sigma_k(n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. En particular, de las ecuaciones (13a) y (13b) podemos derivar la forma factorizada de $\sigma_{2k}(n)$ y $\sigma_{2k+1}(n)$. Dichas funciones están ligadas mediante la relación

$$\sigma_{2k+1}(n) = \sigma_{2k+1}(n-1) + n\sigma_{2k}(n-1),$$

la cual, en principio, nos permitiría obtener $\sigma_{2k+1}(n)$ a partir de $\sigma_{2k}(n)$, y viceversa.

Finalizamos el artículo con la inclusión de dos referencias adicionales [4, 10] que pueden estimular al lector a avanzar sobre la materia tratada. La primera de ellas describe diversos algoritmos recursivos así como su utilización en la evaluación de las funciones simétricas elementales y sus derivadas, en el contexto del modelo psicométrico de Rasch. La segunda, enmarcada en el campo de la aritmética computacional, presenta un nuevo y eficiente algoritmo de suma compensada para computar las funciones simétricas elementales.

Agradecimientos

Quisiera expresar mi agradecimiento a la Dra. Ana Meda Guardiola por su diligencia en el tratamiento editorial. También agradezco los comentarios y sugerencias de los revisores anónimos que ayudaron en gran medida a mejorar la presentación y el contenido de este trabajo.

Bibliografía

[1] M. Abramowitz y I. Stegun (Editores), *Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover Publications, 1972.

[2] J. Aczél, *Lectures on functional equations and their applications*, Academic Press, New York, 1966.

[3] V. Adamchik, «On Stirling numbers and Euler sums», *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 79, 1997, 119–130.

[4] F. B. Baker y M. R. Harwell, «Computing elementary symmetric functions and their derivatives: A didactic», *Appl. Psychol. Meas.*, vol. 20, 1996, 169–192.

[5] A. T. Benjamin, G. O. Preston y J. J. Quinn, «A Stirling encounter with harmonic numbers», *Math. Mag.*, vol. 75, 2002, 95–103.

[6] J. L. Cereceda, «Teorema de Faulhaber sobre las sumas de potencias», *La Gaceta de la RSME*, vol. 15, 2012, 149–169.

[7] L. Comtet, *Advanced combinatorics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1974.

[8] H. W. Gould, «The Girard–Waring power sum formulas for symmetric functions and Fibonacci sequences», *Fib. Quart.*, vol. 37, 1999, 135–140.

[9] R. L. Graham, D. E. Knuth y O. Patashnik, *Concrete mathematics: A foundation for computer science*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

[10] H. Jiang, S. Graillat y R. Barrio, «Accurate and fast evaluation of elementary symmetric functions», *21st IEEE Symposium on Computer Arithmetic*, 2013, 183–190.

[11] D. Kalman, *Uncommon mathematical excursions: Polynomia and related realms*, Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions #35, 2009.

[12] P. Kannappan, «Application of Cauchy's equation in combinatorics and genetics», *Mathware & Soft Comp.*, vol. 8, 2001, 61–64.

[13] P. Kannappan, «Sum of powers of integers and the additive Cauchy equation», *J. Math. Soochow*, vol. 27, 2001, 89–95.

[14] T. C. T. Kotiah, «Sums of powers of integers—a review», *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, vol. 24, 1993, 863–874.

[15] D. G. Mead, «Newton's identities», *Amer. Math. Monthly*, vol. 99, 1992, 749–751.

[16] D. Terr y E. W. Weisstein, «Symmetric polynomial, from Mathworld –A Wolfram web resource», http://mathworld.wolfram.com/SymmetricPolynomial.html.

[17] E. W. Weisstein, «Vieta's formulas, Mathworld –A Wolfram web resource», http://mathworld.wolfram.com/VietasFormulas.html.

[18] wikipedia, «Artículo en wikipedia: Newton's identities», http://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_identities.