Miscelánea Matemática **54** (2014) 51-65 SMM

La fórmula de Riemann-Hurwitz

Jesús Romero Valencia

Universidad Autónoma de Guerrero,
jromv@yahoo.com

Petra Rubí Pantaleón Mondragón

Universidad Autónoma de Guerrero,
rubi.2102@hotmail.com

Resumen

El propósito de este trabajo es presentar de una manera sencilla el Teorema de Riemann–Hurwitz y ver cómo, a partir de este, se infieren algunas propiedades restrictivas de aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann compactas.

1. Introducción

A mediados del siglo XIX se comenzó a desarrollar la idea de superficie de Riemann por el matemático Bernhard Riemann. Él intentaba construir de manera más sólida la teoría de las funciones analíticas de una variable compleja. Aunque inicialmente la idea de superficie de Riemann aparece ligada a una función, desde hace más de un siglo, el punto de vista cambió gracias a que se ha desarrollado el estudio de estas de manera abstracta como variedades complejas, independientemente de las funciones que le dieron origen.

La estructura de este escrito es la siguiente: comenzamos por definir lo que es una superficie de Riemann y las aplicaciones holomorfas entre ellas, a continuación definimos el género topológico y la característica de Euler de una $2-$variedad y calculamos este número para algunos ejemplos que utilizamos, enseguida enunciamos y damos la demostración de la fórmula de Riemann-Hurwitz y por último vemos algunas propiedades deducidas por esta fórmula para las aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann.

Nos gustaría agradecer a los revisores anónimos de estas notas por sus críticas, comentarios y sugerencias, lo cual, sin duda, nos fue de mucha ayuda para poder corregir el escrito original y así obtener una versión mejorada del mismo.

2. Superficies de Riemann y aplicaciones holomorfas

Iniciemos definiendo algunos conceptos[1], en donde supondremos que X es un espacio topológico.

$2-$**variedad:** es un espacio Hausdorff en el cual cada punto tiene un vecindad homeomorfa a un disco de $\mathbb{R}^2$. Como $\mathbb{R}^2$ es homeomorfo a $\mathbb{C}$, en la definición de $2-$variedad podemos escribir $\mathbb{C}$, en lugar de $\mathbb{R}^2$.

Por ejemplo, $\mathbb{C}$ es una $2-$variedad, pues la identidad $1_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es un homeomorfismo, para cualquier punto de $\mathbb{C}$.

Carta (compleja): es un homeomorfismo $\phi : U \to V$, donde U es un abierto en X y V un disco de $\mathbb{C}$.

Carta centrada en un punto: Si $\phi : U \to V$ es una carta de X y $p \in U$, diremos que la carta está centrada en p, si $\phi(p) = 0$.

La función identidad en el ejemplo anterior es una carta sobre $\mathbb{C}$, centrada en 0, pues $1_{\mathbb{C}}(0) = 0$.

Consideremos dos cartas $\phi_1 : U_1 \to V_1$ y $\phi_2 : U_2 \to V_2$, tenemos dos posibilidades: $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ o $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, en el segundo caso la situación es como en la figura 1.

Cartas compatibles: Si $\phi_1 : U_1 \to V_1$ y $\phi_2 : U_2 \to V_2$ son dos cartas, diremos que son compatibles si sus dominios no se intersecan o cuando se intersecan la composición $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(V_1 \cap V_2)$ es una función holomorfa.

Notemos que la propiedad que pedimos tiene sentido, puesto que la función $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ es compleja de variable compleja.

Atlas (complejo): es un conjunto de cartas:

$$\mathcal{A} = \{\phi_j : U_j \to V_j\}$$

en el cual cualesquiera dos de ellas son compatibles y $\bigcup_j U_j = X$.

Atlas equivalentes.: Si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son dos atlas de X tales que cada carta de $\mathcal{A}_1$ es compatible con cada carta de $\mathcal{A}_2$, diremos que $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son equivalentes.

[1] La mayoría de estas definiciones son tomadas de los capítulos I y II de [2], así como de algunas del capítulo II de [3].

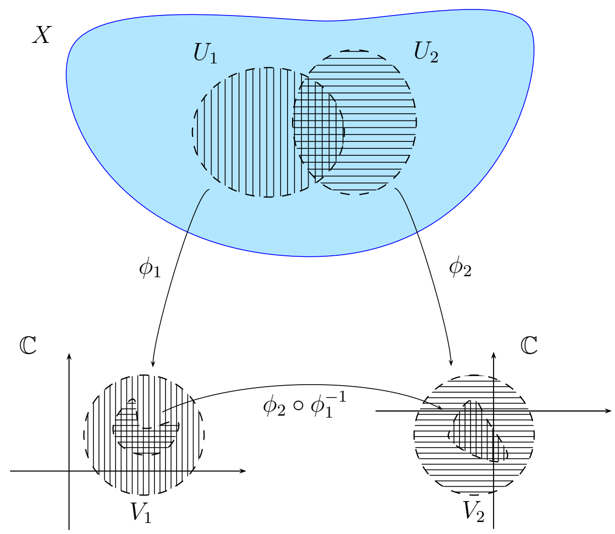


Figura 1. Dos cartas $\phi_1 : U_1 \to V_1$ y $\phi_2 : U_2 \to V_2$.

Se puede demostrar fácilmente que la relación de que dos atlas sean equivalentes resulta ser, precisamente, de equivalencia. Esto nos permite clasificar a todos los posibles atlas de una 2−variedad en clases de equivalencia.

Estructura compleja de X: es una clase de equivalencia de atlas sobre X.

Superficie de Riemann: es una pareja que consta de una 2−variedad conexa X junto con una estructura compleja sobre ella.

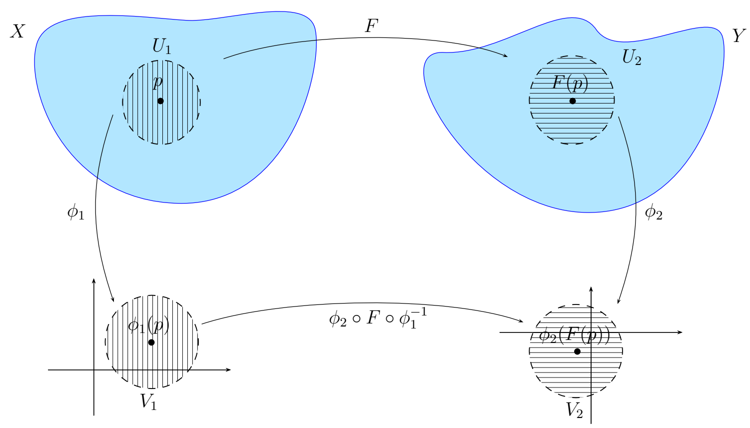
Algunos ejemplos sencillos de superficies de Riemann son los siguientes:

1. El plano complejo $\mathbb{C}$, donde la estructura compleja que podemos tomar es la clase del atlas que consta de la identidad $1_{\mathbb{C}}$.
2. La esfera de Riemann:
$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{S}^2 = \{(x, y, w) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + w^2 = 1\}$$
cuya estructura compleja está dada por las siguientes cartas:
$$\begin{array}{rcc} \phi_1 : \mathbb{S}^2 - \{(0,0,1)\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y,w) & \mapsto & \frac{x}{1-w} + i\frac{y}{1-w} \end{array}$$
$$\begin{array}{rcc} \phi_2 : \mathbb{S}^2 - \{(0,0,-1)\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y,w) & \mapsto & \frac{x}{1+w} - i\frac{y}{1+w} \end{array}$$
las cuales, obviamente, son compatibles.
3. Cualquier subconjunto abierto y conexo de los ejemplos anteriores.

Una vez definidos nuestros objetos de interés, el siguiente paso es considerar aplicaciones «adecuadas» entre ellos. Lo natural, cuando se trata de superficies de Riemann, es definir aplicaciones que sean holomorfas.

Aplicación holomorfa: Sean X y Y superficies de Riemann, $F: X \to Y$ una función y $p \in X$, diremos que F es holomorfa en p, si existen cartas $\phi_1 : U_1 \to V_1$ en X, con $p \in U_1$, y $\phi_2 : U_2 \to V_2$, en Y, con $F(p) \in U_2$, tales que la composición $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : V_1 \to V_2$ es holomorfa en $\phi_1(p)$, en el sentido usual de variable compleja.

Si F está definida sobre un conjunto abierto $W \subset X$, entonces decimos que F es holomorfa en W, si F es holomorfa en cada punto de W. En particular, diremos que F es una aplicación holomorfa, si es holomorfa en todo X.



Es importante hacer el comentario de que una aplicación será o no holomorfa independientemente del par de cartas que se elijan, es decir, si existe una pareja que satisfaga la definición, entonces cualquier otra pareja que escojamos satisfará la misma propiedad.[2]

Entre las muchas propiedades que poseén las aplicaciones holomorfas, está la siguiente de vital importancia, que nos dice que la aplicación localmente se comporta como una función potencia.

Proposición 2.1 (Forma Local Normal)**.** *Sean $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante y $p \in X$, entonces existe un único $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que para cada carta $\phi_2 : U_2 \to V_2$ de Y centrada en $F(p)$, existe una carta $\phi_1 : U_1 \to V_1$ de X centrada en p tal que $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^m$.*

La demostración de esta proposición se sigue de la expresión en serie de Taylor de la función $T(w) = \phi_2(F(\phi_1^{-1}(w)))$, donde ϕ_2 es una carta en Y alrededor de $F(p)$ y ϕ_1 una en X alrededor de p, el entero m es precisamente la menor potencia que aparece en esta serie. (Para más detalles, ver página 44 de [2].)

[2]Esta afirmación puede probarse de manera similar al caso de funciones holomorfas, para más detalles ver la página 21 de [2].

Multiplicidad de F en p: es el entero m dado por la proposición anterior y la denotamos por $mult_p(F)$.

Notemos que para todo punto $p \in X$ se cumple que $mult_p(F) \geq 1$.

Punto de ramificación: Sea $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante, diremos que $p \in X$ es un punto de ramificación de F, si $mult_p(F) \geq 2$.

Punto rama: es un punto $y \in Y$ el cual es imagen de un punto de ramificación de F.

Un elemento de suma importancia que se puede definir para aplicaciones entre superficies de Riemann compactas, es el grado, lo cual haremos a continuación.

Proposición 2.2. *Sean X y Y superficies de Riemann compactas y $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante. Para cada $y \in Y$, consideremos el número:*

$$d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} mult_p(F),$$

entonces $d_y(F)$ es constante e independiente de y.

Bosquejo de demostración: La idea es probar que la función $y \mapsto d_y(F)$ es una función localmente constante de Y a $\mathbb{Z}$. Como Y es conexa, una función localmente constante será constante. Para ello consideramos el disco unitario $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y la función potencia $f : D \to D$ dada por $f(z) = z^m$ para algún $m \geq 1$.

Dicha función f es holomorfa, sobreyectiva, su único punto de ramificación es $z = 0$ (donde la multiplicidad es m), los demás puntos tienen multiplicidad 1, además para un $w \in D, w \neq 0$, existen m preimágenes (las m raíces de w) cada una de multiplicidad 1, por lo que f tiene la propiedad de que la suma de las multiplicidades de los puntos de las preimágenes es constante e igual a m. Y como F localmente se comporta como funciones potencia como la de arriba, la prueba está completa. $\square$

Así, si $F : X \to Y$ es como en la proposición anterior, entonces esta nos asegura que la siguiente definición tiene sentido:

El grado de F: se define como el entero $d_y(F)$ de la proposición anterior, para cualquier $y \in Y$. Denotamos el grado de F por $gr(F)$.

Corolario 2.3. *Una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann compactas es un isomorfismo si y solo si es de grado uno.*

Demostración. Sean X y Y superficies de Riemann compactas y $F : X \to Y$ holomorfa.

$\Rightarrow\rfloor$ Si F es un isomorfismo, en particular F es inyectiva, por lo tanto F tiene grado uno.

$\Leftarrow\rfloor$ Si F tiene grado uno, entonces F es inyectiva. F holomorfa y X compacta, implica $F(X)$ compacta, por lo cual $F(X)$ es cerrado, pero también $F(X)$ es abierto, pues X lo es, por lo tanto, $F(X) = Y$. □

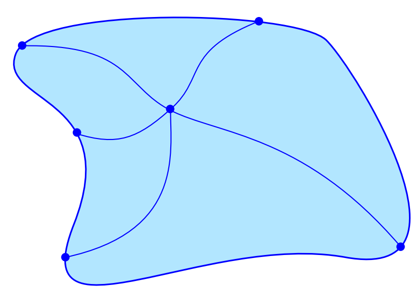
3. La característica de Euler de una 2−variedad

La característica de Euler es una propiedad topológica que, en un principio, no era más que una fórmula asociada a poliedros. Euler observó que en cualquier poliedro el número de vértices, v, más el número de caras, c, era dos más que el número de aristas, a:

$$v - a + c = 2.$$

Desde entonces, la característica de Euler se ha transformado en una herramienta topológica bastante útil que ha permitido estudiar más profundamente las superficies. A continuación definiremos formalmente la característica de Euler para una 2−variedad S.

Una triangulación de S: es una descomposición de S en subconjuntos cerrados, cada uno de ellos homeomorfo a un triángulo, y tal que cualesquiera dos de ellos, son ajenos, se intersecan en un único vértice o bien en una única arista.



La definición anterior fue tomada de Miranda (página 50), sin embargo, una triangulación puede definirse de manera más formal a partir de complejos simpliciales[3], pero para nuestros objetivos es suficiente la definición dada arriba.

La característica de Euler de S: Sea T una triangulación de S con v vértices, a aristas y t triángulos, la característica de Euler de S (con respecto a la triangulación T), se define como el entero:

$$e(S) = v - a + t.$$

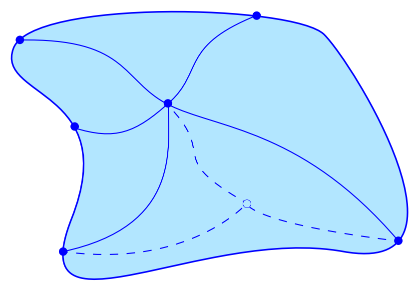
Una de las principales propiedades de la característica de Euler es que no depende de la triangulación tomada. A continuación bosquejamos una justificación de dicha afirmación. Sea T una triangulación de S.

[3] Ver, por ejemplo, página 121 de [1].

Refinamiento elemental de T: es otra triangulación de S que se obtiene de alguna de las formas siguientes:

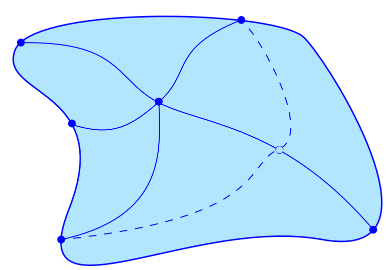
- Aumentando un vértice en algún punto del interior de un triángulo y tres aristas desde los vértices al nuevo vértice. Con ello se reemplaza un triángulo por tres triángulos, lo cual aumenta un vértice, tres aristas y dos triángulos. Observemos que:

$$(v+1)-(a+3)+(t+2)=v-a+t=e(S).$$



- Al tomar dos triángulos vecinos con una arista común A, ponemos un vértice en algún punto del interior de A y dos aristas de cada uno de los vértices opuestos de los dos triángulos. Esencialmente esto biseca a los dos triángulos, aumentando un vértice, tres aristas y dos triángulos. Es decir:

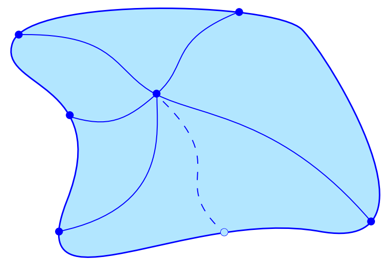
$$(v+1)-(a+3)+(t+2)=v-a+t=e(S).$$



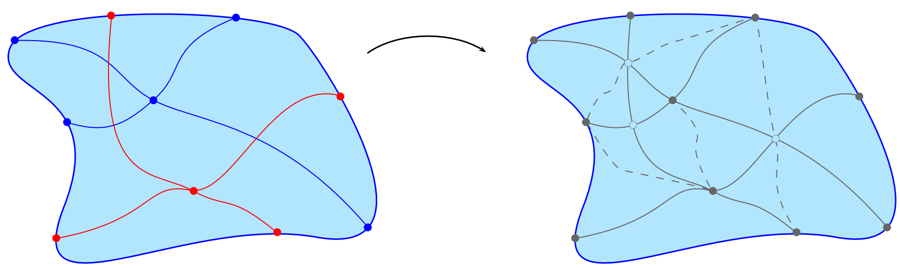
- En una $2-$variedad con frontera, simplemente bisecamos un triángulo por una arista que forme parte de la frontera. Con esto se suman un vértice, dos aristas y un triángulo. Así:

$$(v+1)-(a+2)+(t+1)=v-a+t=e(S).$$

Con base en lo anterior, podemos observar que estas tres operaciones mantienen la característica de Euler.

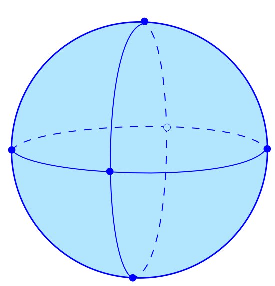


Un refinamiento general[4] se obtiene por una sucesión de refinamientos elementales. Por lo tanto, una triangulación y cualquier refinamiento de esta da la misma característica de Euler para la superficie. Además, cualesquiera dos triangulaciones de una 2−variedad compacta (incluso con frontera), tiene un refinamiento común. Esto se puede ver al sobreponer ambas triangulaciones en la superficie y completar con los vértices y aristas que hagan falta, con lo cual obtenemos un refinamiento común de estas. De donde, la característica de Euler está bien definida.



Como la característica de Euler es invariante bajo refinamientos y cualesquiera dos triangulaciones tienen un refinamiento común, entonces podemos considerar cualquier triangulación para calcular la característica de Euler de una 2−variedad.

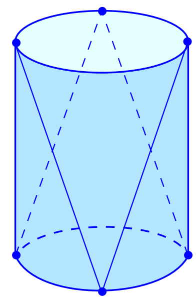
I. Si S es una esfera, entonces con la siguiente triangulación obtenemos:



[4]Así llamado por Miranda, ver [2] página 51.

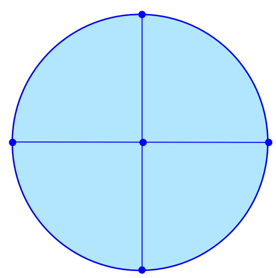
$$e(S) = v - a + t = 6 - 12 + 8 = 2.$$

II. Si C es un cilindro, entonces considerando la siguiente triangulación obtenemos:



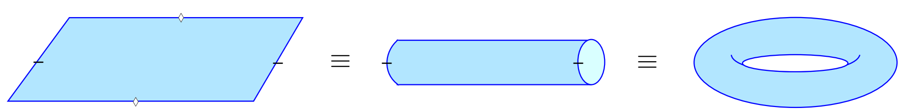
$$e(C) = v - a + t = 6 - 12 + 6 = 0.$$

III. Si D es un disco cerrado, entonces con la siguiente triangulación tenemos:



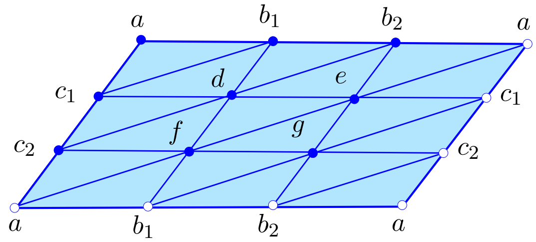
$$e(D) = v - a + t = 5 - 8 + 4 = 1$$

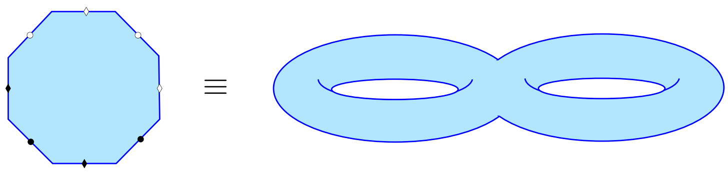
IV. Si X es un toro, es menos sencillo que en los ejemplos anteriores encontrar una triangulación para esta superficie. Para esto consideraremos una *región fundamental para* X, la cual es un paralelogramo cuyos lados opuestos están identificados.



Tomando la siguiente triangulación de esta región obtenemos:

$$e(X) = v - a + t = 9 - 27 + 18 = 0.$$

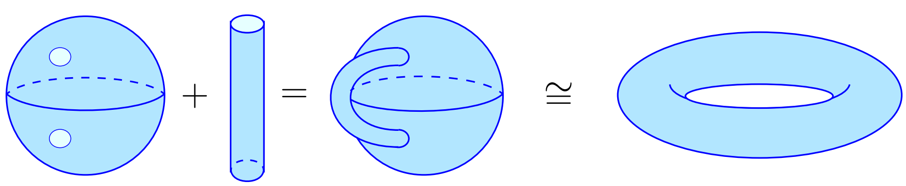




Para construir un $2-$toro la región fundamental que tomamos es el siguiente polígono, con lados identificados como se indica:

y es más complicado construir una triangulación de esta región. En general, para construir un $g-$toro la región fundamental que se considera es un polígono de $4g$ lados identificados por pares como arriba, obviamente de manera más general. Para evitar construir triangulaciones de regiones cada vez más complicadas, consideraremos lo siguiente. Como topológicamente $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, de topología sabemos que toda $2-$variedad compacta y orientable X es homeomorfa a una esfera con «asas»[5], al número de asas es lo que llamamos *el género topológico de* X.

Para incrementar el género de una superficie en uno, basta con quitar dos discos (con frontera) y pegar un cilindro sobre ellos, lo cual lo podemos interpretar como poner un asa. Al quitar los dos discos la característica de Euler baja 1 por cada uno de ellos, en total 2 y al pegar el cilindro esta no se ve afectada. De esta manera, la característica de Euler disminuye 2 cada vez que aumentamos un asa.



Dado que la característica de Euler de una esfera es 2, entonces por inducción se puede demostrar la siguiente proposición.[6]

Proposición 3.1. *Sea S una $2-$variedad de género g, compacta, orientable y sin frontera, entonces la característica de Euler de S es $2-2g$.*

[5]Una demostración de esta afirmación puede encontrarse en el capítulo de 7 de [1].

[6]Para una prueba formal de este hecho, ver capítulo 7 de [1].

Este resultado, obviamente, concuerda con lo que hicimos arriba para el toro X:

$$e(X) = 0 = 2 - 2(1).$$

Es importante que hagamos la observación de que todo lo que hicimos en esta sección fue estrictamente topológico, en ningún momento se consideró estructura adicional para las variedades, pero, por ejemplo, al considerar dos rectángulos con diferentes estructuras complejas, obviamente, como superficies de Riemann son distintas, aunque topológicamente ambas son $1-$toros.

4. La fórmula de Riemann-Hurwitz

La fórmula de Riemann-Hurwitz es muy importante y a menudo utilizada en la teoría de superficies de Riemann, donde tiene su origen. Es una relación determinada por Riemann[7] y demostrada por Hurwitz[8], esta conecta el grado de una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann compactas con la característica de Euler y el número de puntos de ramificación de la aplicación. La demostración de dicho teorema presentada a continuación puede ser comparada con la presentada en el capítulo II de [2].

Teorema 4.1 (Fórmula de Riemann-Hurwitz). *Sean X y Y superficies de Riemann compactas y $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa y no constante, entonces:*

$$2g_X - 2 = gr(F)(2g_Y - 2) + \sum_{p \in X} [mult_p(F) - 1],$$

donde g_X y g_Y son los géneros de X y de Y, respectivamente.

Demostración. Como X es compacta, el conjunto de puntos de ramificación es finito, luego la suma que aparece en la fórmula es finita, pues los únicos puntos que cuentan son los de ramificación, ya que para los demás se tiene $mult_p(F) = 1$, de donde $mult_p(F) - 1 = 0$.

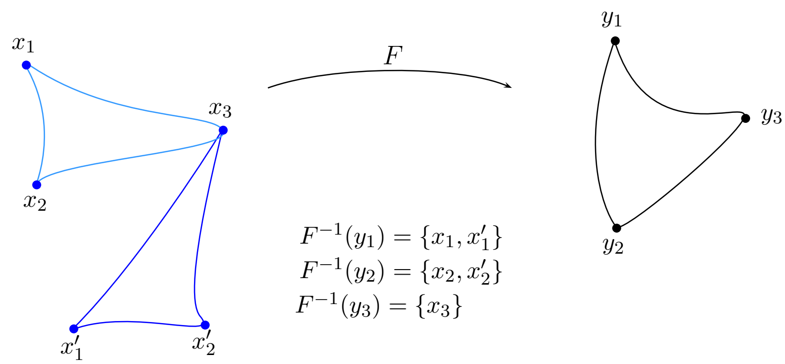
Tomemos una triangulación de Y de tal forma que cada punto rama de F sea un vértice y supongamos que hay v vértices, a aristas y t triángulos.

Ahora «levantamos» esta triangulación a una para X vía F, es decir, construimos una triangulación para X de tal manera que los vértices sean las preimágenes de los vértices de la triangulación dada para Y y las aristas se toman de las correspondientes aristas en Y:

---

[7] Se pueden encontrar las publicaciones de Riemann en *Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische werke und wissenschaftlicher nachlass*, Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1876.

[8] La cual puede ser revisada en *Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen*, A.Hurwitz, Mathematische Annalen, Volume 39, 1891, páginas 1-16.



Supongamos que la triangulación de X tiene v' vértices, a' aristas y t' triángulos. Como no hay puntos de ramificación en el interior de cualquier triángulo, entonces cada triángulo de Y se levanta a $gr(F)$ triángulos en X. De esta manera, $t' = gr(F)t$ y de manera similar $a' = gr(F)a$. Pero no ocurre lo mismo con los vértices v', pues si fijamos un vértice $q \in Y$, el número de preimágenes de q en X es $|F^{-1}(q)|$, que podemos escribir como sigue:

$$|F^{-1}(q)| = \sum_{p \in F^{-1}(q)} 1 = gr(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - mult_p(F)]$$

ya que quitaremos algunos puntos, dependiendo de la multiplicidad del punto rama. Así, el número total de preimágenes de vértices de Y, el cual es el número v' de vértices de X es:

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{\substack{\text{vértices} \\ q \in Y}} \left(gr(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - mult_p(F)] \right) \\ &= gr(F)v + \sum_{\substack{\text{vértices} \\ q \in Y}} \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - mult_p(F)]. \end{aligned}$$

Además sabemos que $2 - 2g_{_X} = a' - v' + t'$. Sustituyendo nuestros valores obtenemos:

$$\begin{aligned} 2 - 2g_{_X} &= gr(F)a - gr(F)v + \sum_{\substack{\text{vértices} \\ q \in Y}} \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - mult_p(F)] + gr(F)t \\ &= gr(F)(a - v + t) + \sum_{p \in X} [1 - mult_p(F)] \\ &= gr(F)(2 - 2g_{_Y}) + \sum_{p \in X} [1 - mult_p(F)]. \end{aligned}$$

Luego, multiplicando por -1 ambos lados de la igualdad tenemos:

$$2g_X - 2 = gr(F)(2g_Y - 2) + \sum_{p \in X}[mult_p(F) - 1],$$

lo cual concluye la prueba. $\square$

4.1 Restricciones para la existencia de aplicaciones holomorfas

Una de la aplicaciones importantes de la fórmula de Riemann-Hurwitz es que nos impone condiciones para poder definir aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann, en el sentido de que pueden no existir entre dos superficies arbitrarias o tener propiedades específicas.

Sean X y Y superficies de Riemann compactas y $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante, entonces:

1. $g_Y \leq g_X$. En efecto, como $gr(F) \geq 1$, la fórmula de Riemann-Hurwitz implica:

$$2g_X - 2 \geq (2g_Y - 2) + \sum_{p \in X}[mult_p(F) - 1],$$

luego:

$$2g_X - 2g_Y \geq \sum_{p \in X}[mult_p(F) - 1].$$

Además, como $mult_p(F) \geq 1$, para todo $p \in X$, entonces:

$$\sum_{p \in X}[mult_p(F) - 1] \geq 0,$$

de donde, $2g_X - 2g_Y \geq 0$ y por lo tanto, $g_X \geq g_Y$.

2. *Si $g_Y = g_X \geq 2$, entonces F es un isomorfismo.* Supongamos que $gr(F) = d$, como $mult_p(F) \geq 1$ entonces:

$$\sum_{p \in X}[mult_p(F) - 1] \geq 0.$$

Dado que $g_Y = g_X$, tenemos que:

$$-\sum_{p \in X}(mult_p F - 1) = (d-1)(2g_X - 2),$$

pero $-\sum_{p \in X}(mult_p F - 1) \leq 0$ y $(d-1)(2g_X - 2) \geq 0$ implica:

$$(d-1)(2g_X - 2) = 0$$

y como $g_X \geq 2$, entonces $d = 1$ y por el corolario 2.3, F es un isomorfismo.

3. *Si* $Y = \mathbb{P}^1$ *y* F *tiene grado al menos dos, entonces* F *es ramificada.* Como $g_{_{\mathbb{P}^1}} = 0$, entonces, por la fórmula de Riemann-Hurwitz, tenemos:
$$\begin{aligned}\sum_{p\in X}[mult_p(F)-1] &= (2g_{_X}-2)-gr(F)(-2)\\ &\geq 2g_{_X}-2+4\\ &\geq 2,\end{aligned}$$
por lo tanto, F es ramificada.
4. *Si* $g_{_X} = g_{_Y} = 1$*, entonces* F *no es ramificada.* Supongamos que $gr(F) = d$, el hecho de que $g_{_Y} = g_{_X} = 1$ y Riemann-Hurwitz, implican:
$$\begin{aligned}\sum_{p\in X}[mult_p(F)-1] &= 2g_{_X}-2-d(2g_{_Y}-2)\\ &= 2-2-d(2-2)\\ &= 0,\end{aligned}$$
de donde, F no es ramificada.

Como mencionamos al inicio de estas notas, nuestro objetivo era mostrar la fórmula de Riemann-Hurwitz y, como una aplicación, ver cómo esta induce propiedades restrictivas para aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann, sin embargo, esta solo es una de las tantas aplicaciones que tiene esta muy importante fórmula. Solo a manera de comentario, podemos mencionar otra importante aplicación de esta fórmula, el *Teorema de Hurwitz*, el cual afirma que el grupo de automorfismos de una superficie de Riemann compacta X y de género al menos dos es finito y que además:
$$|Aut(X)| \leq 84(g_{_X}-1).$$
Muchos libros tienen demostrado este resultado, en particular en el capítulo VII de [2] se puede encontrar una prueba.

La curva de Klein, dada por $x^3y + y^3z + z^3x = 0$ es un ejemplo (cuando la característica del campo es diferente de tres) de una superficie cuyo grupo de automorfismos alcanza la cota dada por el teorema de Hurwitz, es decir, es de orden $84(3-1) = 168$, la cual puede ser encontrada en «Ueber die Transformationen siebenter Ordung del elliptischn Funktionen», Math. Ann. 1879, Klein, F.

Bibliografía

[1] M. A. Armstrong, *Basic Topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, 1983.
[2] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society, 1995.

[3] G. Springer, *Introduction to Riemann Surfaces*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1957.