Miscelánea Matemática **80** (2025) 103-114 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.8008

Pongámonos de acuerdo con las votaciones

Rubén A. Martínez-Avendaño
Departamento Académico de Matemáticas
ITAM
ruben.martinez.avendano@gmail.com
y
Edgar Possani Espinosa
Departamento Académico de Matemáticas
ITAM
epossani@itam.mx

Cuando hay una elección entre solo dos candidatas, si no hay un empate, una de las dos obtiene al menos la mitad de los votos emitidos y no hay discusión sobre quién es la ganadora. ¿Qué pasa si hay tres o más candidatas? En esta nota daremos algunás ideas sobre las dificultades que surgen cuando hay más de dos candidatas.

1. Tres maneras de votar a tres candidatas

Supongamos que tenemos tres candidatas en unas votaciones: Ana, Beatriz y Carlos y que 29 personas van a votar por ellos. Las preferencias de estos votantes se resumen en el cuadro 1. Por ejemplo, en la primera línea del lado izquierdo del cuadro 1, dos votantes tienen a Ana como su primera opción, a Beatriz como su segunda opción y a Carlos como su tercera opción; denotamos esto como $A \succ B \succ C$, donde $x \succ y$ significa que la candidata x es preferida a la candidata y. Notemos por otro lado que 10 votantes prefieren a Carlos, después a Ana y por último a Beatriz; se denota esto con $C \succ A \succ B$, como se muestra en la segunda línea del lado derecho del mismo cuadro.

La manera más popular de decidir la elección es que cada votante le otorgue un voto a su opción más preferida y la ganadora es la candidata que obtiene más votos. En ese caso 5 personas dan su voto a Ana, 13 personas otorgan su voto a Beatriz, y 11 personas votan por Carlos. Usando este esquema de votación la ganadora sería Beatriz, en segundo

Palabras clave: métodos de votación, elecciones, preferencias.

Cuadro 1. Contabilidad de Preferencias.

Orden de Preferencias	Cantidad de Votantes	Orden de Preferencias	Cantidad de Votantes
$A \succ B \succ C$	2	$B \succ C \succ A$	5
$A \succ C \succ B$	3	$C \succ A \succ B$	10
$B \succ A \succ C$	8	$C \succ B \succ A$	1

lugar quedaría Carlos y el tercer lugar sería Ana. A esta forma de votar se le llama el *método de pluralidad*. Para resumir el resultado de esta votación empleamos la misma notación que usamos para las preferencias individuales; llamamos a esto la *preferencia de la población* y lo escribimos como:

$$B \succ C \succ A.$$

Una crítica que se le podría hacer al método de pluralidad es que no toma en cuenta las preferencias de segundo y tercer lugar de los votantes. Un manera alternativa de llevar a cabo la votación sería permitirle a cada votante que dé un voto a su primera opción y también un voto a su segunda opción, de tal suerte que no le otorgue votos a su opción menos preferida. En este caso Ana obtendría $2+3+8+10=23$ votos, mientras que Beatriz obtendría $2+8+5+1=16$ votos, y por último Carlos obtendría $3+5+10+1=19$ votos. En este caso la candidata más votada sería Ana, en segundo lugar Carlos y en tercer lugar Beatriz. A este método de contabilizar los votos se le llama el *método de antipluralidad*. En este caso el resultado de la votación se escribiría como:

$$A \succ C \succ B.$$

Una tercera manera de realizar la votación es que cada votante le asigne dos votos a su opción favorita y un voto a su segunda opción, dando cero votos a la opción menos preferida. En este caso Ana recibiría $2(2+3)+1(8+10)=28$, Beatriz recibiría $2(8+5)+1(2+1)=29$, mientras que Carlos recibiría $2(10+1)+1(3+5)=30$. A este método de asignar los votos se le llama el *conteo de Borda*. En este caso el primer lugar lo obtendría Carlos, el segundo Beatriz y el tercero Ana. Las preferencias para esta población de votantes bajo este tercer esquema se pueden ahora describir como:

$$C \succ B \succ A.$$

Como podemos ver, diferentes formas de votación pueden dar resultados radicalmente distintos aunque no se cambien las preferencias de los individuos de la población (recordemos que en los tres casos se usaron los mismos datos del cuadro 1).

2. Representando gráficamente las preferencias

La preferencias de los votantes se pueden representar gráficamente mediante un triángulo como el de la figura 1. Cada uno de los vértices del triángulo corresponde a una candidata. Recordemos que el cuadro 1 muestra los seis posibles casos de las preferencias de los votantes. Estos casos se representan en el triángulo mediante las seis regiones que se muestran en la figura 1. La región que está más cercana a cada vértice indica preferencia por la candidata de ese vértice. Notemos que hay dos regiones más cercanas a A, pintadas en colores parecidos (en amarillo). De esas dos regiones la más cercana a C, que tiene un número 3, indica que hay 3 votantes que prefieren A sobre C y a C sobre B. De la misma manera, la región que tiene el número 2 indica que hay 2 votantes que prefieren a A sobre B y a B sobre C. Equivalentemente, la región en color lila más cercana a C del lado derecho con un número 1 indica que C es preferido sobre B y B preferido sobre A.

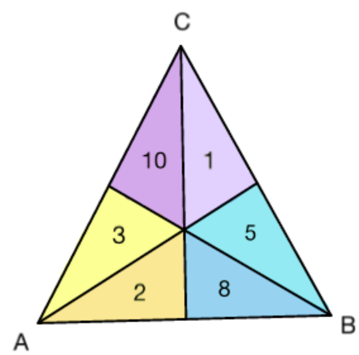

Figura 1. Representación de las preferencias.

Esta representación también se puede usar para contar los votos que se obtendrían usando el método de pluraridad. Como se ve en la figura 2, la candidata A recibe 5 votos, la candidata B recibe 13 votos, y el candidato C recibe 11 votos, que se contabilizan sumando el total de votantes más cercanos a ese vértice.

Para representar la contabilidad del método de antipluralidad podemos hacer algo similar. Solo que en este caso las regiones consideradas son las que se muestran en la figura 3, donde la candidata A recibe 23 votos, la candidata B 16 votos, y el candidato C 19 votos.

3. Función de bienestar social

Las tres maneras de contabilizar los votos vistas en la sección 1, se pueden generalizar mediante una función que reciba como entrada las

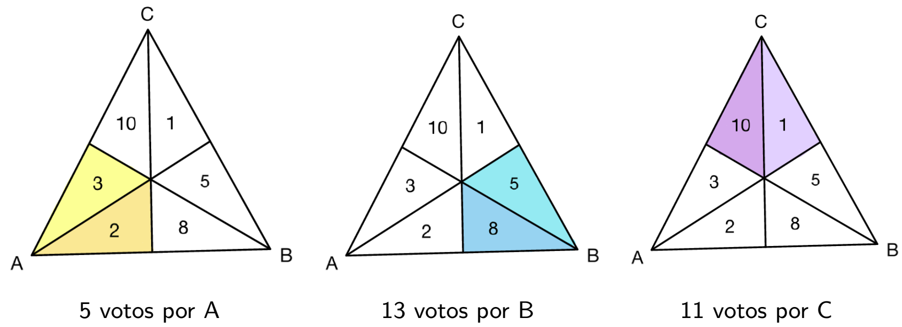

Figura 2. Método de pluralidad.

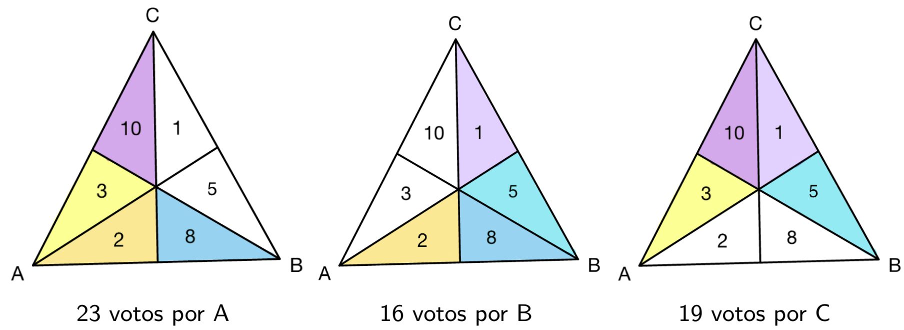

Figura 3. Método de antipluralidad.

preferencias de todos los votantes y como resultado se obtenga una lista ordenada de las candidatas que interpretamos como la preferencia de la población. En la literatura a esta función se le llama *función de bienestar social* (para mayor referencia consultar [1, 2, 3]).

Una forma de definir una función de bienestar social es la siguiente. Supongamos que tenemos un conjunto de tres candidatas $\mathcal{C} = \{A, B, C\}$. Fijemos tres números reales $w_1 \geq w_2 \geq w_3$ no todos iguales, de tal suerte que si un individuo tiene como preferencias $x \succ y \succ z$, donde $x, y, z \in \mathcal{C}$, entonces se le da w_1 votos a la candidata x, w_2 votos a la candidata y, y w_3 votos a la candidata z. Sea n el número total de votantes y $n(x, j)$ el número de personas que tienen a la candidata x en el lugar j de preferencia.

Por ejemplo, usando las preferencias descritas en el cuadro 1 tenemos que $n(B, 1) = 13$ porque 13 votantes tienen a Beatriz como primera opción, $n(A, 2) = 18$ ya que 18 votantes tienen a Ana como segunda opción; mientras que $n(C, 3) = 10$ ya que 10 votantes tienen a Carlos como tercera opción.

Para calcular el número de votos totales que recibe la candidata $x \in \mathcal{C}$, definimos $V_x(w_1, w_2, w_3)$ como

$$V_x(w_1, w_2, w_3) = w_1 n(x, 1) + w_2 n(x, 2) + w_3 n(x, 3).$$

En la lista ordenada que devuelve la función de bienestar social se tiene ordenada a la candidata x antes de la candidata y, denotado con $x \succ y$, si

$$V_x(w_1, w_2, w_3) > V_y(w_1, w_2, w_3).$$

En el caso de que $V_x(w_1, w_2, w_3) = V_y(w_1, w_2, w_3)$, decimos que no hay preferencia entre las candidatas x y y.

Para el conteo de Borda, tenemos que $w_1 = 2, w_2 = 1$, y $w_3 = 0$. Usando las preferencias del cuadro 1, tendríamos que

$$V_A(2, 1, 0) = 2(5) + 1(18) + 0(6) = 28,$$

de manera similar podemos ver que $V_B(2, 1, 0) = 29$, y $V_C(2, 1, 0) = 30$. Así que $V_C(2, 1, 0) > V_B(2, 1, 0) > V_A(2, 1, 0)$ por lo que el resultado de este método es que $C \succ B \succ A$.

En el método de antipluralidad los pesos son $w_1 = 1, w_2 = 1$ y $w_3 = 0$ lo que daría, usando el cuadro 1, que $V_A(1, 1, 0) = 23$, $V_B(1, 1, 0) = 16$, y $V_C(1, 1, 0) = 19$, así en este caso la función de bienestar nos da $A \succ C \succ B$.

Por último en el método de pluralidad se tiene que $w_1 = 1$, $w_2 = 0$ y $w_3 = 0$ que resulta en $V_A(1, 0, 0) = 5$, $V_B(1, 0, 0) = 13$ y $V_C(1, 0, 0) = 11$ concluyendo que bajo este método $B \succ C \succ A$.

4. Usemos un solo parámetro

En lugar de considerar los tres pesos w_1, w_2 y w_3, con $w_3 \leq w_2 \leq w_1$, no todos iguales, podemos simplicar el análisis al considerar un solo parámetro s. Notemos que n (el número total de votantes) es igual a $n(x, 1) + n(x, 2) + n(x, 3)$ para toda candidata x. Recordemos que la función de bienestar social nos da que la candidata x es preferida sobre la candidata y si y solo si

$$w_1 n(x, 1) + w_2 n(x, 2) + w_3 n(x, 3) > w_1 n(y, 1) + w_2 n(y, 2) + w_3 n(y, 3).$$

Al restar $w_3 n$ a ambos lados de la desigualdad esta es equivalente a

$$\begin{aligned}(w_1 - w_3)n(x, 1) + &(w_2 - w_3)n(x, 2) + 0\, n(x, 3) > \\ &(w_1 - w_3)n(y, 1) + (w_2 - w_3)n(y, 2) + 0\, n(y, 3).\end{aligned}$$

Dividiendo ambos lados por $(w_1 - w_3)$ y definiendo $s = \frac{w_2 - w_3}{w_1 - w_3}$ esta desigualdad es entonces equivalente a

$$1\, n(x, 1) + s\, n(x, 2) + 0\, n(x, 3) > 1\, n(y, 1) + s\, n(y, 2) + 0\, n(y, 3).$$

Es decir en lugar de usar los pesos w_1, w_2 y w_3 podemos usar los pesos $1, s$ y 0 para obtener el mismo resultado de la función de bienestar social. Además como $w_3 \leq w_2 \leq w_1$ entonces $0 \leq s \leq 1$.

Podemos denotar entonces al número total de votos que recibe una candidata $x \in \mathcal{C}$ por $V_x(s)$, de tal suerte que

$$V_x(s) = V_x(1, s, 0) = n(x, 1) + s\,n(x, 2)$$

con $s \in [0, 1]$. Es decir, el resultado de la votación depende de un solo parámetro s. Por ejemplo, con los datos presentados en el cuadro 1 tenemos que

$$\begin{aligned} V_A(s) &= 5 + 18s, \\ V_B(s) &= 13 + 3s, \\ V_C(s) &= 11 + 8s, \end{aligned}$$

y para determinar el resultado de la votación basta con evaluar estas funciones en un valor s.

Estas funciones se pueden graficar como se muestra en la figura 4, donde en el eje horizontal se muestran los valores de s y en eje vertical los valores de $V_x(s)$. Notemos que el resultado de la votación depende del valor de s. Por ejemplo si $0 \leq s < 2/5$ es claro que $B \succ C \succ A$, pues para estos valores de s, se tiene que $V_B(s) > V_C(s) > V_A(s)$. Si $2/5 < s < 8/15$ tenemos que $C \succ B \succ A$, mientras que si $8/15 < s < 3/5$ tenemos que $C \succ A \succ B$, y por último si $3/5 < s \leq 1$ resulta que $A \succ C \succ B$. Notemos que $s = 0$ corresponde al método de pluralidad, $s = 1/2$ al conteo de Borda y $s = 1$ al método de antipluralidad.

Es importante notar que esta situación donde las tres rectas se intersectan en tres puntos diferentes no siempre sucede. Esto depende de las preferencias de la población. ¿Puede el lector pensar en una distribución de preferencias de los votantes, diferente a la del cuadro 1, dónde las rectas se intersecten en menos de 3 puntos?

5. Representación en el simplejo

Notemos que cada votante tiene $w_1 + w_2 + w_3$ votos a repartir entre las tres candidatas, por lo que el total de votos emitidos por todos los votantes es $n(w_1 + w_2 + w_3)$. Por ejemplo, usando las preferencias del cuadro 1 y bajo el conteo de Borda, tenemos que $n = 29$ y $w_1+w_2+w_3 = 3$ así que el total de votos a repartir sería 3(29)= 87. Si pensamos en la proporción de votos que recibió la candidata A, esta recibió 28 de los 87 votos, la candidata B recibió 29 de los 87 votos, y el candidato C recibió 30 de 87 votos. Podemos representar esto mediante el punto

$$P = \left(\frac{28}{87}, \frac{29}{87}, \frac{30}{87}\right).$$

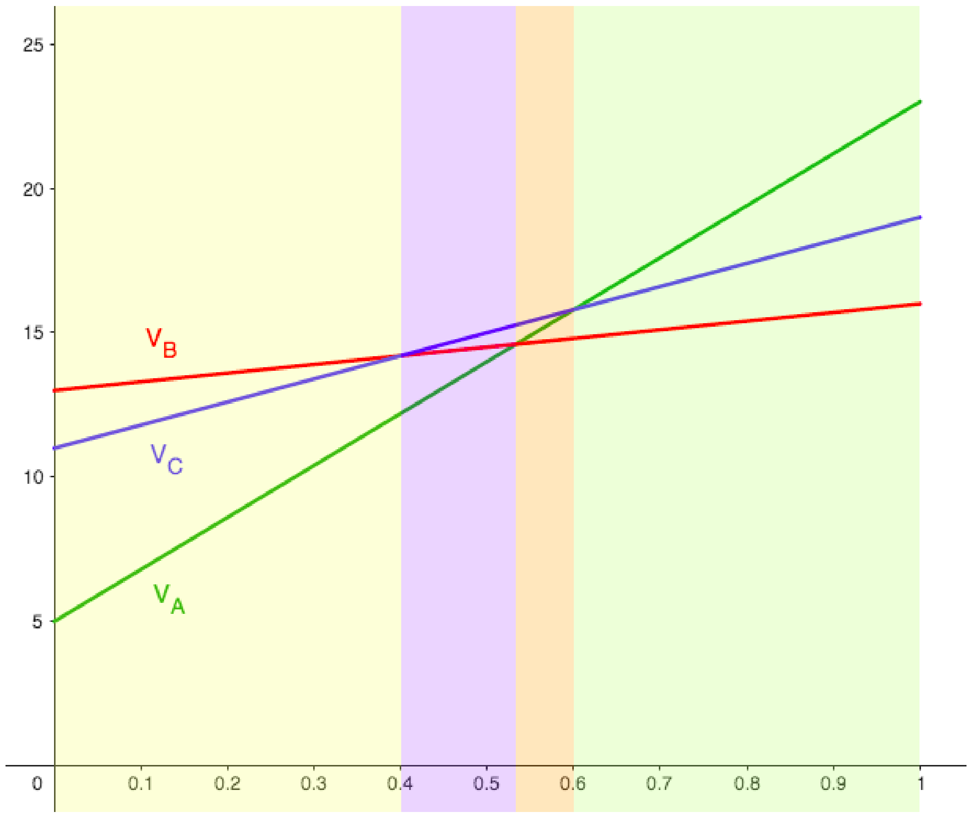

Figura 4. Representación de las preferencias.

Notemos que las coordenadas de este punto son no negativas y su suma es igual a uno. Podemos representar este punto en el simplejo

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\},$$

que es la parte del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante como se muestra en la figura 5. Análogamente si repetimos el proceso anterior con el método de pluralidad obtenemos el punto

$$R = \left(\frac{5}{29}, \frac{13}{29}, \frac{11}{29}\right),$$

mientras que si lo hacemos con el método de antipluralidad obtenemos el punto

$$Q = \left(\frac{23}{58}, \frac{16}{58}, \frac{19}{58}\right).$$

Podemos ver la posición de estos puntos en la figura 5.

Esta figura parece sugerir que el punto P está en el segmento de recta entre los puntos Q y R. Notemos que Q corresponde a $s = 1$, y que R corresponde a $s = 0$, mientras que P corresponde a $s = \frac{1}{2}$.

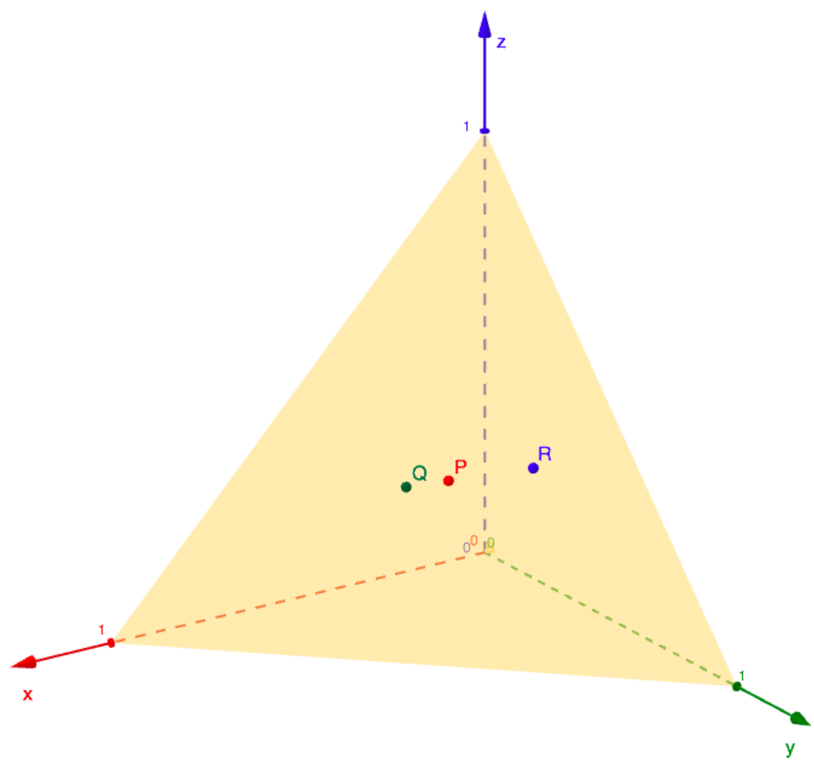

Figura 5. representación de los métodos de votación en $\mathcal{S}$.

En general, para cualesquiera preferencias de los votantes y cualquier valor de s, se puede calcular la proporción de votos que recibe cada uno de las candidatas y resumirlo en un punto en el simplejo, digamos $T(s)$, que es igual a

$$\left(\frac{V_A(s)}{V_A(s)+V_B(s)+V_C(s)}, \frac{V_B(s)}{V_A(s)+V_B(s)+V_C(s)}, \frac{V_C(s)}{V_A(s)+V_B(s)+V_C(s)}\right).$$

No es difícil verificar que si hacemos $\alpha = \frac{1-s}{1+s}$ entonces $0 \leq \alpha \leq 1$ y se cumple que $T(s) = \alpha T(0) + (1-\alpha)T(1)$, por lo que el punto $T(s)$ está en el segmento entre $T(0)$ y $T(1)$, para cualquier valor de s. Es decir, todos los posibles resultados de la votación para diferentes valores de s se encuentran en el segmento de recta que va de $T(0)$ a $T(1)$. En otras palabras, los resultados de cualquier votación están en el segmento entre el punto correspondiente al método de pluralidad y el punto correspondiente al de antipluralidad.

De lo antes visto, dado un valor de s obtenemos un punto en el simplejo. Nos gustaría poder saber, dada la localización del punto en el simplejo, cuál es el resultado de la votación. Esto lo podemos deducir de la cercanía del punto a las intersecciones de los ejes con el simplejo, es decir a los puntos: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Estas cercanías dividen al simplejo en seis regiones como se muestra en la figura 6. En esta figura también están localizados los puntos $P = T(\frac{1}{2})$, $Q = T(1)$ y $R = T(0)$ del ejemplo del cuadro 1.

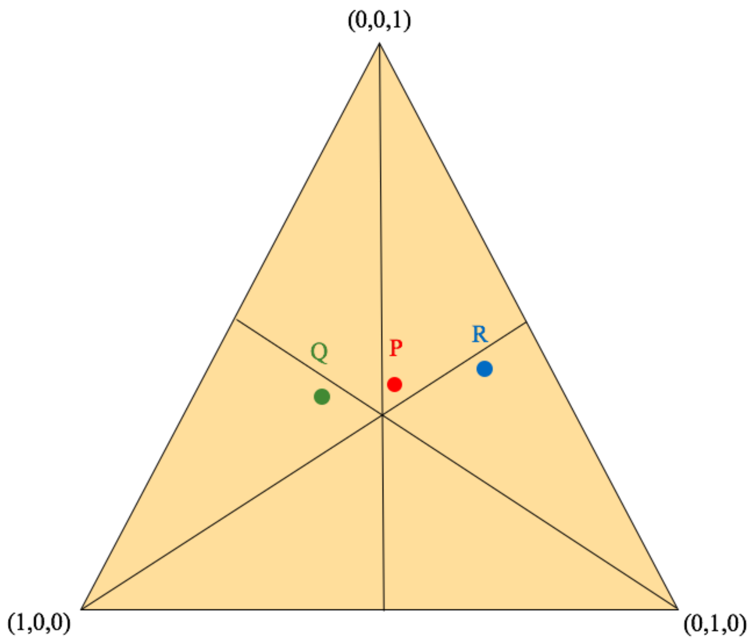

Figura 6. simplejo $\mathcal{S}$.

Similar a lo que tenemos en la figura 1, el vértice $(1,0,0)$ corresponde a la candidata A, el vértice $(0,1,0)$ a la candidata B y finalmente $(0,0,1)$ al candidato C. Notemos que la región donde está el punto Q es más cercana al vértice $(1,0,0)$, luego al vértice $(0,0,1)$ y más alejada del vértice $(0,1,0)$ de allí que el resultado de esta votación es $A \succ C \succ B$. De la misma forma la región donde está el punto P corresponde al resultado $C \succ B \succ A$, mientras que la región donde está el punto R se corresponde al resultado $B \succ C \succ A$.

Por lo antes visto, dado cualquier conjunto de preferencias, para encontrar el resultado de la votación basta con calcular $T(s)$ y ubicarlo en el simplejo. Si nos interesa ver qué tan diferentes pueden ser los resultados entonces podemos ubicar a $T(0)$ y $T(1)$ en el simplejo, y ver por cuáles regiones cruza el segmento que une ambos puntos. Se puede demostrar que cualquier segmento en el triángulo pasa por a lo más cuatro regiones de las seis regiones en las que dividimos el triángulo. Es decir, para algunas preferencias se pueden obtener hasta cuatro resultados diferentes, sin contar empates. El resultado para algunos casos puede variar considerablemente en base al método de votación empleado.

Habrá personas que crean que el método más sencillo y justo es el de pluralidad, el que corresponde a $s = 0$. Sin embargo, el análisis anterior nos muestra que dando un poquito más de importancia al voto por la segunda o tercera opción, los resultados pueden variar considerablemente. Esto permite asegurar que otros métodos de votación pueden ser igual de válidos. Incluso demostrar que para algunas preferencias (como las del cuadro 1) no es tan claro cuál deba ser el método que refleja el «deseo de la población» o si existe esa quimera.

6. ¿Qué pasa con más candidatas?

En la sección anterior vimos que si tenemos $m = 3$ candidatas existen preferencias de los votantes que pueden dar 4 diferentes resultados al usar diferentes pesos (métodos de votación).

Es natural preguntarse qué pasa si tenemos más de tres candidatas. Por ejemplo si $m = 4$ el conjunto de los resultados de la votación es un polígono convexo que vive en el simplejo

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\}.$$

Notemos que hay $4! = 24$ diferentes maneras de ordenar a las cuatro candidatas. De hecho se puede dividir al simplejo en 24 regiones para distinguir estos diferentes resultados. Para este caso se pueden encontrar un conjunto de votantes con ciertas preferencias para los cuáles se obtienen hasta 18 posibles resultados en base en la elección de los pesos (método de votación). Sin embargo no existe un conjunto de votantes con sus preferencias que permitan obtener más de 18 resultados diferentes, sin contar empates.

Notemos que en el caso $m = 3$ hay $3!$ regiones y a lo más $3! - 2!$ posibles resultados en función de los pesos, y para $m = 4$ hay $4!$ regiones y $4! - 3!$ posibles resultados para distintos pesos. Saari [6] ha demostrado el siguiente teorema que generaliza este hecho para un número arbitrario de candidatas.

Teorema 6.1. *Supongamos que tenemos una elección de m candidatas. Para cualquier entero k entre 1 y $m! - (m-1)!$ existe un conjunto de votantes con ciertas preferencias para los cuáles se obtienen k diferentes resultados al elegir ciertos pesos. Además no existe un conjunto de votantes cuyas preferencias den más de $m! - (m-1)!$ resultados diferentes.*

7. ¿Qué otro método de votación podemos usar?

En las secciones anteriores vimos que el resultado de la votación depende tanto de las preferencias, como de los pesos elegidos. Un método alternativo para llevar a cabo las votación, propuesto por el Marqués de Condorcet, es comparar pares de candidatas para decidir la ganadora.

Por ejemplo, con las preferencias del cuadro 1, si solo consideramos a Ana y Beatriz, hay 15 votantes que prefieren a Ana sobre Beatriz y 14 que prefieren a Beatriz sobre Ana. Es decir este método daría $A \succ B$. Por otro lado si solo compitieran Ana y Carlos, Ana obtendría 13 votos mientras que Carlos obtendría 16. En este caso $C \succ A$. Entonces si este método fuera razonable y las únicas candidatas fueran Beatriz y Carlos, ya que $C \succ A$ y $A \succ B$, esperaríamos que Carlos fuese preferido sobre Beatriz. Sin embargo, al contabilizar los votos, usando el cuadro 1, vemos que Beatriz obtendría 15 votos y Carlos 14 votos, es decir $B \succ C$. Por lo que aunque este método parece razonable de entrada, resulta que no siempre lo es.

Es natural preguntarse sobre cuál sería el método más bondadoso, que representase fielmente las preferencias. Arrow [1] sugirió una lista de condiciones que una función de bienestar social debería cumplir para representar de manera consistente las preferencias de los votantes. Sin embargo, el mismo Arrow demostró que no existe un función que las cumpla[1].

La descripción de estas condiciones de Arrow se salen del objetivo de este artículo. En las últimas décadas se han tratado de proponer condiciones alternativas que permitan proponer métodos que sean fieles a las preferencias. Un resultado interesante es el de Saari que demuestra que el método de Borda cumple una serie de condiciones que un buen método debe cumplir para ser razonable. De hecho, demuestra que es el único método de votación con pesos que las cumple [5].

Para el lector interesado en aprender más de estos temas sugerimos consultar los textos [2, 3, 4, 5, 6].

Bibliografía

[1] K. J. Arrow, *Social Choice and Individual Values*, Cowles Commission Monograph, vol. 12, John Wiley & Sons, Inc., New York; Chapman & Hall, Ltd., London, 1951.

[2] J. K. Hodge y R. E. Klima, *The mathematics of voting and elections: a hands-on approach*, 2.ª ed., Mathematical World, vol. 30, American Mathematical Society, Providence, RI, 2018, https://doi.org/10.1090/mawrld/030.

[3] D. G. Saari, *Basic geometry of voting*, Springer-Verlag, Berlin, 1995, https://doi.org/10.1007/978-3-642-57748-2.

[1] Arrow ganó el premio Nobel de Economía en 1972, entre otras cosas, por este trabajo.

[4] ______, *Chaotic elections!*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, A mathematician looks at voting.
[5] ______, *Decisions and elections*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001, https://doi.org/10.1017/CBO9780511606076.
[6] ______, *Disposing dictators, demystifying voting paradoxes*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008, https://doi.org/10.1017/CBO9780511754265.