

# Tráfico vehicular: ejemplo de un sistema disipativo en el espacio fase

Patricia Saavedra

Depto. de Matemáticas

psb@xanum.uam.mx y

Rosa María Velasco

Depto. de Física

rmvb@xanum.uam.mx

UAM-Iztapalapa

## Resumen

Este artículo tiene como objetivo presentar de forma accesible el comportamiento cualitativo del tráfico vehicular a través del modelo de Kerner-Konhäuser. Este modelo consiste de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, similar a las ecuaciones de un flujo viscoso compresible, al que se le agrega un término de relajación que depende del diagrama fundamental de Greenshields. En el desarrollo de este trabajo se establece una analogía con un sistema disipativo que, al ser analizado como un sistema dinámico, nos permite concluir la existencia de soluciones tipo onda viajera en el problema de tráfico.

## 1. Introducción

El estudio del tráfico vehicular en carreteras y ciudades continúa siendo un reto para los urbanistas y los gobiernos de las grandes ciudades. Los problemas que se derivan de los congestionamientos de tráfico afectan la salud, la productividad y el bienestar de todos los habitantes. A pesar de que su estudio se inició en los años treinta del siglo XX, aún no se cuenta con modelos satisfactorios que expliquen algunas de las características del tráfico congestionado como son la aparición de embotellamientos fantasma, en los que se observa una reducción de la velocidad promedio sin causa aparente, o la sincronización de dos carriles, por lo que su estudio sigue siendo un tema relevante de investigación. Además de

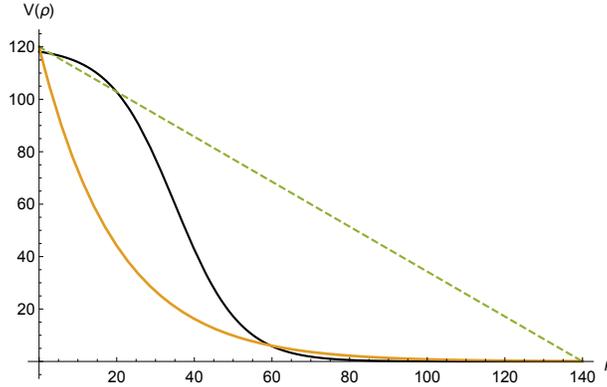
su interés pragmático, es importante resaltar que algunos aspectos del tráfico vehicular pueden estudiarse con las herramientas matemáticas usuales, que aprenden los estudiantes de las licenciaturas de física y matemáticas como son las ecuaciones diferenciales y la mecánica clásica. Por lo que utilizando conceptos de estos cursos, se busca con este texto interesar a los alumnos de licenciatura y posgrado en profundizar este tema.

Las variables fundamentales que nos permiten describir el tráfico vehicular son: la densidad  $\rho$  y la velocidad  $V$ . La primera nos indica el número de automóviles por km (veh/km) que hay en un tramo de carretera y la segunda la velocidad (km/h) a la que circulan en dicho tramo. Otra variable importante es el flujo  $Q = \rho V$  que nos describe el número de automóviles por hora (veh/h). Por medio de los datos recopilados en carreteras, se ha establecido una relación entre la velocidad deseada  $V_e(\rho)$  por los conductores y la densidad que se conoce con el nombre de diagrama fundamental. La primera propuesta para describir esta relación era lineal y se debe a Greenshields, quien, en 1930, observó que a densidades cercanas a cero, los conductores podían circular a la velocidad máxima y a medida que la densidad se incrementaba, la velocidad disminuía a cero, ver [5]. A partir de esa fecha, han aparecido en la literatura cerca de cinco o seis diagramas fundamentales distintos; actualmente, el más popular es el de Kerner-Konh user que fue propuesto en 1994 y que se obtuvo al ajustar por mínimos cuadrados no lineales mediciones obtenidas en las carreteras alemanas. Todos los diagramas fundamentales proponen funciones decrecientes respecto a la densidad, a continuación se presentan algunos de ellos: el primero es el de Greenshields  $V_e(\rho)$ , enseguida el de Newell  $V_e^N(\rho)$  y por último el de Kerner-Konh user  $V_e^K(\rho)$

$$\begin{aligned} V_e(\rho) &= V_{max} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{max}} \right), \\ V_e^N(\rho) &= V_{max} \exp(-\lambda\rho), \\ V_e^K(\rho) &= V_{max} \left( -3.72 \times 10^{-6} + \left[ 1 + \exp \left( \frac{\frac{\rho}{\rho_{max}} - 0.25}{0.06} \right) \right]^{-1} \right), \end{aligned}$$

con  $V_{max}$  y  $\rho_{max}$  la velocidad y la densidad máxima respectivamente y  $\lambda > 0$  un parámetro que se ajusta a los datos.

Los problemas de tráfico son tan complejos que se han estudiado desde puntos de vista muy distintos: el discreto, con los modelos microscópicos, que hace una analogía entre los autos y las partículas. A través de las leyes de Newton y mediante reglas locales de evolución temporal, buscan describir su comportamiento dinámico y se dan algunas reglas probabilistas que permiten la interacción entre los autos,



**Figura 1.** Diagrama fundamental. La curva negra corresponde a  $V_e^K(\rho)$ , la clara a  $V_e^N(\rho)$  y la punteada  $V_e(\rho)$ .

como, por ejemplo, el que un auto rebasa a otro, ver [2]. La ventaja de estos modelos es su sencillez, pero su mayor inconveniente es su costo computacional. Este problema se superó en la década de los noventa con el uso de autómatas celulares, ver [10]. Por otro lado, los modelos macroscópicos buscan describir el comportamiento promedio de las variables fundamentales asumiendo que el flujo en carreteras se comporta como un medio continuo. En este enfoque hay dos modelos distintos: el primero es fenomenológico y establece una analogía entre el tráfico vehicular y el comportamiento de un flujo viscoso compresible que incorpora el comportamiento de los conductores a través de un término de relajación [12], [8] y [9]; el otro enfoque utiliza una analogía con la teoría cinética de gases, en particular el modelo de Pavleri-Fontana, ver [16].

En este trabajo presentaremos el modelo macroscópico de tráfico vehicular de Kerner-Konhäuser junto con el diagrama fundamental de Greenshields. Las variables principales son la densidad  $\rho(x, t)$  y la velocidad  $V(x, t)$  que satisfacen un sistema no lineal de ecuaciones en derivadas parciales (EDP) [7], [6]. Para ser más precisos, consideremos una carretera circular o una gran porción de carretera en la que no haya entradas ni salidas de autos, lo que nos permite asegurar que en dicho tramo el número de vehículos  $N$  permanece constante [14], entonces se satisface la siguiente ecuación de conservación:

$$N = \int_{x_2}^{x_1} \rho(x, t) dx$$

con  $L = x_1 - x_2$  la longitud de la carretera. Usaremos la versión diferencial de esta ecuación en la descripción Euleriana, que se conoce con el nombre de ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = 0, \quad (1)$$

con  $Q(x, t) = \rho(x, t)V(x, t)$  representando el flujo de vehículos.

Por otro lado, la velocidad promedio  $V(x, t)$  satisface la siguiente ecuación de balance

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V^2 + \mathcal{P}) = \frac{\rho}{\tau}(V_e(\rho) - V), \quad (2)$$

donde a  $\mathcal{P}(\rho, V, \frac{\partial V}{\partial x})$  se le llama la presión de tráfico y su forma puede modificarse de un modelo a otro. Podemos observar que ambas ecuaciones son no lineales y están acopladas. El término de la derecha de la segunda ecuación es el término de relajación que depende del diagrama fundamental  $V_e(\rho)$  y de un parámetro  $\tau$  que es el tiempo de relajación. Su objetivo es incorporar al modelo el comportamiento de los conductores que disminuyen su velocidad si rebasan la velocidad deseada  $V_e(\rho)$  o la incrementan si están por debajo de ella.

Este sistema debe complementarse con condiciones iniciales y de frontera adecuadas al problema que se quiere modelar. Por ejemplo, si la carretera es un circuito, sin entradas y salidas, las condiciones de frontera son periódicas tanto para la densidad como para la velocidad, es decir

$$\rho(0, t) = \rho(L, t), \quad V(0, t) = V(L, t),$$

mientras que las condiciones iniciales son de la forma  $\rho(x, 0) = \phi(x)$  y  $V(x, 0) = \varphi(x)$ , con  $\phi(x)$  y  $\varphi(x)$  funciones continuas. También se puede definir el problema en una región no acotada en la que las condiciones de frontera sean de la forma

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \rho(x, t) = \rho_0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x, t) = V_0 \quad (3)$$

y las condiciones iniciales, similares al caso anterior, con funciones  $\phi(x)$  y  $\varphi(x)$  acotadas y continuas en todo los reales.

Observemos que el sistema general, sin tomar en cuenta condiciones iniciales y de frontera, admite soluciones homogéneas:  $(\rho_0, V_e(\rho_0))$  con  $\rho_0 \in [0, \rho_{max}]$  y estamos interesados en estudiar la estabilidad de este tipo de soluciones. Si perturbamos la solución, ¿qué sucede a lo largo del tiempo? ¿La perturbación desaparece o se amplifica? Hay dos enfoques para estudiar este problema: uno aplicando sistemas dinámicos, siempre y cuando puedan transformarse las ecuaciones (1, 2) a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, y otro que consiste en perturbar la solución con una onda plana y analizar la estabilidad del problema linealizado. El primer enfoque ha sido utilizado en la literatura especializada en tráfico vehicular por [13] y [15], aprovechando la estructura de las ecuaciones (1, 2). Al aplicar el cambio de variable  $\xi = x + V_g t$ , el problema se reduce a una ecuación diferencial de segundo orden no lineal. Desde el punto de vista físico, esto equivale a cambiar el marco

de referencia fijo a uno que se mueve, junto con el sistema de referencia, hacia a la izquierda a velocidad constante  $-V_g$ .

El contenido de este artículo es el siguiente: en la sección 2 se aplica el cambio de variable  $\xi = x + V_g t$  para reducir el sistema (1, 2) a una ecuación diferencial de segundo orden que nos permite establecer una analogía con el movimiento de una partícula, posteriormente se adimensionaliza la ecuación. En la sección 3 se transforma el problema a un sistema no lineal de EDO de primer orden para analizar la estabilidad de las soluciones homogéneas desde el punto de vista de sistemas dinámicos. En la sección 4 se muestra que, para ciertos valores de los parámetros, el sistema tiene puntos de bifurcación del tipo Hopf y Takens-Bogdanov lo que nos permite asegurar la existencia de ciclos límite y órbitas homoclínicas en una vecindad de ellos. Los ciclos límite corresponden a soluciones periódicas del sistema de EDO no lineal. Bajo ciertas condiciones de conmensurabilidad, estas soluciones son soluciones tipo onda viajera de la EDP con condiciones de frontera periódicas o en forma de pulso. Finalmente, en la sección 5 se dan algunas conclusiones y observaciones finales.

## 2. Analogía con el movimiento de una partícula

Para comenzar consideremos las ecuaciones (1, 2) y expresemos la presión de tráfico en términos de la densidad y la velocidad, es decir

$$\mathcal{P} = \rho\Theta(\rho, V) - \eta(\rho, v)\frac{\partial V}{\partial x} \quad (4)$$

con  $\Theta(\rho, V)$  la varianza de la velocidad y  $\eta(\rho, V)$  una cantidad análoga a la viscosidad, en este modelo consideraremos a ambas cantidades como constantes. La presión de tráfico juega un papel similar al tensor de presión en la hidrodinámica clásica, mientras que  $\rho\Theta$  es el análogo a la presión hidrostática y  $\eta\frac{\partial V}{\partial x}$  corresponde a la contribución del tensor de viscosidad. Substituyendo la presión de tráfico en las ecuaciones (1, 2) comprobamos que  $(\rho_e, V_e(\rho_e))$ , con  $\rho_e$  constante, es una solución exacta que representa soluciones de tipo homogéneo ya que tanto la densidad como la velocidad son independientes de  $(x, t)$ .

Consideremos el caso cuando se hace el siguiente cambio de variable

$$\xi = x + V_g t. \quad (5)$$

La ecuación de continuidad (1) se transforma a  $\frac{d}{d\xi}(\rho(V + V_g)) = 0$  que al integrarla se obtiene

$$\rho = \frac{Q_g}{(V + V_g)}, \quad (6)$$

flujo de tráfico	analogía partícula
$\xi$	$t$ tiempo
$V(\xi)$	$x(t)$ posición
$\mathcal{M}(V; v_g, Q_g)$	$m$ masa
$\mathcal{D}(V; V_g, Q_g)$	$\alpha$ fricción lineal
$\mathcal{F}(V; v_g, Q_g)$	$F(x)$ campo de fuerza
$\mathcal{U}(V; V_g, Q_g)$	$U(x)$ potencial

**Cuadro 1.** Analogía entre las variables de tráfico y el movimiento de una partícula en mecánica clásica.

con  $Q_g$  la constante de integración, ver [13]. Esto permite desacoplar las ecuaciones y reducir la dinámica a la ecuación de velocidad. Al hacer el cambio de variable (5) en la ecuación para la velocidad, al substituir (6) se obtiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\mathcal{M}(V; V_g, Q_g) \frac{d^2V}{d\xi^2} + \mathcal{D}(V; V_g, Q_g) \frac{dV}{d\xi} = \mathcal{F}(V; V_g, Q_g), \quad (7)$$

con  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{F}$  funciones de  $V$  y de los parámetros  $V_g$  y  $Q_g$ . Note que la presión de tráfico que aparece en la ecuación (4) se simplifica ya que solo depende de la velocidad.

Si observamos con cuidado la ecuación (7), ésta se puede interpretar como la ecuación de movimiento de una partícula en un campo de fuerza unidimensional  $\mathcal{F}$  que es derivable de un potencial  $\mathcal{U}$ . De hecho, esta ecuación representa la segunda Ley de Newton para una partícula descrita en términos de la velocidad promedio de los autos, en lugar de la manera usual que es respecto a las coordenadas de la posición. La analogía completa se describe en el cuadro 1. Entonces es natural analizar este problema con las herramientas de la mecánica clásica. Con objeto de que los cálculos sean más sencillos e ilustrativos, en este trabajo se considera el diagrama fundamental de Greenshields [5] que al escribirlo en términos de la velocidad se expresa por

$$V_e(V) = V_{max} \left( 1 - \frac{Q_g}{\rho_{max}(V + V_g)} \right), \quad (8)$$

con  $V_{max}$ ,  $\rho_{max}$  la velocidad y densidad máxima, respectivamente, cuyos valores numéricos serán especificados más adelante. Identifiquemos las

propiedades de una partícula en términos de este modelo que denotaremos por modelo (KKG) y estudiemos la dinámica del tráfico vehicular,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(V; V_g, Q_g) &= \frac{\eta_0}{Q_g}(V + V_g), \\ \mathcal{D}(V; V_g, Q_g) &= (V + V_g) \left[ \frac{\Theta_0}{(V + V_g)^2} - 1 \right], \\ \mathcal{F}(V; V_g, Q_g) &= \frac{1}{\tau} \left[ V_{max} \left( 1 - \frac{Q_g}{\rho_{max}(V + V_g)} \right) - V \right].\end{aligned}\quad (9)$$

Con el fin de reducir el número de parámetros procedemos a adimensionalizar la ecuación (7). Se definen las siguientes variables y constantes adimensionales

$$\begin{aligned}z &= \rho_{max}\xi, & v &= \frac{V}{V_{max}}, & v_g &= \frac{V_g}{V_{max}}, \\ q_g &= \frac{Q_g}{\rho_{max}V_{max}}, & v_e(v) &= \frac{V_e(V)}{V_{max}}.\end{aligned}\quad (10)$$

Al dividir entre la masa  $\mathcal{M}$  las ecuaciones adimensionadas, la ecuación diferencial (7) se reduce a

$$\frac{d^2v}{dz^2} - \Gamma(v; v_g, q_g) \frac{dv}{dz} = f(v; v_g, q_g).\quad (11)$$

La fuerza por unidad de masa  $f(v; v_g, q_g) = \mathcal{F}/\mathcal{M}$  se puede suponer que proviene de un potencial  $U$ , es decir  $f(v; v_g, q_g) = -\frac{dU}{dv}$ , con  $U(v; v_g, q_g)$  una función que depende de  $v$  y de los parámetros  $v_g, q_g$ . Por último, el coeficiente de fricción es  $\Gamma(v; v_g, q_g) = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{M}}$ . La interpretación de  $\Gamma(v; v_g, q_g)$  como un término de fricción puede aclararse mejor al considerar la ecuación de la energía total. Para ello, la ecuación (11) se multiplica por  $y = dv/dz$  y se integra para definir la energía total como

$$\mathcal{E} = \frac{y^2}{2} + U,$$

donde  $y^2$  corresponde a la energía cinética y  $U$  es el potencial cuya derivada nos da la fuerza externa por unidad de masa. Entonces

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = \Gamma y^2.$$

Observemos que la energía se incrementa cuando  $\Gamma > 0$  y disminuye cuando  $\Gamma < 0$ , por lo que la función  $\Gamma$  actúa realmente como una fricción. Es este comportamiento el que físicamente proporciona la riqueza al sistema, como veremos más adelante.

La expresión explícita de estas cantidades se obtiene al adimensionalizar el diagrama fundamental de Greenshields que da lugar a la siguiente

expresión

$$v_e(v) = 1 - \frac{q_g}{(v + v_g)}. \quad (12)$$

Introduzcamos los siguientes parámetros adimensionales a nuestro problema

$$\theta_0 = \frac{\Theta_0}{V_{max}^2}, \quad a = \frac{Q_g}{\rho_{max}\eta_0}, \quad b = \frac{Q_g}{\rho_{max}^2\eta_0\tau V_{max}}.$$

Asignemos los siguientes valores a los parámetros del modelo de Kerner-Konhäuser:  $\Theta_0 = (45 \text{ km/h})^2$ ,  $\tau = 30 \text{ s}$ ,  $\eta_0 = 600 \text{ km/h}$ . Además, consideremos que  $\rho_{max} = 140 \text{ veh/km}$  y  $v_{max} = 120 \text{ km/h}$ .

Entonces la ecuación de movimiento (11) para este caso particular es de la forma:

$$\frac{d^2v}{dz^2} - a \left[ 1 - \frac{\theta_0}{(v + v_g)^2} \right] \frac{dv}{dz} + b \left[ \frac{v_e(v) - v}{v + v_g} \right] = 0, \quad (13)$$

donde todos los parámetros están escritos como cantidades adimensionales.

### 3. Análisis en el espacio fase

La no linealidad de la ecuación (13) nos impide resolverla en forma analítica, por lo que usaremos sistemas dinámicos para analizar el comportamiento cualitativo de las soluciones. Para ello, transformemos la ecuación a un sistema no lineal de dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\frac{dv}{dz} = y, \quad (14)$$

$$\frac{dy}{dz} = a \left[ 1 - \frac{\theta_0}{(v + v_g)^2} \right] y + b \left[ \frac{v - v_e(v)}{v + v_g} \right]. \quad (15)$$

Ahora para cada par de parámetros  $(v_g, q_g)$  se tiene un sistema dinámico en el plano fase con respecto a las variables  $(v, y)$ . Para seguir haciendo una analogía con el movimiento de una partícula en un campo de fuerza, se denotan las siguientes funciones :

$$\Gamma(v; v_g, q_g) = a \left[ 1 - \frac{\theta_0}{(v + v_g)^2} \right] \quad (16)$$

$$f(v; v_g, q_g) = b \left[ \frac{v - v_e(v)}{v + v_g} \right],$$

con  $\Gamma(v; v_g, q_g)$  que representa la fricción por unidad de masa y  $f(v; v_g, q_g)$  la aceleración externa.

Los puntos críticos o de equilibrio del sistema (14, 15) se obtienen al igualar las derivadas a cero, lo que da lugar a  $y = 0$ ,  $\Gamma y + f = 0$  que

se satisface cuando  $y = 0$  y  $f(v_c; v_g, q_g) = 0$ . Esto último implica que el punto de equilibrio debe ser un punto fijo de  $v_e(v)$ , es decir:

$$v_e(v) = v.$$

Al usar el diagrama fundamental de Greenshields (12) entonces los puntos críticos son de la forma  $(v_c, 0)$  donde

$$v_c^\pm = \frac{1}{2} \left[ 1 - v_g \pm \sqrt{(1 - v_g)^2 - 4(q_g - v_g)} \right], \quad (17)$$

dependen totalmente del diagrama fundamental y de los parámetros  $(v_g, q_g)$ . Observemos que el sistema puede tener dos, uno o ningún punto crítico. En los ejemplos mostraremos cómo cambian las trayectorias en el espacio fase dependiendo del número de puntos críticos.

Recordemos que la estabilidad de los puntos críticos del problema linealizado implica estabilidad de los puntos críticos del problema no lineal, siempre que los valores propios tengan parte real distinta de cero, o sea cuando son puntos críticos hiperbólicos. Calculemos, entonces, los valores propios del sistema (14, 15) linealizado alrededor de los puntos  $(v_c, 0)$

$$\frac{dv}{dz} = y, \quad (18)$$

$$\frac{dy}{dz} = b \left[ \frac{(1 - v'_e(v_c))}{(v_c + v_g)} \right] v + a \left[ 1 - \frac{\theta_0}{(v_c + v_g)^2} \right] y, \quad (19)$$

que son de la forma

$$\lambda^\pm(v_c; v_g, q_g) = \frac{1}{2} \left( \Gamma(v_c; v_g, q_g) \pm \sqrt{\Gamma^2(v_c; v_g, q_g) + 4K(v_c; v_g, q_g)} \right), \quad (20)$$

con  $\Gamma$  igual a la expresión (16) y denotando por  $K(v; v_g, q_g)$  a la siguiente cantidad

$$K(v_c; v_g, q_g) = \frac{b(1 - v'_e(v_c))}{(v_c + v_g)},$$

que se relaciona con el potencial  $U$  de la siguiente manera:

$$\frac{d^2U(v, v_g, q_g)}{dv^2} = -K(v_c, q_g, v_g). \quad (21)$$

Es importante hacer notar que el término de fricción (16) determina la estabilidad de los puntos críticos. Los puntos críticos son estables si los valores propios tienen parte real negativa,  $\Gamma < 0$ , e inestables si  $\Gamma > 0$ . Por lo que son estables si la energía se pierde o sea cuando el sistema es disipativo e inestables en otro caso. Esto nos permite clasificar los puntos críticos en puntos silla que tienen valores propios con parte real de distinto signo, en nodos estables o inestables si los valores propios son reales negativos o positivos, respectivamente, y en

espirales estables o inestables si los valores propios son complejos y la parte real es negativa o positiva, respectivamente. También el potencial  $U(v; v_g, q_g)$  juega un papel importante ya que los puntos críticos son aquellos puntos en los que la fuerza se anula. Además, estos puntos son extremos del potencial  $U$  y los puntos máximos corresponden a puntos silla mientras que los mínimos corresponden a nodos o espirales.

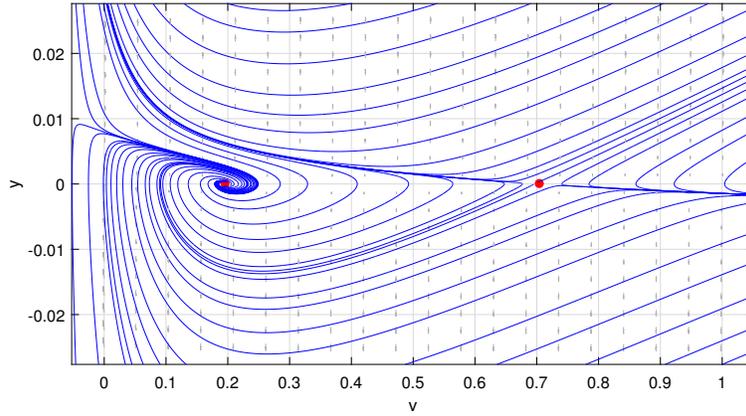
Algunos ejemplos numéricos de puntos críticos hiperbólicos y de su estabilidad se presentan en el cuadro 2. Los puntos críticos son de la forma  $(v_c, 0)$  con  $0 \leq v_c \leq 1$  porque los vehículos circulan hacia la derecha, (es decir en la dirección positiva del eje  $z$ ), mientras que  $-1 \leq v_g \leq 1$  y  $-1 \leq q_g \leq 1$  debido a la adimensionalización de las variables y que los parámetros se imponen externamente. Note que el valor de  $v_{c1}$  en el primer ejemplo del cuadro 2 no es físicamente posible por ser negativo, situación que nos indicaría un estado en el que los vehículos circulan hacia la parte negativa del eje  $z$ . Cabe señalar que cuando el valor de  $q_g$  se incrementa mucho respecto al valor de  $v_g$  no hay puntos críticos. Observe que en todos los ejemplos el punto  $(v_{c1}, 0)$  es una espiral estable, que corresponde a un mínimo del potencial, mientras que  $(v_{c2}, 0)$  es un punto silla o sea un máximo del potencial.

$q_g$	$v_g$	$v_{c1}$	Estabilidad	$v_{c2}$	Estabilidad
0.0952	0.1	-0.0053	espiral estable	0.9053	punto silla
0.1666	0.1	0.0814	espiral estable	0.8174	punto silla
0.2380	0.1	0.1962	espiral estable	0.7037	punto silla
0.1666	-0.1	0.3607	espiral estable	0.7390	punto silla

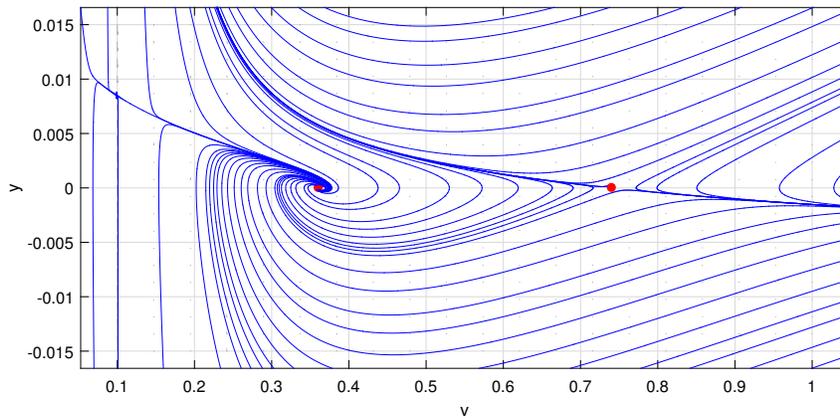
**Cuadro 2.** Ejemplos de los puntos de equilibrio  $(v_{c1}, 0)$  y  $(v_{c2}, 0)$  asociados al sistema linealizado para valores específicos de  $v_g$  y  $q_g$ .

### Retrato fase

Los resultados presentados en el cuadro 2 nos dan una idea del comportamiento de los puntos críticos del sistema dinámico; sin embargo, una imagen dice más que mil palabras y queremos mostrar, para algunos de los casos presentados anteriormente, como se ven las trayectorias en el plano fase. En la figura 2 se muestra el plano fase asociado al tercer ejemplo del cuadro 2. Los dos puntos que se ven con claridad corresponden a los dos puntos críticos, el más cercano al origen  $(v_{c1}, 0)$



**Figura 2.** Trayectorias para  $v_g = 0.1$ ,  $q_g = 0.238095$ .



**Figura 3.** Trayectorias para  $v_g = -0.1$ ,  $q_g = 0.16666$ .

es una espiral estable mientras que el punto  $(v_{c2}, 0)$  es un punto silla. Las órbitas que terminan en el punto  $(v_{c1}, 0)$  se dirigen hacia ese punto, dado que es estable. En cambio las órbitas que están cercanas al punto silla, algunas se dirigen hacia el punto mientras otras se alejan del mismo. Observe que los puntos críticos están conectados por una órbita heteroclínica, es decir una órbita que tiende asintóticamente a dos puntos distintos cuando  $z \rightarrow \pm\infty$ . Lo mismo se observa en la figura 3 que corresponde al plano fase asociado al cuarto ejemplo del cuadro 2. El espacio fase se graficó en el intervalo  $0.1 < v \leq 1.0$  para impedir que la densidad sea negativa y dado que  $v_g < 0$ , el marco de referencia viaja a lo largo de la carretera en la misma dirección que los automóviles. Se observa la presencia tanto de los puntos críticos como de la órbita heteroclínica.

## 4. Puntos de bifurcación

Llamamos puntos críticos de bifurcación aquellos puntos en los que cambia la estabilidad del sistema, es decir que la parte real de sus valores propios es igual a cero. Observemos que la parte real del valor propio es igual a cero si  $\Gamma(v_c; v_g, q_g) = 0$ , lo que implica que cuando el parámetro  $\theta_0 = (v_c + v_g)^2$  en (18) hay cambios en la estabilidad del sistema por lo que  $\theta_0$  es un parámetro de bifurcación. Entre los puntos de bifurcación que nos interesan están aquellos cuyos valores propios son puramente imaginarios o con un valor propio igual a cero de multiplicidad dos. Los primeros se conocen como puntos de bifurcación de Hopf mientras que los segundos se denominan de Takens-Bogdanov. Ambos puntos son importantes porque, en una vecindad de ellos, podemos asegurar la existencia de soluciones distintas a las soluciones de equilibrio; por ejemplo, la existencia de ciclos límites, que son órbitas cerradas en el plano fase, o de órbitas homoclínicas que se inician y terminan en el mismo punto crítico. Las primeras corresponden a soluciones periódicas del sistema de EDO no lineal (14, 15) mientras que las segundas son soluciones definidas en todos los reales y que tienden asintóticamente al mismo valor. Desde el punto de vista físico, tanto los puntos de Takens-Bogdanov como los de Hopf son aquellos para los cuales no hay fricción, lo que significa que la tasa de cambio de la energía total es cero o sea la energía total permanece constante.

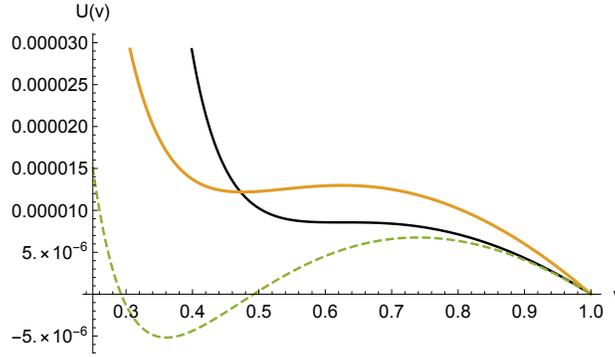
### Puntos de Hopf

Supongamos que  $\theta_0 = (v_c + v_g)^2$ , en el sistema (18), lo que implica que  $\Gamma(v_c; v_g, q_g) = 0$  y que  $K(v_c; v_g, q_g) < 0$ , entonces en ese caso los valores propios (20) son imaginarios y  $(v_c, 0)$  es un punto crítico de Hopf. Estos puntos satisfacen que

$$v_e'(v_c) > 1, \quad q_g = \theta_0^{1/2}(1 - \theta_0^{1/2} + v_g).$$

En particular, cuando  $\theta_0 = \frac{9}{64}$ ,  $v_{c1} = \frac{3}{8} - v_g$  y  $v_{c2} = \frac{5}{8}$ . Los dos primeros ejemplos del cuadro 3 muestran dos puntos de Hopf, como se puede observar el segundo punto crítico  $(v_{c2}, 0)$  es siempre el mismo y es un punto silla, comportamiento debido a la selección de las constantes.

Ilustremos la naturaleza de los puntos críticos analizando el comportamiento del potencial del campo de fuerza de nuestra interpretación física del sistema. La fuerza que actúa sobre la partícula depende explícitamente del diagrama fundamental y pocas veces es posible calcularlo explícitamente. Sin embargo, en el caso de Greenshields, el



**Figura 4.** La función potencial para distintos valores de  $(v_g, q_g)$ . La curva negra corresponde al potencial del punto de Takens-Bogdanov con  $(-0.25, 0.140625)$ , la naranja al potencial asociado al primer punto de Hopf con  $(-0.1, 0.196875)$  y la punteada al cuarto ejemplo del Cuadro 2 con  $(-0.1, 0.1666)$ .

potencial es fácil de calcular y es de la forma

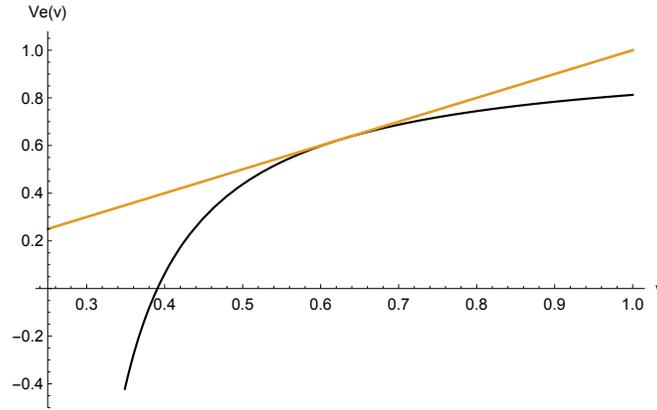
$$\Delta U(v; v_g, q_g) = b \left[ (1 - v) + \frac{q_g(1 - v)}{(v + v_g)(1 + v_g)} + (1 + v_g) \ln \left( \frac{v + v_g}{1 + v_g} \right) \right],$$

con  $\Delta U(v; v_g, q_g) = U(v; v_g, q_g) - U(1; v_g, q_g)$  que depende de los parámetros  $v_g$  y  $q_g$ .

En la figura 4 se ilustran las gráficas de esta función para algunos de los ejemplos presentados en los cuadros 2 y 3 cuando se tienen uno o dos puntos críticos. Recordemos que los puntos críticos son puntos extremos del potencial. La segunda derivada evaluada en estos puntos es igual a la expresión (21), así que su signo nos indica si el punto crítico es un mínimo o un máximo del potencial. Aplicando este criterio a los puntos de Hopf, observamos que  $\frac{d^2 U(v_c; v_g, q_g)}{dv^2} > 0$ , por lo que corresponden a mínimos del potencial, ver en la figura 4, la curva naranja. La estabilidad de los mismos dependerá del signo de  $\Gamma$  en una vecindad de ellos.

### Puntos de Takens-Bogdanov

Si  $\Gamma(v_c; v_g, q_g) = 0$  y  $K(v_c; v_g, q_g) = v'_e(v_c) - 1 = 0$  se tiene un punto de Takens-Bogdanov. Observe que dado  $(v_g, q_g)$  el sistema dinámico asociado solo tiene un punto crítico cuando dicho punto es de Takens-Bogdanov. En cuanto a la estabilidad de estos puntos no es posible extraer alguna conclusión dado que  $K(v_c; v_g, q_g) = 0$ , por lo que solo podemos concluir que el potencial  $U$  tiene un punto de inflexión en dicho punto como puede observarse en la curva de color negro de la figura 4 que corresponde al tercer ejemplo del cuadro 3. La derivada



**Figura 5.** La curva del diagrama fundamental asociado a  $v_g = -0.25$  y  $q_g = 0.140625$  y de la recta  $f(v) = v$ .

del diagrama fundamental de Greenshields (12) es

$$v'_e(v_c) = \frac{q_g}{(v_c + v_g)^2},$$

observemos que en los puntos de Takens-Bogdanov  $(v_c, 0)$  se satisface

$$v'_e(v_c) = 1, \quad v_c = \frac{(1 - v_g)}{2}, \quad \theta_0 = q_g = \frac{(1 + v_g)^2}{4}.$$

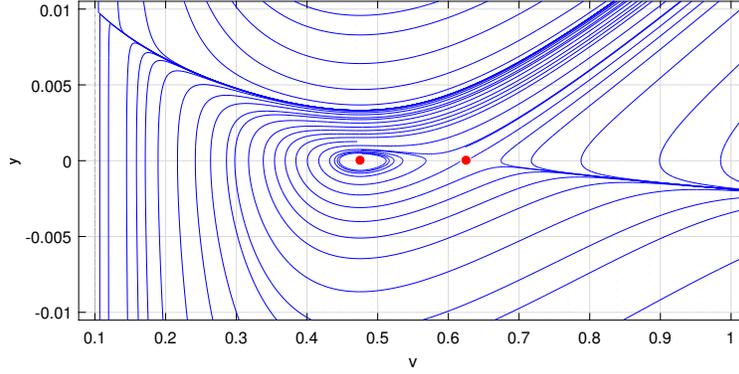
Por lo que la curva del diagrama fundamental, correspondiente a los parámetros  $(v_g, q_g)$ , tiene como recta tangente a la recta  $f(v) = v$  en el punto  $v_c$ , como se ilustra en la figura 5. Para más información sobre los puntos de Takens-Bogdanov, ver [11].

$q_g$	$v_g$	$v_{c1}$	$\lambda((v_{c1}, 0))$	$v_{c2}$	$\lambda((v_{c2}, 0))$
0.196875	-0.1	0.475	$\lambda^\pm = \pm 0.0173205i$	0.625	0.025, -0.006
0.309375	0.2	0.175	$\lambda^\pm = \pm 0.37607i$	0.625	0.054, -0.005
0.140625	-0.25	0.625	$\lambda = 0$		

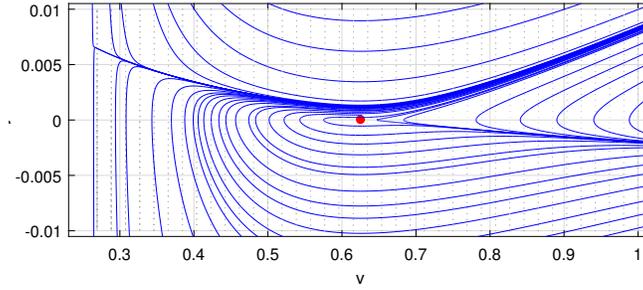
**Cuadro 3.** Puntos de Hopf y Takens-Bogdanov para valores específicos de los parámetros. Los dos primeros corresponden a puntos de Hopf mientras que el tercero es un punto de Takens-Bogdanov. Recordar que en este caso, solo hay un punto crítico.

### Trayectorias en el plano fase

En la figura 6 se muestra el plano fase para  $v_g = 0.2$ ,  $q_g = 0.309375$ . En este caso uno de los puntos críticos es de Hopf:  $(0.175, 0)$ , observe



**Figura 6.** Trayectorias para un punto crítico de Hopf con  $v_g = 0.2$ ,  $q_g = 0.309375$ .



**Figura 7.** Plano fase para el punto Takens-Bogdanov con  $v_g = -0.25$  y  $q_g = 0.140625$ .

que alrededor del mismo aparentemente hay un ciclo límite, mientras que el otro punto  $(0.625, 0)$  es un punto silla. En la figura 7 se presenta el plano fase asociado al ejemplo 3 del cuadro 3 para  $v_g = -0.25$  y  $q_g = 0.140625$ . Observe que en este caso hay un único punto crítico en  $(0.625, 0)$  con valor propio igual a cero de multiplicidad dos por lo que dicho punto es de Takens-Bogdanov.

### Aplicación a las soluciones de la EDP

La existencia de puntos críticos del tipo Takens-Bogdanov o Hopf nos permiten asegurar la existencia de ciclos límite o de órbitas homoclínicas en una vecindad de estos puntos. Ciclos límite en el plano fase corresponden a soluciones periódicas del sistema de EDO no lineal. Estas soluciones son soluciones tipo onda viajera de la EDP en un dominio acotado con condiciones de frontera periódicas si la longitud  $L$  de la carretera y el periodo  $T$  del ciclo límite satisfacen

$$L\rho_{max} = mT, \quad m \in \mathbb{Z}^+.$$

De esta manera podemos asegurar la existencia de soluciones distintas a la homogénea del sistema (1,2) con condiciones de frontera tipo periódicas. Hasta ahora no se han podido determinar en forma analítica estas soluciones, aunque hay evidencia numérica de su existencia, ver [4]. La importancia de haber encontrado que el sistema de EDO asociado al sistema de EDP tiene puntos de Hopf y de Takens-Bogdanov es que nos permite asegurar la existencia de estas soluciones y de esta forma validar los resultados numéricos.

Por otro lado, Kuznetsov y otros autores, ver [11], han estudiado a detalle qué otros tipos de órbitas podemos encontrar en la vecindad de los puntos de Hopf y Takens-Bogdanov cuando se proyecta en el plano  $(v_g, q_g)$  las curvas de puntos de Hopf y de Takens-Bogdanov de la superficie de puntos críticos. Este análisis se conoce con el nombre de diagrama de bifurcación y se muestra que si movemos un poco los parámetros asociados al punto de Takens-Bogdanov, aparecen, en el correspondiente plano fase, órbitas homoclínicas; es decir, órbitas que tienden asintóticamente al mismo punto silla cuando  $z \rightarrow \pm\infty$ . Estas trayectorias corresponden a soluciones en la EDP definidas en dominios no acotados con condiciones de fronteras acotadas del tipo (3). Estas soluciones se conocen como ondas viajeras tipo pulso, ver [3], por lo que también en este caso podemos asegurar que la EDP tiene soluciones distintas a las homogéneas.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se ha visto como distintas metodologías pueden enriquecer el estudio de los fenómenos físicos. Se ha seleccionado uno de los modelos más sencillos para estudiar el comportamiento del tráfico vehicular en una carretera. A pesar de su simplicidad, ha sido usado en la literatura como un prototipo de modelo basado en el diagrama fundamental, ver [7]. Por otro lado, la estructura de las ecuaciones nos ha permitido transformar el problema en una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y con ello, establecer un símil con el movimiento de una partícula, conforme a la segunda Ley de Newton. Al expresar la ecuación como un sistema de EDO de primer orden, su comportamiento cualitativo se ha estudiado con las herramientas de sistemas dinámicos. A pesar de su sencillez, este análisis nos ha mostrado que para valores distintos de los parámetros, hay una diversidad de puntos críticos, algunos estables, otros inestables e incluso puntos de bifurcación tipo Hopf y Takens-Bogdanov. La importancia de estos últimos yace en que podemos asegurar la existencia, en una vecindad de estos puntos, de ciclos límite [1] que representan soluciones periódicas del sistema no

lineal. Este resultado nos permite concluir que bajo ciertas condiciones de conmensurabilidad, las soluciones periódicas son soluciones tipo onda viajera de la EDP por lo que podemos asegurar que el problema en EDP con condiciones de frontera periódicas admite soluciones distintas a las homogéneas.

## Bibliografía

- [1] F. Carrillo, J. Delgado, P. Saavedra, R. M. Velasco y F. Verduzco, «Traveling waves, catastrophes and bifurcations in a generic second order traffic flow model», *Internat. J. Bifur. and Chaos*, vol. 23, núm. 12, 2013, 135091 1–15.
- [2] D. Chowdhury, L. Santen y A. Schadsneider, «Statistical physics of vehicular traffic and some related systems», *Phys. Rep.*, vol. 329, 2000, 199.
- [3] J. Delgado y P. Saavedra, «Global bifurcation diagram for the Kerner-Konhäuser traffic flow model», *Internat. J. Bifur. and Chaos*, vol. 25, núm. 5, 2015, 1550064–18.
- [4] J. Delgado, P. Saavedra y R. Velasco, *Modelación matemática del flujo vehicular*, Publicaciones de C.B.I. Universidad Autónoma Metropolitana, 2012.
- [5] B. D. Greenshields, «A study of traffic capacity», en *Proc. of the Highway Research Board, Vol. 14*, ed. Highway Research Board, 1935, 448–477.
- [6] D. Helbing, «Traffic and related self-driven many-particle systems», *Rev. Mod. Phys.*, vol. 73, núm. 4, 2001, 1067–1141.
- [7] B. S. Kerner, *Introduction to modern traffic flow theory and control*, Springer, 2009.
- [8] B. S. Kerner y P. Konhäuser, «Cluster effect in initially homogeneous traffic flow», *Phys. Rev. E*, vol. 48, núm. 4, 1993, R2335–R2338.
- [9] ———, «Structure and parameters of clusters in traffic flow», *Phys. Rev. E*, vol. 50, núm. 1, 1994, 54–83.
- [10] R. Kuhne, R. Mahnke, I. Lubashevsky y J. Kaupuzs, «Probabilistic description of traffic breakdowns», *Phys. Rev. E*, vol. 65, núm. 066125, 2002, 1–130.
- [11] Y. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*, vol. 112, Applied Mathematical Sciences, Springer Verlag, 1991.
- [12] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Fluid mechanics*, Addison-Wesley, 1959.
- [13] H. Y. Lee, H. W. Lee y D. Kim, «Phase diagram of congested traffic flow: An empirical study», *Phys. Rev. E*, vol. 62, núm. 4, 2000, 4737–4771.
- [14] M. J. Lighthill y G. B. Whitham, «On Kinematic Waves. II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads», *Proc. Roy. Soc. London, Series A, Math, Phys. Sci.*, vol. 229, núm. 1178, 1955, 317–345.
- [15] P. Saavedra y R. M. Velasco, «Phase-space analysis for hydrodynamic traffic models», *Phys. Rev. E*, vol. 79, núm. 066103, 2009, 1–10.
- [16] R. M. Velasco y P. Saavedra, «Macroscopic models in traffic flow», *Qual. Th. Dyn. Syst.*, vol. 7, 2008, 237–252.