Miscelánea Matemática **78** (2024) 49-68 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7804

Introducción al cálculo no newtoniano

R. Temoltzi-Ávila
Área Académica de Matemáticas y Física
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
temoltzi@uaeh.edu.mx

1. Introducción

El cálculo tradicional, también llamado cálculo newtoniano, fue iniciado en la segunda mitad del siglo XVII por matemáticos tales como Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibnitz, Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli, entre otros, véase [8]. Una alternativa del cálculo newtoniano es el cálculo no newtoniano, cuyo origen se remonta en una serie de trabajos de Michael Grossman y Robert Katz publicados entre los años 1967 a 1970, y que se resumen en [9]. La base del cálculo no newtoniano consiste en substituir las operaciones binarias: suma, resta, multiplicación y división, por otras operaciones binarias que dependen de una función inyectiva. En este sentido, el cálculo no newtoniano constituye una generalización del cálculo newtoniano.

Los principios básicos se resumen a continuación. Sea X un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y sea $\alpha\colon X \to \mathbb{R}$ una función inyectiva cuyo rango $\alpha(X)$ se denota por $\mathbb{R}_\alpha$. La función α es llamada un *α-generador* de una *α-aritmética* sobre $\mathbb{R}_\alpha$ si las siguientes cuatro *α-operaciones* son bien definidas para cada $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$:

$$a \overset{\alpha}{\oplus} b = \alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(b)), \qquad \alpha\text{-suma}, \tag{1a}$$

$$a \overset{\alpha}{\ominus} b = \alpha(\alpha^{-1}(a) - \alpha^{-1}(b)), \qquad \alpha\text{-resta}, \tag{1b}$$

$$a \overset{\alpha}{\odot} b = \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b)), \qquad \alpha\text{-multiplicación}, \tag{1c}$$

$$a \overset{\alpha}{\oslash} b = \alpha\left(\frac{\alpha^{-1}(a)}{\alpha^{-1}(b)}\right), \qquad \alpha\text{-división}. \tag{1d}$$

El conjunto $\mathbb{R}_\alpha$ es llamado *conjunto de números reales no newtonianos*. La función α permite establecer un *α-orden* sobre el conjunto $\mathbb{R}_\alpha$ de la siguiente manera: $a \overset{\alpha}{<} b$ si y solo si, $\alpha^{-1}(a) < \alpha^{-1}(b)$. De manera equivalente: $a \overset{\alpha}{\leqslant} b$ si y solo si, $\alpha^{-1}(a) \leqslant \alpha^{-1}(b)$.

Palabras clave: α-generadores, cálculo no newtoniano, ecuaciones diferenciales no newtonianas.

Los siguientes ejemplos de cálculo no newtoniano son de interés práctico.

Si se elige $X = \mathbb{R}$ y $\alpha = id$, donde $id\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función identidad: $id(x) = x$ para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces las id-operaciones se reducen a las operaciones habituales en el cálculo newtoniano:

$$a \overset{id}{\oplus} b = a + b, \quad a \overset{id}{\ominus} b = a - b, \quad a \overset{id}{\odot} b = a \cdot b, \quad a \overset{id}{\oslash} b = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

En este caso, el conjunto $\mathbb{R}_\alpha$ describe el conjunto de números reales newtonianos, es decir, $\mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}$. Es claro que el id-orden en $\mathbb{R}_\alpha$ coincide con el orden habitual de $\mathbb{R}$.

Si se eligen $\alpha(x) = \exp(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha^{-1}(x) = \ln(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}^+$, entonces las exp-operaciones que se obtienen de (1a)–(1d) para cada $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$ son:

$$a \overset{\exp}{\oplus} b = ab, \quad a \overset{\exp}{\ominus} b = \frac{a}{b}, \quad a \overset{\exp}{\odot} b = a^{\ln(b)} = b^{\ln(a)}, \quad a \overset{\exp}{\oslash} b = a^{\frac{1}{\ln(b)}}, \; b \neq 1.$$

El cálculo no newtoniano que se obtiene en $\mathbb{R}_\alpha$ es llamado *cálculo multiplicativo* o *cálculo geométrico*. Algunas propiedades de este cálculo no newtoniano se pueden consultar en [1, 19]. Se destaca que, probablemente, este es uno de los cálculos no newtonianos más populares, debido al número de investigaciones y aplicaciones que se han reportado en la literatura. Algunas aplicaciones se pueden consultar en [2, 10, 17].

Si se considera una constante $\kappa \in (-1, 1)\setminus\{0\}$ y se eligen las funciones $\alpha(x) = \kappa^{-1}\operatorname{senh}(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha^{-1}(x) = \operatorname{arcsenh}(\kappa x)$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}$, entonces el cálculo no newtoniano que se obtiene en $\mathbb{R}_\alpha$ es llamado *κ-cálculo de Kaniadakis*. Las κ-operaciones que se obtienen de (1a)–(1d) se describen por

$$\begin{aligned}
a \overset{\kappa}{\oplus} b &= a\sqrt{1 + \kappa^2 b^2} + b\sqrt{1 + \kappa^2 a^2},\\
a \overset{\kappa}{\ominus} b &= a\sqrt{1 + \kappa^2 b^2} - b\sqrt{1 + \kappa^2 a^2},\\
a \overset{\kappa}{\odot} b &= \kappa^{-1}\operatorname{senh}\big(\kappa^{-1}\operatorname{arcsenh}(\kappa a)\operatorname{arcsenh}(\kappa b)\big),\\
a \overset{\kappa}{\oslash} b &= \kappa^{-1}\operatorname{senh}\Big(\kappa\frac{\operatorname{arcsenh}(\kappa a)}{\operatorname{arcsenh}(\kappa b)}\Big), \quad b \neq 0.
\end{aligned}$$

El κ-cálculo de Kaniadakis describe una aritmética que se suele emplear en física estadística, véase [13, 14, 15]. Algunas aplicaciones del κ-cálculo de Kaniadakis se pueden consultar en [7, 11, 16].

Otros tipos de cálculo no newtoniano y su unificación se pueden consultar en [6].

2. Propiedades algebraicas y topológicas de $\mathbb{R}_\alpha$

Los resultados que se presentan en este apartado son una adaptación de aquellos que se discuten en [4]. Durante la exposición se supone que $X = \mathbb{R}$ y que $\alpha\colon X \to \mathbb{R}_\alpha$ es una función inyectiva y continua.

2.1 Propiedades algebraicas

En este apartado se muestra que $\mathbb{R}_\alpha$ es un campo aritmético bajo las operaciones (1a)–(1d). Se recuerda que un sistema conformado por un conjunto E, cuatro operaciones binarias $(\overset{\circ}{\oplus}, \overset{\circ}{\ominus}, \overset{\circ}{\odot}, \overset{\circ}{\oslash})$ definidas en E y un orden $\overset{\circ}{<}$ definido en E, es llamado un *campo ordenado* si las operaciones binarias definidas en E se comportan de la misma manera como se comportan las operaciones binarias $(+, -, \cdot\,, /)$ definidas en $\mathbb{R}$, y la relación de orden definida en E se comporta de la misma manera como se comporta el orden $<$ definido en $\mathbb{R}$, véase [9]. Un campo ordenado se llama *campo aritmético* cuando este es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

La α-suma induce las siguientes propiedades sobre $\mathbb{R}_\alpha$.

(a_1) $a \overset{\alpha}{\oplus} b \in \mathbb{R}_\alpha$ para todo $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$.

(a_2) $(a \overset{\alpha}{\oplus} b) \overset{\alpha}{\oplus} c = a \overset{\alpha}{\oplus} (b \overset{\alpha}{\oplus} c)$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}_\alpha$. En efecto:

$$\begin{aligned}
(a \overset{\alpha}{\oplus} b) \overset{\alpha}{\oplus} c &= \alpha(\alpha^{-1}(a \overset{\alpha}{\oplus} b) + \alpha^{-1}(c)) \\
&= \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(b))) + \alpha^{-1}(c)) \\
&= \alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(b) + \alpha^{-1}(c)) \\
&= \alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(b) + \alpha^{-1}(c)))) \\
&= \alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(b \overset{\alpha}{\oplus} c)) = a \overset{\alpha}{\oplus} (b \overset{\alpha}{\oplus} c).
\end{aligned}$$

(a_3) $a \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(0) = \alpha(0) \overset{\alpha}{\oplus} a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}_\alpha$. En realidad, se observa que $a \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(0) = \alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(\alpha(0))) = \alpha(\alpha^{-1}(a)) = a$. De la misma manera se muestra que $\alpha(0) \overset{\alpha}{\oplus} a = a$. Por lo tanto, $\alpha(0)$ es el elemento neutro de $\mathbb{R}_\alpha$ con respecto a la α-suma.

(a_4) $a \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(-\alpha^{-1}(a)) = \alpha(-\alpha^{-1}(a)) \overset{\alpha}{\oplus} a = \alpha(0)$ para todo $a \in \mathbb{R}_\alpha$. En efecto: $a \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(-\alpha^{-1}(a)) = \alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(\alpha(-\alpha^{-1}(a)))) = \alpha(0)$. De la misma manera se muestra que $\alpha(-\alpha^{-1}(a)) \overset{\alpha}{\oplus} a = \alpha(0)$. Por lo tanto, $\alpha(-\alpha^{-1}(a)) \in \mathbb{R}_\alpha$ es el inverso aditivo de $a \in \mathbb{R}_\alpha$ con respecto a la α-suma.

(a_5) $a \overset{\alpha}{\oplus} b = b \overset{\alpha}{\oplus} a$ para todo $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$. En realidad, basta con observar que $a \overset{\alpha}{\oplus} b = \alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(b)) = \alpha(\alpha^{-1}(b) + \alpha^{-1}(a)) = b \overset{\alpha}{\oplus} a$.

Los puntos (a_1)–(a_5) muestran que el conjunto $\mathbb{R}_\alpha$ es un grupo abeliano si en él se considera la α-suma como operación binaria.

Teorema 2.1. $(\mathbb{R}_\alpha, \overset{\alpha}{\oplus})$ *es un grupo abeliano.*

Empleando un procedimiento análogo al anterior, se puede mostrar que la α-multiplicación induce las siguientes propiedades:

(b_1) $a \overset{\alpha}{\odot} b \in \mathbb{R}_\alpha$ para todo $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$.

(b_2) $(a \overset{\alpha}{\odot} b) \overset{\alpha}{\odot} c = a \overset{\alpha}{\odot} (b \overset{\alpha}{\odot} c)$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}_\alpha$.

(b_3) $a \overset{\alpha}{\odot} \alpha(1) = \alpha(1) \overset{\alpha}{\odot} a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}_\alpha$.

(b_4) $a \overset{\alpha}{\odot} \alpha((\alpha^{-1}(a))^{-1}) = \alpha((\alpha^{-1}(a))^{-1}) \overset{\alpha}{\odot} a = \alpha(1)$ para todo número real no newtoniano $a \in \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}$.

(b_5) $a \overset{\alpha}{\odot} b = b \overset{\alpha}{\odot} a$ para todo $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$.

Los puntos (b_1)–(b_5) permiten obtener el siguiente resultado.

Teorema 2.2. $(\mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}, \overset{\alpha}{\odot})$ *es un grupo abeliano.*

Las leyes distributivas por la izquierda y por la derecha, también se cumplen en $\mathbb{R}_\alpha$ con respecto a la α-multiplicación y a la α-suma.

(b_6) $a \overset{\alpha}{\odot} (b \overset{\alpha}{\oplus} c) = (a \overset{\alpha}{\odot} b) \overset{\alpha}{\oplus} (a \overset{\alpha}{\odot} c)$ y $(b \overset{\alpha}{\oplus} c) \overset{\alpha}{\odot} a = (b \overset{\alpha}{\odot} a) \overset{\alpha}{\oplus} (c \overset{\alpha}{\odot} a)$ para cada $a, b, c \in \mathbb{R}_\alpha$. En realidad, se observa que

$$\begin{aligned} a \overset{\alpha}{\odot} (b \overset{\alpha}{\oplus} c) &= \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b \overset{\alpha}{\oplus} c)) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot (\alpha^{-1}(b) + \alpha^{-1}(c))) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b) + \alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(c)) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b)) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(c)) \\ &= (a \overset{\alpha}{\odot} b) \overset{\alpha}{\oplus} (a \overset{\alpha}{\odot} c). \end{aligned}$$

Similarmente se comprueba que $(b \overset{\alpha}{\oplus} c) \overset{\alpha}{\odot} a = (b \overset{\alpha}{\odot} a) \overset{\alpha}{\oplus} (c \overset{\alpha}{\odot} a)$.

Se obtiene entonces el siguiente resultado como conclusión.

Teorema 2.3. *La α-multiplicación es distributiva sobre la α-suma.*

Tomando en consideración que $\mathbb{R}_\alpha$ es un conjunto ordenado, y de acuerdo con los teoremas 2.1–2.3, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.4. $(\mathbb{R}_\alpha, \overset{\alpha}{\oplus}, \overset{\alpha}{\odot}, \overset{\alpha}{<})$ *es un campo ordenado.*

Se termina este apartado con el siguiente resultado que muestra la relación que existe entre los campos ordenados considerados.

Teorema 2.5. *Los campos ordenados* $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ *y* $(\mathbb{R}_\alpha, \overset{\alpha}{\oplus}, \overset{\alpha}{\odot}, \overset{\alpha}{<})$ *son isomorfos.*

Demostración. Es suficiente con observar que si se elige $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\alpha$ de tal manera que $\varphi(x) = \alpha(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\varphi(a \cdot b) = \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(a)) \cdot \alpha^{-1}(\alpha(b))) = \alpha(a) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(b) = \varphi(a) \overset{\alpha}{\odot} \varphi(b),$$

$$\varphi(a + b) = \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(a)) + \alpha^{-1}(\alpha(b))) = \alpha(a) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(b) = \varphi(a) \overset{\alpha}{\oplus} \varphi(b).$$

Por otra parte, si se elige $\phi \colon \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(y) = \alpha^{-1}(y)$ para cada $y \in \mathbb{R}_\alpha$, entonces se puede mostrar de forma completamente análoga que $\phi(a \overset{\alpha}{\oplus} b) = \phi(a) + \phi(b)$ y $\phi(a \overset{\alpha}{\odot} b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$. $\square$

2.2 Propiedades topológicas

Las propiedades topológicas de $\mathbb{R}_\alpha$ se pueden obtener a partir de las operaciones (1a)–(1d). Estas propiedades serán empleadas más adelante al describir el $*$-cálculo. Los resultados que se muestran a continuación son una adaptación de aquellos que se presentan en [4, 20]. Con el objeto de analizar tales propiedades, se introducen los subconjuntos principales de $\mathbb{R}_\alpha$.

El primer conjunto que se considera es el conjunto de *números naturales no newtonianos*, el cual se define como

$$\mathbb{N}_\alpha = \{\alpha(n) \in \mathbb{R}_\alpha \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Este conjunto tiene propiedades similares al conjunto $\mathbb{N}$. En principio, se puede observar que este conjunto es cerrado bajo la α-suma, pues si se eligen $\alpha(n), \alpha(m) \in \mathbb{N}_\alpha$, entonces $\alpha(n) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(m) = \alpha(n+m) \in \mathbb{N}_\alpha$. En particular, se observa que $\alpha(n) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(1) = \alpha(n+1)$. Por lo tanto, si se α-suma n-veces $\alpha(1)$, como resultado se obtiene $\alpha(n)$. Lo anterior permite observar que el principio de inducción matemática es válido en $\mathbb{N}_\alpha$. Por otra parte, si $\alpha(n) \overset{\alpha}{>} \alpha(1)$, entonces $\alpha(n) \overset{\alpha}{\ominus} \alpha(1) = \alpha(n-1)$. Esta propiedad permite introducir el conjunto de *números enteros no newtonianos*, el cual se define por

$$\mathbb{Z}_\alpha = \{\alpha(n) \in \mathbb{R}_\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Por construcción se sigue que $\mathbb{N}_\alpha \subset \mathbb{Z}_\alpha$. Es claro que el conjunto $\mathbb{Z}_\alpha$ se conforma de las soluciones de la ecuación lineal no newtoniana $\alpha(m) \overset{\alpha}{\oplus} b = \alpha(n)$, donde $m, n \in \mathbb{N}$. Por el contrario, si se considera el problema de hallar soluciones de la ecuación lineal no newtoniana $\alpha(m) \overset{\alpha}{\odot} b = \alpha(n)$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $m \neq 0$, entonces existen soluciones que no pertenecen a $\mathbb{Z}_\alpha$. Esto permite introducir el conjunto de *números racionales no newtonianos*, el cual se define como

$$\mathbb{Q}_\alpha = \{\alpha(n) \overset{\alpha}{\oslash} \alpha(m) \in \mathbb{R}_\alpha \mid n, m \in \mathbb{Z} \text{ y } m \neq 0\}.$$

Una vez más, por construcción se sigue que $\mathbb{Z}_\alpha \subset \mathbb{Q}_\alpha$. Como conclusión, se tiene que $\mathbb{N}_\alpha \subset \mathbb{Z}_\alpha \subset \mathbb{Q}_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha$.

El número $\alpha(0)$ permite considerar una estructura en el conjunto $\mathbb{R}_\alpha$. Sea $a \in \mathbb{R}_\alpha$. Se dice que a es un *número real no newtoniano positivo* si $a \overset{\alpha}{\geqslant} \alpha(0)$, a es un *número real no newtoniano negativo* si $a \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha(0)$ y, finalmente, a es un *número real no newtoniano sin signo* si $a = \alpha(0)$. Lo anterior justifica la descomposición $\mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}_\alpha^+ \cup \mathbb{R}_\alpha^- \cup \{\alpha(0)\}$, donde $\mathbb{R}_\alpha^+ = \{a \in \mathbb{R}_\alpha \mid a \overset{\alpha}{>} \alpha(0)\}$ y $\mathbb{R}_\alpha^- = \{a \in \mathbb{R}_\alpha \mid a \overset{\alpha}{<} \alpha(0)\}$. Se llamará a $\mathbb{R}_\alpha^+$ el *conjunto de números reales no newtonianos positivos* y $\mathbb{R}_\alpha^-$ el *conjunto de números reales no newtonianos negativos.* Además, se llamará a $\bar{\mathbb{R}}_\alpha^+ = \mathbb{R}_\alpha^+ \cup \{\alpha(0)\}$ el *conjunto de números reales no newtonianos no negativos*. De las definiciones se desprende que $\mathbb{N}_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha^+$ y que $\mathbb{N}_\alpha \cup \{\alpha(0)\} \subset \bar{\mathbb{R}}_\alpha^+$.

Se establece ahora la relación que existe entre la suma y multiplicación de números reales newtonianos con respecto a la α-suma y la α-multiplicación de números reales no newtonianos.

Sean $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}_\alpha$. Usando (1a) se observa que

$$\begin{aligned} a_1 \overset{\alpha}{\oplus} a_2 &= \alpha(\alpha^{-1}(a_1) + \alpha^{-1}(a_2)),\\ a_1 \overset{\alpha}{\oplus} a_2 \overset{\alpha}{\oplus} a_3 &= \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(a_1) + \alpha^{-1}(a_2))) + \alpha^{-1}(a_3))\\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a_1) + \alpha^{-1}(a_2) + \alpha^{-1}(a_3)),\\ &\cdots\\ a_1 \overset{\alpha}{\oplus} a_2 \overset{\alpha}{\oplus} \cdots \overset{\alpha}{\oplus} a_m &= \alpha(\alpha^{-1}(a_1) + \alpha^{-1}(a_2) + \cdots + \alpha^{-1}(a_m)).\end{aligned}$$

La fórmula anterior se puede simplificar si se considera la siguiente notación de α-sumatoria: ${}^{\alpha}\sum_{k=1}^{m} a_k = a_1 \overset{\alpha}{\oplus} a_2 \overset{\alpha}{\oplus} \cdots \overset{\alpha}{\oplus} a_m$, con lo cual se observa que

$$ {}^{\alpha}\sum_{k=1}^{m} a_k = \alpha\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha^{-1}(a_k)\right). \tag{2}$$

En particular, se sigue que la α-suma de los primeros m números naturales no newtonianos cumple: ${}^{\alpha}\sum_{k=1}^{m} \alpha(k) = \alpha(\frac{1}{2}m(m+1))$.

De la misma manera, usando (1c) se puede comprobar que

$$a_1 \overset{\alpha}{\odot} a_2 \overset{\alpha}{\odot} \cdots \overset{\alpha}{\odot} a_m = \alpha(\alpha^{-1}(a_1) \cdot \alpha^{-1}(a_2) \cdots \alpha^{-1}(a_m)).$$

Una vez más, la fórmula anterior se puede simplificar si se considera la notación: ${}^{\alpha}\prod_{k=1}^{m} a_k = a_1 \overset{\alpha}{\odot} a_2 \overset{\alpha}{\odot} \cdots \overset{\alpha}{\odot} a_m$, con lo cual se obtiene

$$ {}^{\alpha}\prod_{k=1}^{m} a_k = \alpha\left(\prod_{k=1}^{m} \alpha^{-1}(a_k)\right). \tag{3}$$

Como caso particular, se observa que la α-multiplicación de los primeros m números naturales no newtonianos, es decir, el α-*factorial* de $\alpha(m)$ que se denota por $\alpha(m)!$, cumple: $\alpha(m)! = {}^{\alpha}\prod_{k=1}^{m} \alpha(k) = \alpha(m!)$.

Si para cada $a \in \mathbb{R}_\alpha$ y $\alpha(m) \in \mathbb{N}_\alpha$ se denota por $a^{\alpha(m)}$ la correspondiente $\alpha(m)$-*ésima potencia* de a, entonces se obtiene una expresión para $a^{\alpha(m)}$ por α-multiplicar m-veces el número real no newtoniano a consigo mismo, es decir,

$$\begin{aligned} a^{\alpha(2)} &= a \overset{\alpha}{\odot} a = \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(a)) = \alpha((\alpha^{-1}(a))^2),\\ a^{\alpha(3)} &= a^{\alpha(2)} \overset{\alpha}{\odot} a = \alpha((\alpha^{-1}(a))^2 \cdot \alpha^{-1}(a)) = \alpha((\alpha^{-1}(a))^3),\\ &\cdots\\ a^{\alpha(m)} &= a^{\alpha(m-1)} \overset{\alpha}{\odot} a = \alpha((\alpha^{-1}(a))^{m-1} \cdot \alpha^{-1}(a)) = \alpha((\alpha^{-1}(a))^m),\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$a^{\alpha(m)} = \alpha((\alpha^{-1}(a))^m), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

La expresión (4) permite observar que $a^{\alpha(1)} = \alpha(\alpha^{-1}(a)) = a$, y que si $\alpha^{-1}(a) \neq 0$, entonces $a^{\alpha(0)} = \alpha(1)$. Por otra parte, se observa que $a^{\alpha(-1)} = \alpha((\alpha^{-1}(a))^{-1})$, es decir, $a^{\alpha(-1)}$ es el inverso multiplicativo de $a \in \mathbb{R}_\alpha$. Esto permite reescribir el punto (b_4) al emplear $a^{\alpha(-1)}$ en lugar de $\alpha((\alpha^{-1}(a))^{-1})$: $a \overset{\alpha}{\odot} a^{\alpha(-1)} = a^{\alpha(-1)} \overset{\alpha}{\odot} a = \alpha(1)$ para todo $a \in \mathbb{R}_\alpha$.

Como aplicación de (2) y (4), se obtienen algunas fórmulas en el conjunto $\mathbb{R}_\alpha$ que son conocidas en el conjunto $\mathbb{R}$. Por ejemplo, si $a \in \mathbb{R}_\alpha$ es tal que $\alpha^{-1}(a) \neq 1$, entonces la *α-suma geométrica finita* cumple ${}^{\alpha}\sum_{k=1}^{m} a^{\alpha(k)} = \alpha(\frac{1-(\alpha^{-1}(a))^{m+1}}{1-\alpha^{-1}(a)})$, mientras que si $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$, entonces se comprueba que $(a \overset{\alpha}{\oplus} b)^{\alpha(m)} = \alpha((\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(b))^m)$ y, como consecuencia, el desarrollo de un *α-binomio de Newton* cumple la siguiente relación $(a \overset{\alpha}{\oplus} b)^{\alpha(m)} = \alpha\big(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (\alpha^{-1}(a))^{m-k} (\alpha^{-1}(b))^k\big)$.

Una consecuencia adicional que resulta de la representación (4), es que para cada $a \in \mathbb{R}_\alpha$ y $m \in \mathbb{N}$, la ecuación no newtoniana $b^{\alpha(m)} = a$ admite la solución $b = \alpha(\sqrt[m]{\alpha^{-1}(a)})$, lo cual se puede verificar directamente por sustitución. Esto permite introducir la *$\alpha(m)$-ésima raíz* de $a \in \mathbb{R}_\alpha$, la cual se denotada por $\sqrt[m]{a}^{\alpha}$ y se define como

$$\sqrt[m]{a}^{\alpha} = \alpha(\sqrt[m]{\alpha^{-1}(a)}). \tag{5}$$

Se observa de la expresión (5) que cada valor de la $\alpha(m)$-raíz $\sqrt[m]{a}^{\alpha}$ de $a \in \mathbb{R}_\alpha$, depende del valor de la m-ésima raíz $\sqrt[m]{\alpha^{-1}(a)}$ de $\alpha^{-1}(a) \in \mathbb{R}$. En particular, si en (5) se elige $m = 2$, entonces las dos *α-raíces cuadradas* de $a \in \mathbb{R}_\alpha$ son $\sqrt{a}^{\alpha} = \alpha(\sqrt{\alpha^{-1}(a)})$ y $\overset{\alpha}{\ominus} \sqrt{a}^{\alpha} = \alpha(-\sqrt{\alpha^{-1}(a)})$.

Con el mismo método se introduce el *α-valor absoluto* de $a \in \mathbb{R}_\alpha$, denotado por $|a|_\alpha$, y que satisface $|a|_\alpha = \sqrt{a^{\alpha(2)}}^{\alpha} = \alpha(|\alpha^{-1}(a)|)$. En tal caso, se define

$$|a|_\alpha = \alpha(|\alpha^{-1}(a)|). \tag{6}$$

Si se considera $a \in \mathbb{R}_\alpha$ arbitrario, entonces se obtiene de la representación (6) la definición de la función *α-valor absoluto* $|\cdot|_\alpha \colon \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ definida por

$$|a|_\alpha = \begin{cases} a, & \text{si } a \overset{\alpha}{>} \alpha(0), \\ \alpha(0), & \text{si } a = \alpha(0), \\ \alpha(0) \overset{\alpha}{\ominus} a, & \text{si } a \overset{\alpha}{<} \alpha(0). \end{cases}$$

Se describen ahora dos propiedades en $\mathbb{R}_\alpha$ que se desprenden de la definición de α-valor absoluto.

(c_1) $|b_1 \overset{\alpha}{\odot} b_2|_\alpha = |b_1|_\alpha \overset{\alpha}{\odot} |b_2|_\alpha$ para todo $b_1, b_2 \in \mathbb{R}_\alpha$. Basta observar que de la definición de α-multiplicación y de (6) se obtiene

$$\begin{aligned} |b_1 \overset{\alpha}{\odot} b_2|_\alpha &= \alpha(|\alpha^{-1}(b_1) \cdot \alpha^{-1}(b_2)|) = \alpha(|\alpha^{-1}(b_1)| \cdot |\alpha^{-1}(b_2)|) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(|\alpha^{-1}(b_1)|)) \cdot \alpha^{-1}(\alpha(|\alpha^{-1}(b_2)|))) \\ &= \alpha(|\alpha^{-1}(b_1)|) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(|\alpha^{-1}(b_2)|) = |b_1|_\alpha \overset{\alpha}{\odot} |b_2|_\alpha. \end{aligned}$$

(c_2) $|b_1 \overset{\alpha}{\oplus} b_2|_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} |b_1|_\alpha \overset{\alpha}{\oplus} |b_2|_\alpha$ para todo $b_1, b_2 \in \mathbb{R}_\alpha$. Para ver que esto es así, sean $b_1, b_2 \in \mathbb{R}_\alpha$. Entonces

$$|b_1 \overset{\alpha}{\oplus} b_2|_\alpha = \alpha(|\alpha^{-1}(b_1 \overset{\alpha}{\oplus} b_2)|) = \alpha(|\alpha^{-1}(b_1) + \alpha^{-1}(b_2)|).$$

Si se aplica α^{-1} en ambos lados de esta desigualdad, se sigue que $\alpha^{-1}(|b_1 \overset{\alpha}{\oplus} b_2|_\alpha) = |\alpha^{-1}(b_1) + \alpha^{-1}(b_2)| \leqslant |\alpha^{-1}(b_1)| + |\alpha^{-1}(b_2)|$ y, como α es una función inyectiva, se obtiene que

$$\begin{aligned}|b_1 \overset{\alpha}{\oplus} b_2|_\alpha &\overset{\alpha}{\leqslant} \alpha(|\alpha^{-1}(b_1)| + |\alpha^{-1}(b_2)|)\\ &\overset{\alpha}{\leqslant} \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(|\alpha^{-1}(b_1)|)) + \alpha^{-1}(\alpha(|\alpha^{-1}(b_2)|)))\\ &= \alpha(|\alpha^{-1}(b_1)|) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(|\alpha^{-1}(b_1)|) = |b_1|_\alpha \overset{\alpha}{\oplus} |b_2|_\alpha.\end{aligned}$$

Los puntos (c_1)–(c_2) implican las siguientes propiedades en $\mathbb{R}_\alpha$. Sean $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_\alpha$. Se observa primero que $|a_1 \overset{\alpha}{\ominus} a_2|_\alpha \overset{\alpha}{\geqslant} \alpha(0)$, pues esta desigualdad equivale a $|\alpha^{-1}(a_1) - \alpha^{-1}(a_2)| \geqslant 0$. Además, es claro que $|a_1 \overset{\alpha}{\ominus} a_2|_\alpha = \alpha(0)$ si y solo si, $\alpha^{-1}(a_1) - \alpha^{-1}(a_2) = 0$, es decir, si y solo si, $a_1 = a_2$. Por otra parte, se puede comprobar de forma directa que $|a_1 \overset{\alpha}{\ominus} a_2|_\alpha = |a_2 \overset{\alpha}{\ominus} a_1|_\alpha$. Además, $|a_1 \overset{\alpha}{\ominus} a_3|_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} |a_1 \overset{\alpha}{\ominus} a_2|_\alpha \overset{\alpha}{\oplus} |a_2 \overset{\alpha}{\ominus} a_3|_\alpha$ para todo $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}_\alpha$, lo cual se obtiene de (c_2) y de observar que si se elige $b_1 = a_1 \overset{\alpha}{\ominus} a_2$ y $b_2 = a_2 \overset{\alpha}{\ominus} a_3$, entonces

$$\begin{aligned}b_1 \overset{\alpha}{\oplus} b_2 &= \alpha(\alpha^{-1}(a_1 \overset{\alpha}{\ominus} a_2) + \alpha^{-1}(a_2 \overset{\alpha}{\ominus} a_3))\\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a_1) - \alpha^{-1}(a_3)) = a_1 \overset{\alpha}{\ominus} a_3.\end{aligned}$$

Finalmente, se observa que $|a_1 \overset{\alpha}{\ominus} a_2|_\alpha \in \bar{\mathbb{R}}_\alpha^+$, lo cual se desprende de la representación (6) y de notar que: $|a_1 \overset{\alpha}{\ominus} a_2|_\alpha = \alpha(|\alpha^{-1}(a_1) - \alpha^{-1}(a_2)|)$. Esto permite introducir una propiedad adicional en $\mathbb{R}_\alpha$.

(c_3) La función $\rho_\alpha\colon \mathbb{R}_\alpha \times \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ definida por

$$\rho_\alpha(a_1, a_2) = |a_1 \overset{\alpha}{\ominus} a_2|_\alpha, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}_\alpha,$$

induce una métrica en $\mathbb{R}_\alpha$, que satisface para todo $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}_\alpha$ las siguientes propiedades:

(I) $\rho_\alpha(a_1, a_2) \overset{\alpha}{\geqslant} \alpha(0)$.
(II) $\rho_\alpha(a_1, a_2) = \alpha(0)$ si y solo si, $a_1 = a_2$.
(III) $\rho_\alpha(a_1, a_2) = \rho_\alpha(a_2, a_1)$.
(IV) $\rho_\alpha(a_1, a_3) \overset{\alpha}{\leqslant} \rho_\alpha(a_1, a_2) \overset{\alpha}{\oplus} \rho_\alpha(a_2, a_3)$.

Como consecuencia de (c_3) se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.6. *El espacio no newtoniano $\mathbb{R}_\alpha$ puede ser considerado un espacio métrico bajo la métrica ρ_α definida por*

$$\rho_\alpha(a_1, a_2) = |a_1 \overset{\alpha}{\ominus} a_2|_\alpha = \alpha(|\alpha^{-1}(a_1) - \alpha^{-1}(a_2)|). \tag{7}$$

El espacio métrico $(\mathbb{R}_\alpha, \rho_\alpha)$ es llamado espacio métrico no newtoniano *y ρ_α es llamada* métrica no newtoniana.

Si en $\mathbb{R}$ se considera la métrica estándar $\rho\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, es decir, la métrica definida por $\rho(b_1,b_2)=|b_1-b_2|$, entonces se observa de (7) que

$$\rho_\alpha(a_1,a_2)=\alpha(\rho(\alpha^{-1}(a_1),\alpha^{-1}(a_2))),\quad a_1,a_2\in\mathbb{R}_\alpha.$$

Se establecen algunas propiedades sobre la topología en $\mathbb{R}_\alpha$. Para este fin, se supone que a y b son elementos arbitrarios de $\mathbb{R}_\alpha$ tales que $a\overset{\alpha}{<}b$.

(d_1) Sea $(a,b)_\alpha=\{x\in\mathbb{R}_\alpha\mid a\overset{\alpha}{<}x\overset{\alpha}{<}b\}$ un *intervalo abierto no newtoniano* en $\mathbb{R}_\alpha$. Este conjunto se identifica en $\mathbb{R}$ con el conjunto de números $\alpha^{-1}(x)\in\mathbb{R}$ tales que $\alpha^{-1}(a)<\alpha^{-1}(x)<\alpha^{-1}(b)$. De esta manera $(a,b)_\alpha=\alpha((\alpha^{-1}(a),\alpha^{-1}(b)))$.

(d_2) Sea $[a,b]_\alpha=\{x\in\mathbb{R}_\alpha\mid a\overset{\alpha}{\leqslant}x\overset{\alpha}{\leqslant}b\}$ un *intervalo cerrado no newtoniano* en $\mathbb{R}_\alpha$. Este conjunto se identifica en $\mathbb{R}$ con el conjunto de números $\alpha^{-1}(x)\in\mathbb{R}$ tales que $\alpha^{-1}(a)\leqslant\alpha^{-1}(x)\leqslant\alpha^{-1}(b)$. Por lo tanto $[a,b]_\alpha=\alpha([\alpha^{-1}(a),\alpha^{-1}(b)])$.

(d_3) Sea $B_\alpha(a,\epsilon)=\{x\in\mathbb{R}_\alpha\mid\rho_\alpha(x,a)\overset{\alpha}{<}\epsilon\}$ una *bola abierta no newtoniana* de centro $a\in\mathbb{R}_\alpha$ y radio $\epsilon\overset{\alpha}{>}\alpha(0)$. Si $x\in B_\alpha(a,\epsilon)$, entonces se comprueba que la desigualdad $\rho_\alpha(x,a)\overset{\alpha}{<}\epsilon$ equivale en $\mathbb{R}$ a las desigualdades $\alpha^{-1}(a)-\alpha^{-1}(\epsilon)<\alpha^{-1}(x)<\alpha^{-1}(a)+\alpha^{-1}(\epsilon)$. Se sigue que $B_\alpha(a,\epsilon)=\alpha(B(\alpha^{-1}(a),\alpha^{-1}(\epsilon)))$.

(d_4) Sea $\bar{B}_\alpha(a,\epsilon)=\{x\in\mathbb{R}_\alpha\mid\rho_\alpha(x,a)\overset{\alpha}{\leqslant}\epsilon\}$ una bola cerrada no newtoniana de centro $a\in\mathbb{R}_\alpha$ y radio $\epsilon\overset{\alpha}{>}\alpha(0)$. Si $x\in\bar{B}_\alpha(a,\epsilon)$, entonces se observa de forma análoga al caso anterior que $\rho_\alpha(x,a)\overset{\alpha}{\leqslant}\epsilon$ equivale en $\mathbb{R}$ a $\alpha^{-1}(a)-\alpha^{-1}(\epsilon)\leqslant\alpha^{-1}(x)\leqslant\alpha^{-1}(a)+\alpha^{-1}(\epsilon)$. Luego $\bar{B}_\alpha(a,\epsilon)=\alpha(\bar{B}(\alpha^{-1}(a),\alpha^{-1}(\epsilon)))$.

Las expresiones (d_1)-(d_4) muestran una dependencia entre las topologías de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}_\alpha$. Se recuerda que una base para la topología estándar $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}$ es $\mathcal{B}=\{B(a,\epsilon)\mid a\in\mathbb{R}\text{ y }\epsilon>0\}$, véase [12]. Además, como α es continua, entonces α^{-1} también es continua, ya que α es inyectiva. Se sigue que $\mathcal{B}_\alpha=\{\alpha(B(a,\epsilon))\mid B(a,\epsilon)\in\mathcal{B}\}$ es una base para una topología $\mathcal{T}_\alpha$ de $\mathbb{R}_\alpha$. Se resume esto como sigue:

Teorema 2.7. *$\mathcal{B}_\alpha$ es una base para una topología $\mathcal{T}_\alpha$ de $\mathbb{R}_\alpha$. Esta topología se induce por α a partir de la topología habitual $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}$.*

3. Conceptos de cálculo diferencial no newtoniano

La importancia del teorema 2.7 se debe a la posibilidad de formular aquellos conceptos básicos para funciones newtonianas: límite, continuidad, diferenciabilidad, etc. Esto permite introducir los principios básicos del cálculo no newtoniano. Se supone que $\mathbb{R}_\alpha$ es un conjunto de números reales no newtonianos generado por una función inyectiva y continua $\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, y que $\mathbb{R}_\sigma$ es un conjunto de números reales no newtonianos generado por una función inyectiva y continua $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se supone también que existe un isomorfismo $\iota\colon \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ que posee las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \iota(a \overset{\alpha}{\oplus} b) &= \iota(a) \overset{\sigma}{\oplus} \iota(b), \quad \iota(a \overset{\alpha}{\ominus} b) = \iota(a) \overset{\sigma}{\ominus} \iota(b), \\ \iota(a \overset{\alpha}{\odot} b) &= \iota(a) \overset{\sigma}{\odot} \iota(b), \quad \iota(a \overset{\alpha}{\oslash} b) = \iota(a) \overset{\sigma}{\oslash} \iota(b). \end{aligned} \tag{8}$$

Del orden definido en $\mathbb{R}_\alpha$ y $\mathbb{R}_\sigma$, se sigue que: $a \overset{\alpha}{\leqslant} b$ si y solo si, $\iota(a) \overset{\sigma}{\leqslant} \iota(b)$. Además, $\iota(a) = \sigma(\alpha^{-1}(a))$ para cada $a \in \mathbb{R}_\alpha$ y, en particular, $\iota(\alpha(n)) = \sigma(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se observa también que toda afirmación que se realice con respecto a las operaciones en $\mathbb{R}_\alpha$, se puede transformar en una afirmación equivalente con respecto a las operaciones en $\mathbb{R}_\sigma$, y viceversa, ya que, por ejemplo, $a \overset{\alpha}{\ominus} b = \iota^{-1}(\iota(a) \overset{\sigma}{\ominus} \iota(b))$. El siguiente diagrama ilustra las afirmaciones anteriores:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[dl, shift left, "\alpha"] \arrow[dr, shift right, "\sigma"'] & \\ \mathbb{R}_\alpha \arrow[ur, shift left, "\alpha^{-1}"] \arrow[rr, shift left, "\iota"] & & \mathbb{R}_\sigma \arrow[ul, shift right, "\sigma^{-1}"'] \arrow[ll, shift left, "\iota^{-1}"] \end{tikzcd} \tag{9}$$

El cálculo no newtoniano que se obtiene al considerar funciones que van de $\mathbb{R}_\alpha$ en $\mathbb{R}_\sigma$ es llamado $*$-*cálculo*. En este apartado se presentan algunos resultados del $*$-cálculo, los cuales son una adaptación de [5, 18].

Sea $f\colon \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ y sea $x \in \mathbb{R}_\alpha$. Se dice que $l \in \mathbb{R}_\sigma$ es el $*$-*límite* de f cuando x tiende a $a \in \mathbb{R}_\alpha$, el cual se denota por ${}^*\text{lím}_{x\to a} f(x) = l$, si para todo $\epsilon \overset{\sigma}{>} \sigma(0)$ existe $\delta \overset{\alpha}{>} \alpha(0)$ tal que si $\alpha(0) \overset{\alpha}{<} \rho_\alpha(x,a) \overset{\alpha}{<} \delta$ entonces $\rho_\sigma(f(x),l) \overset{\sigma}{<} \epsilon$. De manera equivalente, $l \in \mathbb{R}_\sigma$ es el $*$-límite de f cuando x tiende a $a \in \mathbb{R}_\alpha$, si para todo $\epsilon \overset{\sigma}{>} \sigma(0)$ existe $\delta \overset{\alpha}{>} \alpha(0)$ tal que si $x \in B_\alpha(a,\delta) \setminus \{a\}$, entonces $f(x) \in B_\sigma(l,\epsilon)$.

Se puede comprobar que si ${}^*\text{lím}_{x\to a} f_1(x) = l_1$ y ${}^*\text{lím}_{x\to a} f_2(x) = l_2$, entonces

$$\begin{aligned} &{}^*\lim_{x\to a}(f_1(x) \overset{\sigma}{\oplus} f_2(x)) = l_1 \overset{\sigma}{\oplus} l_2, \quad {}^*\lim_{x\to a}(f_1(x) \overset{\sigma}{\ominus} f_2(x)) = l_1 \overset{\sigma}{\ominus} l_2, \\ &{}^*\lim_{x\to a}(f_1(x) \overset{\sigma}{\odot} f_2(x)) = l_1 \overset{\sigma}{\odot} l_2, \quad {}^*\lim_{x\to a}(f_1(x) \overset{\sigma}{\oslash} f_2(x)) = l_1 \overset{\sigma}{\oslash} l_2, \end{aligned}$$

donde se ha supuesto en el último límite que $l_2 \neq \sigma(0)$.

Se establece ahora el significado de la expresión ${}^*\text{lím}_{y\to x} f(y) = f(x)$ y se introduce el concepto de $*$-continuidad de una función f en $x \in \mathbb{R}_\alpha$. Se dice que f es $*$-*continua* en $x \in \mathbb{R}_\alpha$, si para todo $\epsilon \overset{\sigma}{>} \sigma(0)$ existe $\delta \overset{\alpha}{>} \alpha(0)$ tal que si $\rho_\alpha(x,z) \overset{\alpha}{<} \delta$ entonces $\rho_\sigma(f(x),f(z)) \overset{\sigma}{<} \epsilon$. De manera equivalente, se dice que f es $*$-*continua* en $x \in \mathbb{R}_\alpha$, si para todo $\epsilon \overset{\sigma}{>} \sigma(0)$ existe $\delta \overset{\alpha}{>} \alpha(0)$ tal que $f(B_\alpha(x,\delta)) \subset B_\sigma(f(x),\epsilon)$. Se puede ver que f es $*$-continua en $x \in \mathbb{R}_\alpha$ si y solo si, ${}^*\text{lím}_{h\to\alpha(0)} f(x \overset{\alpha}{\oplus} h) = f(x)$; es decir, si y solo si, ${}^*\text{lím}_{h\to\alpha(0)}(f(x \overset{\alpha}{\oplus} h) \overset{\sigma}{\ominus} f(x)) = \sigma(0)$. Una función

f es $*$-continua en $[a,b]_\alpha$ si f es $*$-continua para todo $x \in [a,b]_\alpha$. El conjunto de funciones $f\colon \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ que son $*$-continuas en $[a,b]_\alpha$ se denota por $\mathcal{C}_*[a,b]_\alpha$.

Se dice que f es $*$-diferenciable en $x \in \mathbb{R}_\alpha$ si el límite

$$\,^*\!\lim_{h\to\alpha(0)} ((f(x \overset{\alpha}{\oplus} h) \overset{\sigma}{\ominus} f(x)) \overset{\sigma}{\oslash} \iota(h))$$

existe.[1] Se observa que este límite es bien definido, ya que si $h \to \alpha(0)$, entonces $\iota(h) \to \sigma(0)$. En tal caso, la $*$-derivada de f en $x \in \mathbb{R}_\alpha$ se denota por

$$\,^*D_x f(x) = \,^*\!\lim_{h\to\alpha(0)} ((f(x \overset{\alpha}{\oplus} h) \overset{\sigma}{\ominus} f(x)) \overset{\sigma}{\oslash} \iota(h)).$$

Una función f es $*$-diferenciable en $[a,b]_\alpha$ si f es $*$-diferenciable para todo $x \in [a,b]_\alpha$. Se denota por $\mathcal{C}^1_*[a,b]_\alpha$ el conjunto de funciones $f\colon \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ que son $*$-diferenciables en $[a,b]_\alpha$ y tal que su $*$-derivada es $*$-continua sobre $[a,b]_\alpha$.

Se observa que si f es $*$-diferenciable en $x \in \mathbb{R}_\alpha$, entonces f también es $*$-continua en x, lo que se sigue de observar que

$$\begin{aligned}
&\,^*\!\lim_{h\to\alpha(0)} (f(x \overset{\alpha}{\oplus} h) \overset{\sigma}{\ominus} f(x)) \\
&\quad = \,^*\!\lim_{h\to\alpha(0)} (((f(x \overset{\alpha}{\oplus} h) \overset{\sigma}{\ominus} f(x)) \overset{\sigma}{\oslash} \iota(h)) \overset{\sigma}{\odot} \iota(h)) \\
&\quad = \Big(\,^*\!\lim_{h\to\alpha(0)} ((f(x \overset{\alpha}{\oplus} h) \overset{\sigma}{\ominus} f(x)) \overset{\sigma}{\oslash} \iota(h))\Big) \overset{\sigma}{\odot} \Big(\,^*\!\lim_{h\to\alpha(0)} \iota(h)\Big) = \sigma(0).
\end{aligned}$$

Se considera ahora una función arbitraria $f\colon \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ y se elige la función $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_\alpha \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift left, "\alpha^{-1}"] & \mathbb{R}_\sigma \arrow[d, shift left, "\sigma^{-1}"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[u, shift left, "\alpha"] & \mathbb{R} \arrow[u, shift left, "\sigma"]
\end{tikzcd} \tag{10}$$

esto es, tal que $\hat{f}(\alpha^{-1}(x)) = (\sigma^{-1} \circ f \circ \alpha)(\alpha^{-1}(x))$ se satisface para todo $x \in \mathbb{R}_\alpha$.

Empleando la conmutatividad del diagrama (10) y la continuidad de los generadores α y σ, se puede obtener la siguiente equivalencia: $\,^*\!\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ si y solo si, $\lim_{\alpha^{-1}(x)\to\alpha^{-1}(a)} \hat{f}(\alpha^{-1}(x)) = \sigma^{-1}(\ell)$. Lo anterior significa que

$$\,^*\!\lim_{x\to a} f(x) = \sigma\Big(\lim_{\alpha^{-1}(x)\to\alpha^{-1}(a)} \hat{f}(\alpha^{-1}(x))\Big).$$

[1]Un método análogo en el que se emplea el concepto de $*$-gradiente es usado en [5] para introducir la $*$-derivada de una función.

Además, si $f\colon \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ es $*$-diferenciable en $x \in \mathbb{R}_\alpha$, entonces de los diagramas (9) y (10) se sigue una vez más que:

$$\begin{aligned}
{}^{*}D_x f(x) &= \underset{h\to\alpha(0)}{{}^{*}\text{lím}}\big((f(x \overset{\alpha}{\oplus} h) \overset{\sigma}{\ominus} f(x)) \overset{\sigma}{\oslash} \iota(h)\big)\\
&= \lim_{\alpha^{-1}(h)\to 0} \sigma\Big(\frac{\hat{f}(\alpha^{-1}(x)+\alpha^{-1}(h)) - \hat{f}(\alpha^{-1}(x))}{\alpha^{-1}(h)}\Big)\\
&= \sigma(D_{\alpha^{-1}(x)}\hat{f}(\alpha^{-1}(x))),
\end{aligned}$$

siempre que la última derivada exista. Se observa que en la segunda igualdad se ha empleado la identidad $\sigma^{-1}(\iota(h)) = \alpha^{-1}(h)$, la cual es válida para todo $h \in \mathbb{R}_\alpha$, como se observa en el diagrama (9). Por lo tanto

$$ {}^{*}D_x f(x) = \sigma(D_{\alpha^{-1}(x)}\hat{f}(\alpha^{-1}(x))). \tag{11}$$

Las propiedades que se han obtenido se pueden generalizar de forma inductiva. Sea $f\colon \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ una función $*$-diferenciable en $x \in \mathbb{R}_\alpha$. En tal caso, de la expresión (11), se sigue que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_\alpha \arrow[r, "{}^{*}D_x f"] \arrow[d, shift left, "\alpha^{-1}"] & \mathbb{R}_\sigma \arrow[d, shift left, "\sigma^{-1}"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "D_{\alpha^{-1}(x)}\hat{f}"] \arrow[u, shift left, "\alpha"] & \mathbb{R} \arrow[u, shift left, "\sigma"]
\end{tikzcd} \tag{12}$$

Por lo tanto, si la función ${}^{*}D_x f\colon \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ es $*$-diferenciable en $x \in \mathbb{R}_\alpha$, entonces la $*$-derivada de la función ${}^{*}D_x f$ permite obtener la segunda $*$-derivada de la función f en $x \in \mathbb{R}_\alpha$:

$$ {}^{*}D_x^2 f(x) = {}^{*}D_x({}^{*}D_x f(x)).$$

En tal caso, los diagramas (9) y (12) permiten obtener la identidad

$$ {}^{*}D_x^2 f(x) = \sigma(D_{\alpha^{-1}(x)}p(\alpha^{-1}(x))),$$

donde $p(\alpha^{-1}(x)) = (\sigma^{-1}\circ {}^{*}D_x f \circ \alpha)(\alpha^{-1}(x))$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha$. Después de simplificar esta expresión se obtiene

$$ {}^{*}D_x^2 f(x) = \sigma(D^2_{\alpha^{-1}(x)}\hat{f}(\alpha^{-1}(x))). \tag{13}$$

En general, si una función $f\colon \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ posee a lo sumo un cierto número finito de $*$-derivadas en $x \in \mathbb{R}_\alpha$, digamos m, entonces estas $*$-derivadas se pueden obtener de forma recurrente bajo la relación

$$ {}^{*}D_x^k f(x) = {}^{*}D_x({}^{*}D_x^{k-1} f(x)), \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

donde se establece el siguiente convenio natural: ${}^{*}D_x^0 f(x) = f(x)$. Por lo tanto, empleando un diagrama análogo a (12), se puede comprobar que se cumple la identidad

$$ {}^{*}D_x^k f(x) = \sigma(D_{\alpha^{-1}(x)}q(\alpha^{-1}(x))), \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

donde $q(\alpha^{-1}(x)) = (\sigma^{-1} \circ {}^*D_x^{k-1} f \circ \alpha)(\alpha^{-1}(x))$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha$ y, después de simplificar, se encuentra que

$$ {}^*D_x^k f(x) = \sigma(D_{\alpha^{-1}(x)}^k \hat{f}(\alpha^{-1}(x))), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{14}$$

Las propiedades que se han descrito muestran una dependencia entre el cálculo diferencial newtoniano y el cálculo diferencial no newtoniano, lo cual se deriva de la dependencia entre las topologías de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}_\alpha$. Existe una dependencia similar entre el cálculo integral newtoniano y el cálculo integral no newtoniano, la cual se analizará más adelante.

4. Una aplicación a ecuaciones diferenciales lineales no newtonianas con coeficientes constantes

En este apartado se supone que los espacios $\mathbb{R}_\alpha$ y $\mathbb{R}_\sigma$ son generados por funciones inyectivas y continuas $\alpha, \sigma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, respectivamente, y que existe un isomorfismo $\iota \colon \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ que satisface las igualdades (8).

4.1 Ecuación diferencial lineal no newtoniana de primer orden

Empleando la definición de $*$-derivada de una función, las α-operaciones y las σ-operaciones en los correspondientes espacios $\mathbb{R}_\alpha$ y $\mathbb{R}_\sigma$, se considera el problema de hallar la solución $y \colon [x_0, x_1]_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ del siguiente problema no newtoniano de valores iniciales:

$$ {}^*D_x y \overset{\sigma}{\oplus} a_1 \overset{\sigma}{\odot} y = g(x), \quad y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}_\sigma, \tag{15}$$

donde $a_1 \in \mathbb{R}_\sigma$ es constante y $g \colon [x_0, x_1]_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ es una función continua.

Sean $\hat{y}, \hat{g} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones que están asociadas a las funciones y y g, y tales que los siguientes dos diagramas son conmutativos

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_\alpha \arrow[r, "y"] \arrow[d, shift left, "\alpha^{-1}"] & \mathbb{R}_\sigma \arrow[d, shift left, "\sigma^{-1}"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\hat{y}"] \arrow[u, shift left, "\alpha"] & \mathbb{R} \arrow[u, shift left, "\sigma"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_\alpha \arrow[r, "g"] \arrow[d, shift left, "\alpha^{-1}"] & \mathbb{R}_\sigma \arrow[d, shift left, "\sigma^{-1}"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\hat{g}"] \arrow[u, shift left, "\alpha"] & \mathbb{R} \arrow[u, shift left, "\sigma"]
\end{tikzcd}
\tag{16}$$

es decir, tales que se satisface $\hat{y}(\alpha^{-1}(x)) = (\sigma^{-1} \circ y \circ \alpha)(\alpha^{-1}(x))$ y $\hat{g}(\alpha^{-1}(x)) = (\sigma^{-1} \circ g \circ \alpha)(\alpha^{-1}(x))$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha$. Si se emplea (11) y la conmutatividad de los diagramas (16), entonces (15) se puede expresar de forma equivalente como el siguiente problema newtoniano de valores iniciales

$$D_{\hat{x}} \hat{y} + \hat{a}_1 \hat{y} = \hat{g}(\hat{x}), \quad \hat{y}(\hat{x}_0) = \hat{y}_0,$$

donde $\hat{x} = \alpha^{-1}(x)$ para cada $x \in [x_0, x_1]_\alpha$, $\hat{x}_0 = \alpha^{-1}(x_0)$, $\hat{x}_1 = \alpha^{-1}(x_1)$, $\hat{y}_0 = \sigma^{-1}(y_0)$ y $\hat{a}_1 = \sigma^{-1}(a_1)$. La solución de la ecuación diferencial lineal newtoniana es conocida, y esta se obtiene a partir de la fórmula de Cauchy. En tal caso, la solución $\hat{y}\colon [\hat{x}_0, \hat{x}_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es

$$\hat{y}(\hat{x}) = \hat{y}_0 \exp\bigl(-\hat{a}_1(\hat{x} - \hat{x}_0)\bigr) + \int_{\hat{x}_0}^{\hat{x}} \exp\bigl(-\hat{a}_1(\hat{x} - \hat{\eta})\bigr)\hat{g}(\hat{\eta})\,\mathrm{d}\hat{\eta},$$

véase [3]. Por lo tanto, si se emplea una vez más la conmutatividad de los diagramas en (16), se sigue que $y(x) = (\sigma \circ \hat{y})(\alpha^{-1}(x))$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha$. Esto permite obtener la solución de (15), la cual se expresa como

$$y(x) = \sigma(f(x)), \tag{17}$$

donde

$$\begin{aligned} f(x) &= \sigma^{-1}(y_0)\exp\bigl(-\sigma^{-1}(a_1)(\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(x_0))\bigr) \\ &\quad + \int_{\alpha^{-1}(x_0)}^{\alpha^{-1}(x)} \exp\bigl(-\sigma^{-1}(a_1)(\alpha^{-1}(x) - \eta)\bigr)(\sigma^{-1} \circ g \circ \alpha)(\eta)\,\mathrm{d}\eta. \end{aligned}$$

De acuerdo con la exposición anterior, se puede mostrar que es posible establecer métodos de solución para ecuaciones diferenciales no newtonianas de primer orden, del mismo modo como se realiza en el cálculo newtoniano.

Ejemplo 4.1. Se elige $a_1 = \sigma(1)$ y se considera un caso particular del problema no newtoniano de valores iniciales (15) definido en el intervalo $[\alpha(0), \alpha(2)]_\alpha$ por

$$^{*}D_x y \overset{\sigma}{\oplus} \sigma(1) \overset{\sigma}{\odot} y = \sigma(8), \quad y(\alpha(0)) = \sigma(0).$$

Con el fin de comparar las soluciones de esta ecuación diferencial, se fija el espacio $\mathbb{R}_\sigma$ eligiendo $\sigma(x) = x^2$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\sigma^{-1}(x) = \sqrt{x}$ para cada $x \in \mathbb{R}_\sigma = \mathbb{R}^+$ y se consideran diferentes espacios $\mathbb{R}_\alpha$.

Si se elige $\alpha(x) = \exp(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha^{-1}(x) = \ln(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}^+$, esto es, si se supone que en $\mathbb{R}_\alpha$ se define un cálculo multiplicativo, entonces la solución $y_1\colon [1, e^2]_{\exp} \to \mathbb{R}_\sigma$ de (15) se representa por

$$y_1(x) = 8x^{-2}(-1 + x)^2.$$

Además, si ahora se elige $\alpha(x) = \kappa^{-1}\operatorname{senh}(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha^{-1}(x) = \operatorname{arcsenh}(\kappa x)$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}$, es decir, si en $\mathbb{R}_\alpha$ se considera un κ-cálculo de Kaniadakis, entonces la correspondiente solución $y_2\colon [0, \kappa^{-1}\operatorname{senh}(2)]_\kappa \to \mathbb{R}_\sigma$ de (15) se representa por

$$y_2(x) = 8(-1 + \exp(-\operatorname{arcsenh}(\kappa x)))^2.$$

Por otra parte, si se elige $\alpha(x) = x^3$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}$, entonces la solución $y_3\colon [0, 8]_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ de (15) se representa por

$$y_3(x) = 8(-1 + \exp(-x^{1/3}))^2.$$

Finalmente, si ahora se elige $\alpha(x) = x$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha^{-1}(x) = x$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}$, es decir, si en $\mathbb{R}_\alpha$ se considera un cálculo newtoniano, entonces la correspondiente solución $y_4\colon [0,2] \to \mathbb{R}_\sigma$ de (15) se representa por

$$y_4(x) = 8(-1 + \exp(-x))^2.$$

Las gráficas correspondientes se muestran en la figura 1.

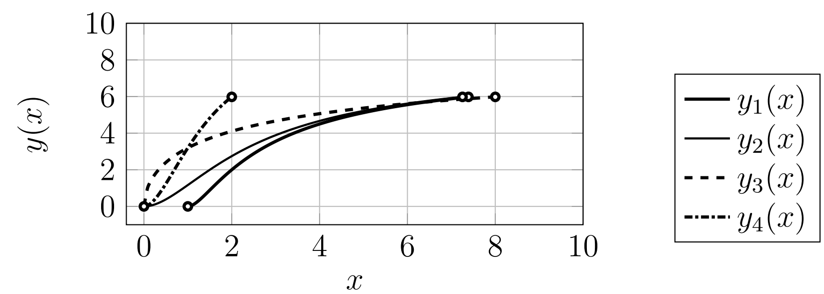

Figura 1. Gráficas de $y_1(x), \ldots, y_4(x)$ con $\kappa = \frac{1}{2}$.

Se termina este apartado con algunas implicaciones que surgen de forma natural de la solución del problema no newtoniano de valores iniciales (15) y que son de utilidad en el $*$-cálculo.

(e_1) Si en (15) se elige $a_1 = \sigma(0)$ y se supone que $x_0 = a$, $x_1 = b$ y $y_0 = \sigma(0)$, entonces se obtiene

$$^{*}D_x y = g(x), \quad y(a) = \sigma(0).$$

La correspondiente solución es $y(x) = \sigma\big(\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(x)} (\sigma^{-1} \circ g \circ \alpha)(\eta)\, \mathrm{d}\eta\big)$, de acuerdo con (17). Tomando en cuenta que la $*$-integral es la operación inversa de la $*$-derivada, la expresión anterior permite introducir la $*$-*integral* de la función g en el intervalo $[a,b]_\alpha$, la cual se denota por ${}^{*}\!\int_a^x g(\eta)\, \mathrm{d}\eta$. Así, la $*$-integral de g para $x \in [a,b]_\alpha$ satisface:

$${}^{*}\!\int_a^x g(\eta)\, \mathrm{d}\eta = \sigma\bigg(\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(x)} (\sigma^{-1} \circ g \circ \alpha)(\eta)\, \mathrm{d}\eta\bigg).$$

Otro método de exposición para esta fórmula se presentan en [6, 7].

(e_2) Si en (15) se elige $a_1 = \sigma(-1)$, se supone que $x_0 = \sigma(0)$, $x_1 = b$, $y_0 = \sigma(1)$, y se supone que $g(x) = \sigma(0)$ para cada $x \in [a,b]_\alpha$, entonces se obtiene

$$^{*}D_x y = y, \quad y(a) = \sigma(1).$$

La solución se expresa como $y(x) = \sigma(\exp(\alpha^{-1}(x)))$, de acuerdo con (17). Una propiedad de la función exponencial en el cálculo newtoniano es que ella coincide con su derivada, considerando esto válido en el cálculo no newtoniano, se introduce la $*$-*función exponencial*, ${}^*\exp\colon \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$, definida como

$$ {}^*\exp(x) = \sigma(\exp(\alpha^{-1}(x))), \quad x \in \mathbb{R}_\alpha. $$

Se puede comprobar que si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_\alpha$, entonces se cumple la identidad ${}^*\exp(x_1 \overset{\alpha}{\oplus} x_2) = {}^*\exp(x_1) \overset{\sigma}{\odot} {}^*\exp(x_2)$.

(e_3) Empleando la $*$-*función exponencial*, se define la $*$-*función logaritmo natural*, ${}^*\ln\colon \mathbb{R}_\alpha^+ \to \mathbb{R}_\sigma$, como aquella función que satisface: $y = {}^*\ln(x)$ si y solo si, ${}^*\exp(y) = x$. Se puede comprobar que si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_\alpha^+$, entonces se cumple ${}^*\ln(x_1 \overset{\alpha}{\odot} x_2) = {}^*\ln(x_1) \overset{\sigma}{\oplus} {}^*\ln(x_2)$ y ${}^*\ln(x_1 \overset{\alpha}{\oslash} x_2) = {}^*\ln(x_1) \overset{\sigma}{\ominus} {}^*\ln(x_2)$.

4.2 Ecuación diferencial lineal no newtoniana de segundo orden

Empleando el método del apartado anterior, se considera el problema de encontrar la solución $y\colon [x_0, x_1]_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ del problema no newtoniano de valores iniciales:

$$ {}^*D_x^2 y \overset{\sigma}{\oplus} a_2 \overset{\sigma}{\odot} {}^*D_x y \overset{\sigma}{\oplus} a_1 \overset{\sigma}{\odot} y = g(x), \;\; y(x_0) = y_0^1, \; {}^*D_x y(x_0) = y_0^2, \tag{18} $$

donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_\sigma$ son constantes y $g\colon [x_0, x_1]_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ es una función continua.

Se consideran las funciones $D_{\alpha^{-1}(x)}\hat{y}, \hat{y}, \hat{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que son asociadas a las funciones ${}^*D_x y$, y y g, y tales que los siguientes tres diagramas son conmutativos

$$ \begin{tikzcd} \mathbb{R}_\alpha \arrow[r, "{}^*D_x y"] \arrow[d, shift left, "\alpha^{-1}"] & \mathbb{R}_\sigma \arrow[d, shift left, "\sigma^{-1}"] & \mathbb{R}_\alpha \arrow[r, "y"] \arrow[d, shift left, "\alpha^{-1}"] & \mathbb{R}_\sigma \arrow[d, shift left, "\sigma^{-1}"] & \mathbb{R}_\alpha \arrow[r, "g"] \arrow[d, shift left, "\alpha^{-1}"] & \mathbb{R}_\sigma \arrow[d, shift left, "\sigma^{-1}"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "D_{\alpha^{-1}(x)}\hat{y}"] \arrow[u, shift left, "\alpha"] & \mathbb{R} \arrow[u, shift left, "\sigma"] & \mathbb{R} \arrow[r, "\hat{y}"] \arrow[u, shift left, "\alpha"] & \mathbb{R} \arrow[u, shift left, "\sigma"] & \mathbb{R} \arrow[r, "\hat{g}"] \arrow[u, shift left, "\alpha"] & \mathbb{R} \arrow[u, shift left, "\sigma"] \end{tikzcd} \tag{19} $$

esto es, de tal manera que: $D_{\alpha^{-1}(x)}\hat{y}(\alpha^{-1}(x)) = (\sigma^{-1} \circ {}^*D_x y \circ \alpha)(\alpha^{-1}(x))$, $\hat{y}(\alpha^{-1}(x)) = (\sigma^{-1} \circ y \circ \alpha)(\alpha^{-1}(x))$ y $\hat{g}(\alpha^{-1}(x)) = (\sigma^{-1} \circ g \circ \alpha)(\alpha^{-1}(x))$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha$. Si se emplea (11) y (13), y la conmutatividad de los diagramas (19), entonces (18) se puede expresar de forma equivalente como la siguiente ecuación diferencial newtoniana de segundo orden

$$ D_{\hat{x}}^2 \hat{y} + \hat{a}_2 D_{\hat{x}} \hat{y} + \hat{a}_1 \hat{y} = \hat{g}(\hat{x}), \;\; \hat{y}(\hat{x}_0) = \hat{y}_0^1, \; D_{\hat{x}}\hat{y}(\hat{x}_0) = \hat{y}_0^2, $$

donde $\hat{x} = \alpha^{-1}(x)$ para cada $x \in [x_0, x_1]_\alpha$, $\hat{x}_0 = \alpha^{-1}(x_0)$, $\hat{x}_1 = \alpha^{-1}(x_1)$, $\hat{y}_0^1 = \sigma^{-1}(y_0^1)$, $\hat{y}_0^2 = \sigma^{-1}(y_0^2)$, $\hat{a}_1 = \sigma^{-1}(a_1)$ y $\hat{a}_2 = \sigma^{-1}(a_2)$. Los métodos que se emplean para determinar la solución del problema newtoniano de valores iniciales anterior son conocidos, por ejemplo, el método de variación de parámetros. De acuerdo con este método, la solución de la ecuación diferencial lineal newtoniana se expresa como

$$ \hat{y}(\hat{x}) = c_1 \hat{y}_1(\hat{x}) + c_2 \hat{y}_2(\hat{x}) + \hat{Y}(\hat{x}), $$

donde c_1 y c_2 son constantes que depende de las condiciones iniciales, $\hat{y}_1(\hat{x})$ y $\hat{y}_2(\hat{x})$ conforman el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal newtoniana homogénea asociada, y

$$\hat{Y}(\hat{x}) = -\hat{y}_1(\hat{x}) \int \frac{\hat{y}_2(\hat{x})\hat{g}(\hat{x})}{W[\hat{y}_1, \hat{y}_2](\hat{x})} \,\mathrm{d}\hat{x} + \hat{y}_2(\hat{x}) \int \frac{\hat{y}_1(\hat{x})\hat{g}(\hat{x})}{W[\hat{y}_1, \hat{y}_2](\hat{x})} \,\mathrm{d}\hat{x},$$

donde $W[\hat{y}_1, \hat{y}_2](\hat{x})$ denota el wronskiano:

$$W[\hat{y}_1, \hat{y}_2](\hat{x}) = \det \begin{bmatrix} \hat{y}_1(\hat{x}) & \hat{y}_2(\hat{x}) \\ D_{\hat{x}}\hat{y}_1(\hat{x}) & D_{\hat{x}}\hat{y}_2(\hat{x}) \end{bmatrix}.$$

En el caso descrito, las funciones $\hat{y}_1(\hat{x})$ y $\hat{y}_2(\hat{x})$ dependen de las raíces de la ecuación característica $r^2 + \hat{a}_2 r + \hat{a}_1 = 0$, véase [3]. Por lo tanto, dado que $y(x) = (\sigma \circ \hat{y})(\alpha^{-1}(x))$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha$, se sigue que la solución del problema no newtoniano de valores iniciales (18) tiene la forma

$$y(x) = \sigma\big(c_1\hat{y}_1(\alpha^{-1}(x)) + c_2\hat{y}_2(\alpha^{-1}(x)) + \hat{Y}(\alpha^{-1}(x))\big). \tag{20}$$

Ejemplo 4.2. Se eligen μ y ω tales que $0 < \mu < \omega$ y se supone que $a_1 = \sigma(2\mu)$ y $a_2 = \sigma(\omega^2)$. Para estos valores se considera un caso particular de (18) definida en $[\alpha(0), \alpha(2)]_\alpha$:

$$\begin{aligned} &{}^*D_x^2 y \overset{\sigma}{\oplus} \sigma(2\mu) \overset{\sigma}{\odot} {}^*D_x y \overset{\sigma}{\oplus} \sigma(\omega^2) \overset{\sigma}{\odot} y = \sigma(0) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad y(\sigma(0)) = \sigma(3), \quad {}^*D_x y(\sigma(0)) = \sigma(0). \end{aligned}$$

Siguiendo el razonamiento del ejemplo 4.1, se fija el espacio $\mathbb{R}_\sigma$ eligiendo $\sigma(x) = x^2$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\sigma^{-1}(x) = \sqrt{x}$ para cada $x \in \mathbb{R}_\sigma = \mathbb{R}^+$ y se consideran diferentes espacios $\mathbb{R}_\alpha$. Se define $\beta = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$.

Si se elige $\alpha(x) = \exp(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha^{-1}(x) = \ln(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}^+$, esto es, si se supone que en $\mathbb{R}_\alpha$ se define un cálculo multiplicativo, entonces la solución $y_1\colon [1, e^2]_{\exp} \to \mathbb{R}_\sigma$ de (18) se representa por

$$y_1(x) = 9x^{-2\mu}\big(\cos(\beta \ln(x)) + \tfrac{\mu}{\beta} \operatorname{sen}(\beta \ln(x))\big)^2.$$

Adermás, si se elige $\alpha(x) = \kappa^{-1} \operatorname{senh}(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha^{-1}(x) = \operatorname{arcsenh}(\kappa x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, es decir, si en $\mathbb{R}_\alpha$ se considera un κ-cálculo de Kaniadakis, entonces la solución $y_2\colon [1, \kappa^{-1} \operatorname{senh}(2)]_\kappa \to \mathbb{R}_\sigma$ de (18) se representa por

$$\begin{aligned} y_2(x) = 9 \exp\big(&-2\mu \operatorname{arcsenh}(\kappa x)\big) \cdot \\ &\Big(\cos\big(\beta \operatorname{arcsenh}(\kappa x)\big) + \tfrac{\mu}{\beta} \operatorname{sen}\big(\beta \operatorname{arcsenh}(\kappa x)\big)\Big)^2. \end{aligned}$$

Por otra parte, si se elige $\alpha(x) = x^3$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}$, entonces la solución $y_3\colon [0, 8]_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ de (18) se representa por

$$y_3(x) = 9 \exp\big(-2\mu x^{1/3}\big)\Big(\cos\big(\beta x^{1/3}\big) + \tfrac{\mu}{\beta} \operatorname{sen}\big(\beta x^{1/3}\big)\Big)^2.$$

Finalmente, si se elige $\alpha(x) = x$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha^{-1}(x) = x$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}$, entonces la solución $y_4 \colon [0,2] \to \mathbb{R}_\sigma$ de (18) se representa por

$$y_4(x) = 9\exp(-2\mu x)\big(\cos(\beta x) + \tfrac{\mu}{\beta}\operatorname{sen}(\beta x)\big)^2.$$

Las gráficas se muestran en la figura 2. Se observa que la ecuación newtoniana asociada, describe la dinámica de un oscilador amortiguado, y que la dinámica en el caso no newtoniano es analóga al caso newtoniano.

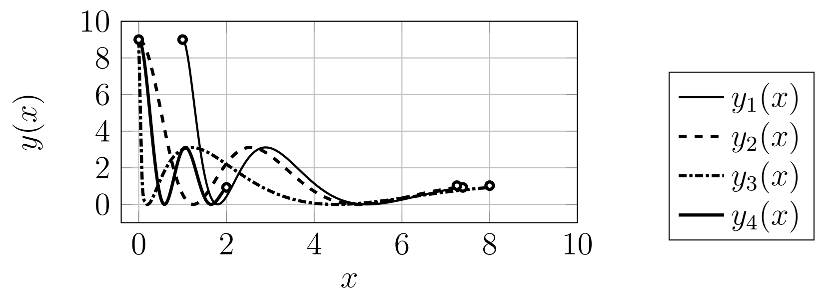

Figura 2. Gráficas de $y_1(x), \ldots, y_4(x)$ con $\mu = \frac{1}{2}$, $\omega = 3$ y $\kappa = \frac{1}{2}$.

Se obtienen algunas implicaciones que surgen de forma natural de la solución del problema no newtoniano de valores iniciales (18) y que son de utilidad en el $*$-cálculo.

(e_4) Se supone que $[x_0, x_1]_\alpha = [\alpha(0), \alpha(n\pi)]_\alpha$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Se elige $a_2 = \sigma(0)$, $a_1 = \sigma(1)$, $y_0^1 = \sigma(1)$, $y_0^2 = \sigma(0)$ y $g(x) = \sigma(0)$ para cada $x \in [\alpha(0), \alpha(n\pi)]_\alpha$. Entonces se obtiene

$${}^*D_x^2 y = \sigma(-1) \overset{\sigma}{\odot} y, \;\; y(\alpha(0)) = \sigma(1), \; {}^*D_x y(\alpha(0)) = \sigma(0).$$

De acuerdo con la expresión (20), la solución correspondiente se describe por $y(x) = \sigma(\cos(\alpha^{-1}(x)))$. Una propiedad de la función coseno en el cálculo newtoniano es que tal función coincide con el inverso aditivo de su segunda derivada, suponiendo que esta propiedad es válida en el cálculo no newtoniano, la expresión anterior permite introducir la $*$-*función coseno*, ${}^*\cos \colon \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$, definida por

$${}^*\cos(x) = \sigma(\cos(\alpha^{-1}(x))), \quad x \in \mathbb{R}_\alpha.$$

Además, si en la ecuación diferencial se elige $a_2 = \sigma(0)$, $a_1 = \sigma(1)$, $y_0^1 = \sigma(0)$, $y_0^2 = \sigma(1)$ y $g(x) = \sigma(0)$ para cada $x \in [\alpha(0), \alpha(n\pi)]_\alpha$, entonces la solución de la ecuación diferencial permite introducir la $*$-*función seno*, ${}^*\operatorname{sen} \colon \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$, definida como

$${}^*\operatorname{sen}(x) = \sigma(\operatorname{sen}(\alpha^{-1}(x))), \quad x \in \mathbb{R}_\alpha.$$

Con ayuda de (4) se comprueba que ${}^*\cos^{\sigma(2)}(x) = \sigma(\cos^2(\sigma^{-1}(x)))$ y que ${}^*\operatorname{sen}^{\sigma(2)}(x) = \sigma(\operatorname{sen}^2(\sigma^{-1}(x)))$, lo cual permite comprobar la identidad: ${}^{*}\!\cos^{\sigma(2)}(x) \overset{\sigma}{\oplus} {}^{*}\!\operatorname{sen}^{\sigma(2)}(x) = \sigma(1)$, $x \in \mathbb{R}_\alpha$. Por otra parte, si se definen las $*$-*funciones secante, tangente, cosecante y cotangente*, como

$$
\begin{aligned}
{}^{*}\!\sec(x) &= \sigma(1) \overset{\sigma}{\oslash} {}^{*}\!\cos(x), \quad {}^{*}\!\tan(x) = {}^{*}\!\operatorname{sen}(x) \overset{\sigma}{\oslash} {}^{*}\!\cos(x),\\
{}^{*}\!\csc(x) &= \sigma(1) \overset{\sigma}{\oslash} {}^{*}\!\operatorname{sen}(x), \quad {}^{*}\!\cot(x) = {}^{*}\!\cos(x) \overset{\sigma}{\oslash} {}^{*}\!\operatorname{sen}(x),
\end{aligned}
$$

entonces se puede ver que estas $*$-funciones trigonométricas cumplen las siguientes dos identidades: ${}^{*}\!\tan^{\sigma(2)}(x) \overset{\sigma}{\oplus} \sigma(1) = {}^{*}\!\sec^{\sigma(2)}(x)$ y ${}^{*}\!\cot^{\sigma(2)}(x) \overset{\sigma}{\oplus} \sigma(1) = {}^{*}\!\csc^{\sigma(2)}(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha$. Se puede comprobar que las identidades que satisfacen las funciones trigonométricas las satisfacen también las $*$-funciones trigonométricas, bajo las correspondientes σ-operaciones.

4.3 Ecuaciones diferenciales lineales no newtonianas de orden m

Los casos que se describieron en los apartados previos, permiten presentar un breve comentario sobre el procedimiento general que se debe seguir en el problema de determinar la solución $y\colon [x_0, x_1]_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ del problema no newtoniano de valores iniciales:

$$
\begin{aligned}
&{}^{*}\!D_x^m y \overset{\sigma}{\oplus} a_m \overset{\sigma}{\odot} {}^{*}\!D_x^{m-1} y \overset{\sigma}{\oplus} \cdots \overset{\sigma}{\oplus} a_2 \overset{\sigma}{\odot} {}^{*}\!D_x y \overset{\sigma}{\oplus} a_1 \overset{\sigma}{\odot} y = g(x),\\
&\qquad\qquad y(x_0) = y_0^1,\ {}^{*}\!D_x y(x_0) = y_0^2,\ \ldots,\ {}^{*}\!D_x^{m-1} y(x_0) = y_0^{m-1},
\end{aligned}
$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}_\sigma$ son constantes, $g\colon [x_0, x_1]_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\sigma$ es una función continua y las $*$-derivadas ${}^{*}\!D_x^k y$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$, se determinan de acuerdo con las fórmula recurrente (14). Se puede comprobar que el problema no newtoniano de valores iniciales anterior, se puede expresar de forma equivalente al siguiente problema newtoniano de valores iniciales

$$
\begin{aligned}
&D_{\hat{x}}^m \hat{y} + \hat{a}_m D_{\hat{x}}^{m-1} \hat{y} + \cdots + \hat{a}_2 D_{\hat{x}}^1 \hat{y} + \hat{a}_1 \hat{y} = \hat{g}(\hat{x}),\\
&\qquad\qquad \hat{y}(\hat{x}_0) = \hat{y}_0^1,\ D_{\hat{x}} \hat{y}(\hat{x}_0) = \hat{y}_0^2,\ \ldots,\ D_{\hat{x}}^{m-1} \hat{y}(\hat{x}_0) = \hat{y}_0^m,
\end{aligned}
$$

donde $\hat{x} = \alpha^{-1}(x)$ para cada $x \in [x_0, x_1]$, $\hat{x}_0 = \alpha^{-1}(x_0)$, $\hat{x}_1 = \alpha^{-1}(x_1)$, $\hat{a}_k = \sigma^{-1}(a_k)$ y $\hat{y}_0^k = \sigma^{-1}(y_0^k)$ para $k = 1, \ldots, m-1$, y donde la relación que existe entre las funciones incógnitas de ambos problemas de valores iniciales es $y(x) = (\sigma \circ \hat{y})(\alpha^{-1}(x))$ para cada $x \in [x_0, x_1]_\alpha$.

La importancia de esta relación se debe al siguiente hecho: *después de resolver el problema newtoniano de valores iniciales, se puede obtener, bajo tal relación, el problema no newtoniano de valores iniciales.* ¡Se invita al lector a comprobar que esto es así!

Agradecimientos. El autor agradece a los revisores por las observaciones que sin duda contribuyeron a la mejora de esta exposición.

Bibliografía

[1] A. E. Bashirov, E. M. Kurpınar y A. Özyapıcı, «Multiplicative calculus and its applications», *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 337, 2008, 36–48.

[2] A. E. Bashirov, E. Mısırlı, Y. Tandoğdu y A. Özyapıcı, «On modeling with multiplicative differential equations», *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, vol. 26, núm. 4, 2011, 425–438.

[3] W. E. Boyce, R. C. DiPrima y D. B. Meade, *Elementary differential equations and boundary value problems*, 11.ª ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 2017.

[4] A. F. Çakmak y F. Başar, «Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus», *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2012, núm. 1, 2012, 228.

[5] ———, «Certain spaces of functions over the field of non-newtonian complex numbers», *Abstract and Applied Analysis*, 2014, 236124.

[6] M. Czachor, «Unifying aspects of generalized calculus», *Entropy*, vol. 22, núm. 10, 2020, 1–20.

[7] ———, «Non-Newtonian mathematics instead of non-Newtonian physics: dark matter and dark energy from a mismatch of arithmetics», *Foundations of Science*, vol. 26, 2021, 75–95.

[8] W. Dunham, *The calculus gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue*, Princeton University Press, New Jersey, 2005.

[9] M. Grossman y R. Katz, *Non-Newtonian calculus*, Lee Press, Pigeon Cove, Massachusetts, 1972.

[10] T. Gülşen, «Some approaches for solving multiplicative second-order linear differential equations with variable exponentials and multiplicative Airy's equation», *Turkish Journal of Science and Technology*, vol. 18, núm. 2, 2023, 301–309.

[11] A. Kaabouchi, L. Nivanen, Q. Wang, J. Badiali y A. Méhauté, «A mathematical structure for the generalization of conventional algebra», *Open Physics*, vol. 7, núm. 3, 2009, 549–554.

[12] S. Kalajdzievski, *An illustrated introduction to topology and homotopy*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2015.

[13] G. Kaniadakis, «Statistical mechanics in the context of special relativity», *Physical Review E*, vol. 66, 2002, 056125.

[14] ———, «Statistical mechanics in the context of special relativity. II.», *Physical Review E*, vol. 72, 2005, 036108.

[15] G. Kaniadakis, «Theoretical foundations and mathematical formalism of the power-law tailed statistical distributions», *Entropy*, vol. 15, núm. 10, 2013, 3983–4010.

[16] G. Kaniadakis, M. M. Baldi, T. S. Deisboeck, G. Grisolia, D. T. Hristopulos, A. M. Scarfone, A. Sparavigna, T. Wada y U. Lucia, «The κ-statistics approach to epidemiology», *Scientific Reports*, vol. 10, 2020, 19949.

[17] M. Pinto, R. Torres, W. Campillay-Llanos y F. Guevara-Morales, «Applications of proportional calculus and non-Newtonian logistic growth model», *Proyecciones (Antofagasta)*, vol. 39, núm. 6, 2020, 1471–1513.

[18] S. Sivasundaram, U. Kadak y H. Efe, «The construction of Hilbert spaces over the non-Newtonian field», *International Journal of Analysis*, 2014, 746059.

[19] D. Stanley, «A multiplicative calculus», *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, vol. 10, núm. 4, 1999, 310–326.

[20] B. Turan y Çevik, «A note on the equivalence of some metric and non-Newtonian metric results», *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, vol. 7, 2017, 56–58.