

Teorema de la función implícita: un breve recorrido conceptual y una extensión

Jorge Rivera-Noriega

Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México
rnoriega@itam.mx

1. ¿Qué se espera que sea un «teorema de la función implícita»?

Funciones y funciones implícitas

El concepto matemático de *función* ha evolucionado, y aunque hay controversias académicas en lo que se refiere a sus orígenes (véase [14]), podemos adherirnos a la noción moderna que aprendemos en cursos básicos, que en breve dice que una función es una *relación* entre dos conjuntos X y Y (en donde bien podría ocurrir que $Y = X$), donde a *todo elemento* del conjunto X se le asigna *uno y solo un elemento* del conjunto Y . A los elementos de X se les denomina también como la *variable independiente* y a los de Y la *variable dependiente*.

La asignación puede ser a través de reglas verbales, analíticas o tablas, por ejemplo. Pero para lo que describiremos en este trabajo usaremos la idea (usada al menos desde Descartes) de que la regla de asignación está dada analíticamente por una fórmula que involucra operaciones en la variable en X .

Así, escribimos $y = f(x)$ para describir que la variable y depende de x a través de cierta regla de asignación abreviada por f . La variable independiente es x y la dependiente es y .

La pregunta que podría servir como punto de partida para motivar un *teorema de la función implícita* podría plantearse del siguiente modo:

Iniciando con una expresión algebraica $F(x, y)$ de las variables $x, y \in \mathbb{R}$, nos preguntamos si es posible que la

Palabras clave: Teorema de la función implícita, exposición panorámica.

Este artículo forma parte de la celebración por los 50 años de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas en el Instituto Tecnológico Autónomo de México.

relación $F(x, y) = 0$ puede describirse de modo que la variable y sea función (en el sentido antes descrito), de la variable x , incluso si esto es posible solo en una vecindad de x .

Para fijar ideas, siguiendo parcialmente a [6], podemos tomar las expresiones $x^2 + y^2 - 1$ o bien $y^5 + 16y - 32x^3 + 32x$ que llevarían a las ecuaciones

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0.$$

Con un cálculo inmediato obtenemos de la primera ecuación $|y| = \sqrt{1 - x^2}$, que a su vez nos lleva a dos expresiones en las que y es función de x , es decir $y = y(x)$:

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = -\sqrt{1 - x^2}. \quad (1)$$

Ambas expresiones tienen un significado geométrico bien preciso, como los «*hemisferios*» superior e inferior de la circunferencia unitaria, respectivamente.

Por otro lado, no es claro que a partir de $y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$ podamos hacer que y se escriba (se «despeje») en términos de x de manera única. Sin embargo, se puede demostrar (y así lo haremos) que dada $x \in \mathbb{R}$ se puede asignar un único valor $y \in \mathbb{R}$ tal que se cumple $y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$. O sea, que esta última expresión nos está describiendo *de manera implícita* la variable y como función de x , aunque no es obvio que podemos escribir dicha función explícitamente.

Para fundamentar esta última aseveración, podemos usar ideas del *cálculo diferencial e integral* o del *análisis matemático básico*, a las que en adelante nos referiremos solo como «ideas del *cálculo*» o frases coloquiales similares.

Fijemos x_0 y sea $G(y) = y^5 + 16y - 32x_0^3 + 32x_0$ como función de la variable y . Buscamos ahora el valor y_0 que pueda ser asignado de manera única a x_0 , para lo cual esencialmente queremos que se cumpla $G(y_0) = 0$; así tendríamos $y_0^5 + 16y_0 - 32x_0^3 + 32x_0 = 0$, según se quería. Ahora, vayamos a los detalles.

Como las potencias en G de la variable y son impares, se tiene que cumplir que para algún entero negativo n_1 se cumplirá $G(n_1) < 0$ y para algún entero positivo n_2 tendremos $G(n_2) > 0$. Por el *teorema del valor intermedio de Bolzano* existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $G(y_0) = 0$. Y como además $G'(y) = 5y^4 + 16 > 0$ para toda $y \in \mathbb{R}$, se tiene una función estrictamente creciente de la variable y , por lo que este valor y_0 es único. Así, podemos asignar unívocamente y_0 a x_0 , aún sin saber la fórmula analítica de asignación.

El uso de una aproximación lineal y una conjetura

Este último argumento podría ya sugerir el uso del *cálculo* para decidir si una variable puede ponerse en función de la otra, aún sin conocer la regla de asignación explícitamente. Sin embargo, adoptaremos un punto de vista un poco diferente y en cierto modo más general, pero todavía haciendo uso de ideas del *cálculo*.

Si suponemos que $F(x, y) = ax + by$, entonces se puede, por ejemplo, obtener a partir de $F(x, y) = 0$ a y como función de x , siempre que $b \neq 0$: $y = -\frac{a}{b}x$. Una idea similar aplica cuando $a \neq 0$, y se tendría

x como función de y : $x = -\frac{b}{a}y$. Por supuesto no es interesante el caso en que $a = b = 0$, por lo que una de las opciones anteriores deberá cumplirse.

Para una expresión $F(x, y)$ que no es necesariamente lineal en (x, y) , las ideas del *cálculo* pueden sugerir el uso de la aproximación lineal dada por la *matriz derivada*, que en este caso toma la forma del *vector gradiente* $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)$.

Pero la pregunta sería ***¿cómo puede la aproximación lineal arrojar luz y dar una idea de que en efecto se puede despejar una variable en términos de la otra?***

Recordemos que ∇F da lugar a una aproximación lineal de F en $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, al escribir lo que significa que F sea diferenciable en (a, b) . En efecto, se debe cumplir

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{F(x, y) - [F(a, b) + \nabla F((a, b) \cdot (x - a, y - b))]}{\|(x - a, y - b)\|} = 0,$$

donde la aproximación lineal será la función

$$\begin{aligned} H(x, y) &= F(a, b) + \nabla F(a, b) \cdot (x - a, y - b) \\ &= F(a, b) + \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(a,b)} \cdot (x - a) + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(a,b)} \cdot (y - b). \end{aligned} \quad (2)$$

Hacemos notar que en la primera identidad de esta expresión hemos usado la notación *estándar* del producto punto entre vectores de $\mathbb{R}^n$. Para esta función lineal, la condición que se tendría que cumplir para poner a la variable y en términos de la variable x , sería $\frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(a,b)} \neq 0$.

Podemos ahora revisar el ejemplo de $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, para la cual pudimos obtener en (1) una forma explícita de regla de asignación de x , dividida en dos partes. En este caso, tenemos la

aproximación lineal dada por

$$\begin{aligned} H(x, y) &= 0 + 2a(x - a) + 2b(y - b) = 2ax + 2by - 2(a^2 + b^2) \\ &= 2ax + 2by - 2 = 2(ax + by - 1). \end{aligned}$$

Como originalmente estaríamos pidiendo que se cumpla $H(x, y) = 0$, el razonamiento anterior nos lleva a que se debe cumplir $ax + by = 1$. Si ahora $b \neq 0$ entonces podemos despejar y obtener $y = -\frac{a}{b}x + \frac{1}{b}$. Si $b = 0$ esto no es posible, pero se puede poner x en función de y , suponiendo $a \neq 0$.

Ahora bien, de vuelta a la ecuación original $F(x, y) = 0$, que no era lineal, la imposibilidad de despejar a y como función de x cuando $b = 0$ puede visualizarse de dos modos:

- (Geométricamente) Los puntos de la forma $(a, 0)$ que cumplan la ecuación $F(x, y) = 0$ son los dos puntos «ecuatoriales» de la circunferencia unitaria, donde se tiene una tangente vertical, por lo que no se puede poner a y en función de x .
- (Analíticamente) La condición $b \neq 0$ es realmente $\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(a,b)} \neq 0$, por lo que podemos leerlo como una condición que garantiza que ∇F no es un vector nulo. O en lenguaje de Álgebra Lineal: el rango de ∇F (visto como matriz 1×2) es 1.

Podemos entonces comenzar a conjeturar, que cuando en la aproximación lineal podemos despejar una variable en términos de la otra, entonces podemos hacer el mismo tipo de despeje en la función original.

Ejemplo

Avanzando en nuestras descripciones, para apreciar mejor el punto de vista que el álgebra lineal aporta, consideremos un sistema, no necesariamente lineal, de dos ecuaciones en tres variables (x, y, z) , digamos

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = C_1, \\ F_2(x, y, z) = C_2, \end{cases} \quad \text{para ciertas constantes } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Iniciemos planteando la pregunta de si es posible escribir dos de las variables en función de la tercera, por ejemplo, $y = y(x)$, $z = z(x)$, o cualquiera de las otras posibles variantes.

De nuevo comenzamos nuestro análisis suponiendo linealidad de la o las ecuaciones, en nuestro caso, linealidad de F_1 y F_2 . Tenemos entonces una matriz 2×3 , y para que dos variables se puedan poner en función de la tercera, se requiere que la matriz tenga rango 2. Por ejemplo consideremos el sistema lineal $\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ y - z = 0 \end{cases}$. Aquí no es difícil ver

que se pueden escribir $y = y(z)$, $x = x(z)$ (todo en función de z), o bien $z = z(y)$, $x = x(y)$ (todo en función de y), o bien $y = y(x)$, $z = z(x)$ (todo en función de x). De hecho, al observar detalladamente la forma de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ de los coeficientes del sistema notamos que tiene rango 2, y que cualquier par de columnas son linealmente independientes, indicando que las variables de ese par puede escribirse en términos de la variable de la tercera columna.

Solo para contrastar, observemos que este no sería el caso si tuviéramos la matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ que corresponde por ejemplo al sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$. Aquí se podría conjeturar que podemos escribir $x = x(z)$, $y = y(z)$ o bien $x = x(y)$, $z = z(y)$. Pero dado que se puede obtener un valor explícito y único para x , a saber $x = -2$, entonces no es posible poner a las variables y o z en términos de x . En este caso las columnas correspondientes a las variables y , z son *linealmente dependientes*.

Con estas ideas del caso de un sistema lineal, vayamos de vuelta al ejemplo del sistema no lineal (3). En este caso la aproximación lineal se da a través de la matriz jacobiana del campo vectorial $F = (F_1, F_2)$ evaluada en (a, b, c)

$$D_F(a, b, c) = \begin{pmatrix} \partial_x F_1(a, b, c) & \partial_y F_1(a, b, c) & \partial_z F_1(a, b, c) \\ \partial_x F_2(a, b, c) & \partial_y F_2(a, b, c) & \partial_z F_2(a, b, c) \end{pmatrix}$$

donde hemos adoptado una notación abreviada para las derivadas parciales, escribiendo por ejemplo $\partial_x F_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x}$, y así sucesivamente. Requeriríamos entonces que la matriz $D_F(a, b, c)$ tenga rango 2, y las columnas linealmente independientes por pares nos indicarían cuáles variables pueden ponerse en términos de la tercera.

Consideremos por ejemplo el sistema no lineal

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$$

cerca del punto $(1, 1, \sqrt{2})$. En este caso, no es difícil ver que podemos escribir $y = y(x)$, $z = z(x)$, o bien $x = x(y)$, $z = z(y)$. Pero no es claro que se pueda escribir $x = x(z)$, $y = y(z)$.

Ahora veamos qué puede decirnos al respecto la linealización del sistema. La matriz jacobiana de este sistema es

$$D(a, b, c) = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ b & a & 0 \end{pmatrix},$$

que al ser evaluada en $(1, 1, \sqrt{2})$ lleva a $D(1, 1\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Basados en la conjetura planteada anteriormente se esperaría que se pudieran escribir $x = x(y)$, $z = z(y)$ o. bien $y = y(x)$, $z = z(x)$, lo cual mencionamos que era posible a partir de cálculos directos.

Una estrategia y un paradigma

De la discusión anterior podemos plantear una estrategia para decidir si existe una función implícita. Esto es entonces lo que esperaríamos de un *teorema de la función implícita*, que ahora planteamos en varias variables. En el siguiente enunciado, elegimos $n > m$ para generalizar las situaciones que ejemplificamos antes, de manera que m variables podrían ponerse en función de las restantes $n - m$ variables.¹

Estrategia para determinar si existen funciones implícitas. *Considérese el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2 \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_m \end{cases} \quad (4)$$

con $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, $n > m$, y donde las funciones $F_1, F_2, \dots, F_m$ son de clase C^1 (derivables con derivada continua). Supóngase que en el punto $P = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ se cumple el sistema (4), y que la matriz jacobiana asociada al sistema (4) tiene rango m . Entonces es posible escribir a m variables en términos de las restantes $n - m$ variables en una vecindad de P .

De hecho se puede ser más preciso y afirmar que, si el sistema original (4) se sustituye por el que se forma con las m aproximaciones lineales H_j de cada una de las F_j , $j = 1, 2, \dots, m$, dadas por (2), entonces cada vez que en el sistema de linealizaciones (2) se puedan escribir m variables en términos de las restantes $n - m$ variables, también se podrán escribir las mismas m variables en términos de las otras $n - m$ variables para el sistema (4) en una vecindad de P . Y aunque no es consecuencia de nuestros razonamientos heurísticos, se puede aventurar la afirmación de que las funciones implícitas son de clase C^1 .

Ahora, un estudiante que haya cursado *cálculo avanzado* o *análisis matemático básico* podría revisar la versión del teorema de la función implícita que haya cubierto en su curso y verificar que esta es una de las estrategias para aplicarlo. Se sugiere también revisar [12, teo. 13.1.2], en donde se da una demostración usando una variante del *método de*

¹Cuando $n = m$ se tiene esencialmente un *teorema de la función inversa*, estableciendo la existencia local de una función inversa para una función C^1 con derivada invertible.

Newton para determinar ceros de una función. Es decir, en esencia se usa la idea de usar la aproximación lineal a la función en cuestión. Los detalles están en [12, pp. 575-579].²

Nos aventuramos a plantear un «modelo» de lo que podría o debería ser un *teorema de la función implícita* en situaciones más generales, basados en las siguientes características que este teorema cumple:

- *Regularidad.* Las funciones involucradas y la función implícita cumplen la condición de derivabilidad y continuidad de la derivada.
- *No degeneración.* La condición sobre el rango de la matriz jacobiana lleva intrínseca que una submatriz tenga determinante distinto de cero.
- *Unicidad.* La función implícita que se obtiene es única.

Basados en estas características planteamos el siguiente paradigma. Para el enunciado, recuérdese que un espacio topológico es esencialmente un conjunto no vacío en que se han definido lo que llamaremos *conjuntos abiertos*. Esta idea puede ser suficiente para la comprensión del siguiente:

Paradigma del Teorema de la Función Implícita. Sean $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ y $\mathbb{Z}$ espacios topológicos, no necesariamente distintos. Considérese una función $\mathcal{F} : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ y puntos $X_0 \in \mathbb{X}$, $Y_0 \in \mathbb{Y}$ y $Z_0 \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathcal{F}(X_0, Y_0) = Z_0$.

Un **teorema de la función implícita** debería describir propiedades de regularidad y de no degeneración sobre la función $\mathcal{F}$ en (X_0, Y_0) que implique la existencia de vecindades U de X_0 en $\mathbb{X}$ y V de Y_0 en $\mathbb{Y}$, junto con una función $F : U \rightarrow V$ cumpliendo las condiciones

$$F(X_0) = Y_0, \quad \mathcal{F}(X, F(X)) = Z_0 \quad \text{para toda } X \in U.$$

Además este teorema debería proporcionar condiciones adicionales sobre F que incluyan su unicidad.

A partir de este paradigma, se pueden plantear conjeturas de versiones adecuadas del *teorema de la función implícita* en distintas situaciones, cambiando los espacios topológicos, el tipo de función $\mathcal{F}$ considerada, junto con su tipo de condición de no degeneración, e incluyendo las condiciones adecuadas de la función implícita obtenida. Ocuparemos las siguientes secciones para describir un par de extensiones con estas características.

²Otro aspecto descrito en [12] es el parecido del argumento de la demostración con el de la prueba de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias con el método de iteración de Picard. El autor va más allá, y afirma que la ecuación integral a la que se aplica las iteraciones puede verse como una «versión en dimensión infinita de la ecuación de la función implícita» (véase pág. 579).

2. Descripción local de superficies

Una aplicación clásica del teorema de la función implícita es una caracterización alternativa de superficies de clase C^1 o C^2 . En esta sección describimos una extensión a otras clases de conjuntos, vistos como la frontera de un conjunto abierto de algún espacio euclidiano.

Una caracterización de superficies suaves y dominios para problemas de tipo Dirichlet

Decimos que un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es una *hipersuperficie de clase C^2* si para cada $X_0 \in S$ existe un cilindro $\mathcal{C}$ de la forma $B \times I$ (donde B es una bola en $\mathbb{R}^{n-1}$ e I un intervalo en $\mathbb{R}$) tal que al aplicarle una traslación y una rotación (de ser necesario) contiene a X_0 , así como una función $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , es decir, dos veces derivable, con dos derivadas continuas, cuya gráfica $\Sigma(\psi, B) = \{(x', \psi(x')) : x' \in B\}$ contiene a X_0 tal que $\mathcal{C} \cap S = \mathcal{C} \cap \Sigma(\psi, B) = \Sigma(\psi, B)$.

En algunos textos se define una superficie suave de un modo diferente, que para distinguirlo de la definición dada en el párrafo anterior, llamaremos «*artificialmente*» con otro nombre. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es una *hipersuperficie especial de clase C^2* si para cada $X_0 \in S$ existe un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a X_0 y una función $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 en V tal que $\nabla \varphi \neq \vec{0}$ en $S \cap V$ y cumpliendo

$$S \cap V = \{X \in V : \varphi(X) = 0\}.$$

Aquí hemos adoptado la notación de $\vec{0}$ para el vector cero (columna o renglón) de $\mathbb{R}^n$.

Por medio de la siguiente versión del *teorema de la función implícita* se puede probar que toda hipersuperficie especial de clase C^2 es localmente una hipersuperficie de clase C^2 . Para el enunciado, adaptamos [1, teo. 13.7]). Dado que en este enunciado y en futuras descripciones hablaremos de una *función derivable en una hipersuperficie S* (especial o no) que es un conjunto cerrado, aclaramos que esta frase realmente quiere decir que f está definida en un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a S , y que f es de clase C^2 en dicho conjunto abierto.

Teorema 2.1. *Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en la hipersuperficie S . Representamos $X \in \mathbb{R}^n$ como $X = (x', x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, y supóngase que para $X_0 = (x'_0, x_0) \in S$ se tiene $f(X_0) = 0$. Supóngase también que $\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \neq 0$. Entonces existe $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ abierto que contiene a x'_0 y una única función $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 en U tal que $\varphi(x'_0) = x_0$ y además $f(x', \varphi(x')) = 0$ para toda $x' \in U$.*

Este teorema permite también probar que otro tipo de hipersuperficie de clase C^2 , que definiremos en el siguiente apartado, es una hipersuperficie de clase C^2 .

Dominios estrellados

Iniciamos con una aclaración de notación que adoptamos. Desde ahora denotaremos con $|x|$ a la norma euclidiana usual de $x \in \mathbb{R}^n$, y al valor absoluto de x en caso de que $x \in \mathbb{R}$, dado que el contexto no causa riesgo de confusión, y porque es la notación usada en algunos textos más avanzados. De este modo la notación $\|\cdot\|$ la tendremos reservada para otra *magnitud* que se describirá más adelante, y por tanto no debe confundirse con la norma euclidiana usual.

Consideramos ahora un conjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Recordemos que las *coordenadas esféricas* de $\mathbb{R}^n$ permiten representar un punto $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ usando una «dirección» $\omega \in S^{n-1}$ (donde $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1\}$ denota la *esfera unitaria* en $\mathbb{R}^n$) y una «magnitud» $r > 0$. Se escribe entonces $x = r \cdot \omega$ con $r = |x|$ y $\omega = \frac{1}{|x|}x$.

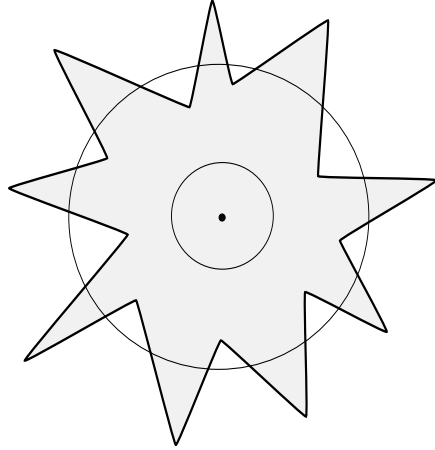


Figura 1. Aspecto de un dominio Lipschitz estrellado, donde se permiten «picos». Para un dominio C^2 estrellado, se deberán tener contornos «sin picos». La circunferencia grande es S^{n-1} y la pequeña tiene radio δ_0 , para ilustrar la situación en (11) más adelante.

Decimos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un *dominio estrellado* (centrado en el origen) de clase C^2 si en coordenadas esféricas de $\mathbb{R}^n$ puede escribirse como

$$\Omega = \{r \cdot \omega : \omega \in S^{n-1}, 0 \leq r < \phi(\omega)\}, \quad (5)$$

donde $\phi : S^{n-1} \rightarrow (0, \infty)$ es una *función de clase C^2* , lo cual quiere decir que es dos veces *derivable* (en el sentido definido antes, pues S^{n-1} es hipersuperficie), y sus *derivadas* son continuas en S^{n-1} .

Teorema 2.2. *Si Ω es un dominio estrellado de clase C^2 , entonces $\partial\Omega$ es una superficie de clase C^2 .*

La prueba de este teorema está en [13], para el caso más general en que la función $\phi : S^{n-1} \rightarrow (0, \infty)$ es una *función de tipo Lipschitz*. Esto quiere decir que existe una constante $M > 0$ tal que $|\phi(x) - \phi(y)| \leq M|x - y|$ para $x, y \in S^{n-1}$. La prueba de este teorema en esta situación más general se obtiene a través de una versión adecuada del teorema de la función implícita, también demostrada en aquel trabajo. En nuestro caso, podemos hacer uso del teorema 2.1.

En la última sección de este artículo incluiremos una síntesis de los argumentos en [13] para ilustrar, por ejemplo, cómo se obtiene la existencia y unicidad de la función implícita del susodicho teorema.

Nos proponemos en la siguiente sección describir una generalización más de este círculo de ideas, teniendo en mente potenciales aplicaciones en dominios no cilíndricos para problemas asociados a ecuaciones de tipo parabólico.

3. Un dominio no cilíndrico para la ecuación de calor

Para la descripción de los resultados de esta sección requerimos hacer un cambio de *homogeneidad* del espacio euclidiano, lo cual nos lleva a definir una dilatación que se adapte a la ecuación de calor.

Con este *cambio de homogeneidad*, tendremos una nueva noción de funciones de tipo Lipschitz, con lo cual estaríamos en posición de proponer una versión adecuada de dominio estrellado, y un teorema de la función implícita. Y de aquí obtendríamos la propiedad de gráfica local de dominios estrellados adaptados a la ecuación de calor. El contenido de esta sección es un resumen de [2].

Homogeneidad parabólica en $\mathbb{R}^{n+1}$

Para iniciar, usaremos la *notación de Doob* (véase [3, cap. XV]) para espacios euclidianos que contengan una variable t que represente al tiempo, añadiendo un punto encima:

$$\dot{\mathbb{R}}^{n+1} = \{(t, x) : t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n\}, \quad \dot{\mathbb{R}}^n = \{(t, x') : t \in \mathbb{R}, x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}.$$

Originalmente [3] presenta esta notación para recalcar que t es una variable dinámica que representa el tiempo en un proceso evolutivo,

como el que se describe en la *ecuación de calor* descrita unas líneas más adelante.

Para este trabajo, la idea es que se tome la variable t como parte de las *variables independientes* de las funciones que se involucren en enunciados posteriores. De este modo $\mathbb{R}^n$ no es lo mismo que el espacio $\mathbb{R}^n$ obtenido al fijar algún $t_0 \in \mathbb{R}$ y hacer el producto $\{t_0\} \times \mathbb{R}^n$. Similarmenete $\mathbb{R}^{n+1}$ no tiene el mismo significado para este trabajo que el escribir simplemente $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Por lo mismo, podemos usar una notación similar para puntos o subconjuntos de estos espacios. Así, escribiríamos por ejemplo $\dot{U} \subset \dot{\mathbb{R}}^{n+1}$ para aclarar que U es subconjunto de un espacio euclidiano $(n+1)$ dimensional que incluye a t como variable independiente.

Para motivar el uso de un cambio de homogeneidad en $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}$ consideremos una función $u(t, x)$ que sea solución de la *ecuación de calor* $Hu = 0$, donde el *operador de calor* está dado por

$$Hu(t, x) = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Al buscar los valores $\alpha, \beta > 0$ tales que para $\lambda > 0$ se cumpla que $v(t, x) = u(\lambda^\alpha t, \lambda^\beta x)$ es también solución de $Hv = 0$, se encuentra que debe ocurrir que $2\beta = \alpha$.

Ahora obsérvese que el valor $\beta = 1$ corresponde a la dilatación usual o *isotrópica* de $\mathbb{R}^n$, y que esta nos lleva naturalmente al valor $\alpha = 2$. Con estos valores proponemos una *dilatación no isotrópica en $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}$* (de tipo parabólico) que induce un *cambio de homogeneidad*: dada $\lambda > 0$ se define

$$T_\lambda(t, x) = (\lambda^2 t, \lambda x) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \vec{0} \\ \vec{0} & \lambda \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}, \quad (6)$$

donde $\mathbb{I}_n$ denota la matriz identidad de $n \times n$, y $\vec{0}$ denota el vector cero (columna o renglón) de $\mathbb{R}^n$. Observemos que la norma $\|T_\lambda\|$ como operador de $\mathbb{R}^{n+1}$ a sí mismo cumple $\|T_\lambda\| = \max\{\lambda, \lambda^2\}$.

Aquí cabe recordar la definición de la norma de operadores: $\|T_\lambda\| = \sup \{|T_\lambda x| : x \in \mathbb{R}^{n+1}, |x| = 1\}$.

Un modo de dotar a $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}$ con una métrica acorde con este y más generales cambios de homogeneidad fue presentado por B. F. Jones [5] y E. Fabes y N. Rivière [4, 11] al estudiar ciertos operadores integrales asociados a la ecuación de calor. A continuación presentamos algunas de esas ideas, que en las referencias originales, como se dijo antes, consideran una dilatación más general que la T_λ antes definida.

Iniciemos notando que un modo de obtener la norma euclidiana usual de $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$, es a través de la solución r de la ecuación

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{r^2} = 1 \quad \text{suponiendo } x = (x_1, \dots, x_n).$$

Para introducir el cambio de homogeneidad en $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}$, dado $(t, x) \in \dot{\mathbb{R}}^{n+1} \setminus \{(0, \vec{0})\}$ buscamos la solución ρ a la ecuación

$$\frac{t^2}{\rho^4} + \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{\rho^2} = 1 \quad \text{de nuevo suponiendo } x = (x_1, \dots, x_n).$$

Para justificar la existencia de este valor consideremos la función $F : (\dot{\mathbb{R}}^{n+1} \setminus \{(0, \vec{0})\}) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(t, x, \rho) = \frac{t^2}{\rho^4} + \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{\rho^2}, \quad \text{con } x = (x_1, \dots, x_n).$$

Entonces F es una función continua y estrictamente decreciente en la variable ρ que además cumple

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} F(t, x, \rho) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} F(t, x, \rho) = \infty. \quad (7)$$

En consecuencia, dado cualquier $(t, x) \in \dot{\mathbb{R}}^{n+1} \setminus \{(0, \vec{0})\}$ existe un único $\rho = \rho(t, x)$ tal que $F(t, x, \rho) = 1$. Definiendo además $\rho(0, \vec{0}) = 0$ estamos listos para definir una métrica en $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}$. Observemos primero que una consecuencia directa de esta definición es que $\rho(T_\lambda(t, x)) = \lambda\rho(t, x)$. El siguiente resultado confirma la intuición de que ρ tiene cierto parecido con una norma, y aparece en [11, teo. 7.1] para cambios de homogeneidad más generales.

Teorema 3.1. *La función $D(t, x; s, y) = \rho(t - s, x - y)$ es una métrica en $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}$.*

Hacemos notar que la misma idea puede aplicarse al espacio $\dot{\mathbb{R}}^n$ para convertirlo en un espacio métrico y con la nueva homogeneidad descrita en (12).

A partir de ahora, basados en el resultado anterior, usaremos la notación $\|(t, x)\| = \rho(t, x)$, pues aunque esta cantidad no define una norma, sí será útil notacionalmente escribirla de esta forma para establecer un paralelo con lo descrito en secciones anteriores.

Antes de terminar este párrafo, notemos que un cálculo directo establece que existen constantes $C_0, C_1 > 0$ tales que para $(t, x) \in \dot{\mathbb{R}}^{n+1}$

$$C_0(|t|^{1/2} + |x|) \leq \|(t, x)\| \leq C_1(|t|^{1/2} + |x|).$$

Esta *comparabilidad* de cantidades esencialmente establece que podemos concebir la *norma parabólica* de (t, x) como $|t|^{1/2} + |x|$. Se hará uso de esta idea en los enunciados de teoremas e ideas a continuación.

Funciones de tipo Lip(1,1/2) y su versión del teorema de la función implícita

Dado $\dot{U} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, decimos que una función $f : \dot{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es de tipo *Lip(1,1/2)* en $\dot{U}$ si existe una constante $M > 0$ tal que

$$|f(t, x) - f(s, y)| \leq M(|t - s|^{1/2} + |x - y|) \quad \text{para } (t, x), (s, y) \in \dot{U}.$$

Según la notación recién presentada, tendremos que para estas funciones se cumple

$$|f(t, x) - f(s, y)| \leq MC_0^{-1} \|(t - s, x - y)\|,$$

es decir que las funciones de tipo Lip(1,1/2) son las funciones Lipschitz respecto a la *norma* $\|\cdot\|$.

Teorema 3.2 (Teorema de la función implícita). *Sean $\dot{U}_{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ y $U_n \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos, y para $a = (a_0, \bar{a}) \in \dot{U}_{m+1}$ y $b \in U_n$ sea $f : \dot{U}_{m+1} \times U_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función cumpliendo una condición de tipo Lip(1,1/2) de la forma*

$$|f(t, x, y) - f(s, z, w)| \leq M(|x - z| + |s - t|^{1/2} + |y - w|),$$

para $(t, x), (s, z) \in \dot{U}_{m+1}$, $y, w \in U_n$, y tal que $f(a, b) = f(a_0, \bar{a}, b) = \vec{0}$. Supóngase además que

$$|f(t, x, y) - f(t, x, w)| \geq K|y - w| \quad (8)$$

para cierta $K > 0$ y para todo $(t, x) \in \dot{U}_{m+1}$ y todo $y, w \in U_n$. Entonces existe un conjunto $\dot{V}_{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ abierto tal que $a \in \dot{V}_{m+1} \subset \dot{U}_{m+1}$ y una función $\phi : \dot{V}_{m+1} \rightarrow U_n$ cumpliendo una condición de tipo Lip(1,1/2) de la forma

$$|\phi(t, x) - \phi(s, z)| \leq M'(|x - z| + |s - t|^{1/2}), \quad (9)$$

y para la cual se cumple

$$\begin{aligned} & \left\{ (t, x, y) \in \dot{V}_{m+1} \times U_n : f(t, x, y) = 0 \right\} \\ &= \left\{ (t, x, \phi(t, x)) : (t, x) \in \dot{V}_{m+1} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Nótese el modo peculiar de escribir algunas de las conclusiones de este teorema, comparadas con el *paradigma del teorema de la función implícita* planteado anteriormente, y que son encapsuladas en la identidad (10).

Para describir los dominios estrellados no-cilíndricos, y su caracterización usando el teorema 3.2, comencemos dando una variante de lo

que se entiende por un dominio dado localmente por gráficas de tipo $\text{Lip}(1,1/2)$.

Decimos que un conjunto abierto y conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un *dominio $\text{Lip}(1,1/2)$* si para cada $\dot{X}_0 \in \partial\Omega$ existe un cilindro $\mathcal{C}$ de la forma $B \times I$ (donde B es una bola en $\mathbb{R}^n$ e I un intervalo en $\mathbb{R}$) de manera que luego de rotarlo y trasladarlo (de ser necesario) contiene a $\dot{X}_0$, además de una función $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\text{Lip}(1,1/2)$, cuya gráfica $\Sigma(\psi, B) = \{(t, x', \psi(t, x')) : (t, x') \in B\}$ contiene a $\dot{X}_0$ tal que $\mathcal{C} \cap \partial\Omega = \mathcal{C} \cap \Sigma(\psi, B) = \Sigma(\psi, B)$.

En analogía con la definición de dominio estrellado usando *coordenadas esféricas*, damos a continuación la definición de dominio *no cilíndrico estrellado*, usando *coordenadas cilíndricas*. La notación que adoptamos para las coordenadas cilíndricas de $\mathbb{R}^{n+1}$ es $(s, r\omega)$ con $s \in \mathbb{R}$ (la variable de tiempo), $r \geq 0$ y $\omega \in S^{n-1}$. En otras palabras, la coordenada «de tiempo» se preserva, y las «variables espaciales» se escriben en coordenadas esféricas de $\mathbb{R}^n$.

Ahora, en analogía con los dominios antes definidos, decimos que un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un *dominio no cilíndrico estrellado de clase $\text{Lip}(1,1/2)$* si

$$\Omega = \left\{ (s, r\omega) : \omega \in S^{n-1}, 0 \leq r < \phi(s, \omega), s \in \mathbb{R} \right\},$$

donde S^{n-1} es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ y la función $\phi : \mathbb{R} \times S^{n-1} \rightarrow (0, \infty)$ cumple una condición $\text{Lip}(1,1/2)$ de la forma

$$|\phi(t_1, \omega_1) - \phi(t_2, \omega_2)| \leq M (|t_1 - t_2|^{1/2} + |\omega_1 - \omega_2|),$$

cumpliendo además $\delta_0 < \phi(s, \omega) < K_0$ para ciertas constantes $\delta_0, K_0 > 0$. Esta última condición la hemos incluido para garantizar que Ω mantenga las propiedades de acotamiento, no degeneración y de ser estrellado *de manera uniforme en la variable t* , todas ellas deseables para el potencial uso de técnicas de la llamada medida calórica o parabólica (véase p. ej. [8, 9]).

Nótese además que dejando la variable del tiempo s fija, y definiendo

$$\Omega(s) = \left\{ (s, r\omega) : \omega \in S^{n-1}, 0 \leq r < \phi(s, \omega) \right\}, \quad (11)$$

se cumplirá que $\Omega(s)$ es un dominio Lipschitz estrellado tal y como lo definimos alrededor de (5), que además contiene un círculo de radio δ_0 .

Siguiendo ideas de [13], muy similares a los argumentos que probarían el teorema 2.2, en [2] se demuestra el siguiente

Teorema 3.3. *Si Ω es un dominio no cilíndrico estrellado de clase $\text{Lip}(1,1/2)$, entonces Ω es un dominio $\text{Lip}(1,1/2)$.*

El dominio estrellado de tipo parabólico puede ser adoptado en trabajos donde se obtengan resultados asociados a ecuaciones de tipo parabólico, tales como los referenciados en [8], o más recientemente en [10].

4. Una conjetura natural: cambio general de isotropía

A partir de lo antes obtenido, teniendo en cuenta que se ha podido obtener una versión del *teorema de la función implícita* para funciones de *tipo Lipschitz mixta* $\text{Lip}(1, 1/2)$, se puede conjeturar un resultado más general, en donde la *isotropía* de las funciones involucradas generalice a la parabólica.

Ahora, para $\lambda > 0$ y $a_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, se define para $X = (x_1, \dots, x_n)$ una *dilatación no isotrópica*

$$T_\lambda(X) = \begin{bmatrix} \lambda^{a_1}x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^{a_2}x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^{a_n}x_n \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Notemos que se recupera la norma usual euclidiana de $\mathbb{R}^n$ tomando $a_j = 1$ para toda $j = 1, 2, \dots, n$. Además, la *homogeneidad parabólica* en $\mathbb{R}^n$, que originalmente motivó estos cambios de isotropía, puede obtenerse con $a_1 = 2$, $a_j = 1$ para $j = 2, \dots, n$.

De nuevo buscamos la solución $\rho = \rho(X)$ de la ecuación

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{\rho^{2a_j}} = 1 \quad \text{suponiendo } X = (x_1, \dots, x_n).$$

Y una vez más se puede justificar la existencia de esta ρ considerando la función $F : (\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(X, \rho) = \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{\rho^{2a_j}}, \quad \text{con } X = (x_1, \dots, x_n).$$

La función F es continua, decreciente en la variable ρ , cumpliendo

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} F(t, X, \rho) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} F(t, X, \rho) = \infty. \quad (13)$$

También tendremos $\rho(T_\lambda(t, x)) = \lambda\rho(t, x)$, es decir, que ρ se adapta bien a la transformación T_λ , y además tendremos que al definir $\rho(\vec{0}) = 0$ se tiene una métrica en $\mathbb{R}^n$:

Teorema 4.1. *La función $d(X, Y) = \rho(X - Y)$ es una métrica en $\mathbb{R}^n$.*

La prueba de este teorema es de nuevo una adaptación de [11, teo. 7.1].

Adoptamos de nuevo la notación $\dot{\mathbb{R}}^n$ al espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ que incluya la variable t como potencial variable dependiente de algunas de las funciones involucradas más adelante, y dotado con esta métrica. Como antes, escribimos $\|X\| = \rho(X)$ para $X \in \dot{\mathbb{R}}^n$.

Teorema 4.2 (Conjetura del teorema de la función implícita). *Sea $\dot{U} \subset \dot{\mathbb{R}}^n$ un conjunto abierto y sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Sea $F : \dot{U} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ una función que cumple para cierta constante $M > 0$ y toda $(X, a), (Y, b) \in \dot{U} \times I$ una condición de la forma*

$$|F(X, a) - F(Y, b)| \leq M(\|X - Y\| + |a - b|), \quad (14)$$

y tal que para cierta $X_0 \in \dot{U}$ y $a_0 \in I$ se tiene $F(X_0, a_0) = 0$. Supóngase también que para cierta $K > 0$

$$|F(X, a) - F(X, b)| \geq K|a - b| \quad \text{para toda } X \in \dot{U}, a, b \in I. \quad (15)$$

Entonces existe $V \subset \dot{\mathbb{R}}^n$ un conjunto abierto tal que $X_0 \in V \subset \dot{U}$, y una función $f : V \rightarrow I$ cumpliendo

$$|f(X) - f(Y)| \leq M'\|X - Y\| \quad \text{para cierta constante } M' > 0. \quad (16)$$

Además $\{(X, d) \in \dot{U} \times I : F(X, d) = 0\} = \{(X, f(X)) : X \in V\}$.

Como se observó originalmente en [13], las versiones del *teorema de la función implícita* que aparecen en los teoremas 3.2 y 4.2 no requieren condiciones de tipo C^1 o C^2 en las funciones involucradas, pero mantienen las características esenciales mencionadas anteriormente, y que aparecen en el *paradigma del teorema de función implícita*, a saber:

- (a) Explota cierta *regularidad* de las funciones involucradas, que toman la forma de condiciones de tipo Lipschitz como (14) o (16).
- (b) Hay una condición de *no degeneración*, pero en lugar de un Jacobiano distinto de 0, se tiene condiciones del tipo (8) o (15).
- (c) Además, la *función implícita* en la tesis de cada teorema ϕ es única.

Debemos finalmente resaltar que las condiciones de regularidad y no degeneración antes mencionados, no son de ninguna manera óptimos, o inmejorables en sus técnicas o en sus puntos de vista. El lector interesado puede ver la variedad de versiones del *teorema de la función implícita* descritos en [6].

5. El teorema de la función implícita para funciones Lipschitz

Esta sección tiene un contenido un poco más técnico, pues describiremos algunos argumentos para demostrar la versión del *teorema de la función implícita para funciones de tipo Lipschitz*, basados principalmente en [13], con algunas pequeñas simplificaciones posteriores a nuestro trabajo [2]. Iniciamos enunciando dicho teorema.

Teorema 5.1. [13] Sean $U_m \subseteq \mathbb{R}^m$, $U_n \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos, y sea $U = U_m \times U_n$. Sea además $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de tipo Lipschitz cumpliendo $|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| \leq M|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|$ y

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| > k|y_1 - y_2|, \quad (17)$$

para toda $(x, y_j) \in U$, $j = 1, 2$, con ciertas constantes $M, k > 0$. Supóngase que existe $(a, b) \in U$ tal que $F(a, b) = 0$. Entonces existe un conjunto abierto $V_m \subseteq \mathbb{R}^m$ tal que $a \in V_m$, junto con una función de tipo Lipschitz $\psi : V_m \rightarrow U_n$ tal que

$$\psi(a) = b \quad \text{y} \quad \{(x, y) \in V_m \times U_n : F(x, y) = 0\} = \{(x, \psi(x)) : x \in V_m\}$$

En particular $F(x, \psi(x)) = 0$ para toda $x \in V_m$.

Recordamos al lector la notación que habíamos adoptado previamente para las normas euclidianas, que en los anteriores enunciados se traduce en que $|\mathcal{Z}|$ pueda denotar la norma euclidiana en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{R}^{n+1}$ (el valor absoluto, en el primer caso) dependiendo del espacio al que pertenece $\mathcal{Z}$.

Para la prueba de este teorema usaremos el siguiente lema auxiliar cuya prueba es más o menos directa consecuencia de las condiciones de tipo *bilipschitz* en (a) y (b). Es una versión adecuada del *teorema de invarianza del dominio* de Brouwer (véase p. ej. [7]).

Lema 5.2. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, y $G : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ una función cumpliendo para ciertas constantes $M, K > 0$

$$(a) \quad |G(X, a) - G(Y, b)| \leq M[|X - Y| + |a - b|],$$

$$(b) \quad |G(X, a) - G(Y, b)| \geq K[|X - Y| + |a - b|],$$

para $X, Y \in U$, $a, b \in I$. Entonces $G : U \rightarrow G(U)$ es biyectiva, y $G(U)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. Además, su función inversa G^{-1} cumple que para ciertas constantes $M', K' > 0$

$$(a') \quad |G^{-1}(X) - G^{-1}(Y)| \leq M'|X - Y|, \text{ para } X, Y \in G(U),$$

$$(b') \quad |G^{-1}(X) - G^{-1}(Y)| \geq K'|X - Y|, \text{ para } X, Y \in G(U).$$

Demostración del teorema 5.1. Para $\epsilon > 0$ que escogemos posteriormente, consideremos $g : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dada por $g(X, a) = (X, \epsilon F(X, a))$. Notemos que para $(X, a), (Y, b) \in U \times I$ se tiene la hipótesis (a) del lema:

$$\begin{aligned} |g(X, a) - g(Y, b)| &= |X - Y| + \epsilon |F(X, a) - F(Y, b)| \\ &\leq |X - Y| + \epsilon M(|X - Y| + |a - b|) \leq \tilde{C}_1[|X - Y| + |a - b|], \end{aligned} \quad (18)$$

lo que significa también que g es continua en $U \times I$. Además, g cumplirá la hipótesis (b) del lema 5.2, como probamos ahora. Para $(X, a), (Y, b) \in U \times I$ tenemos

$$\begin{aligned} |g(X, a) - g(Y, b)| &= |X - Y| + \epsilon |F(X, a) - F(Y, b)| \\ &\geq |X - Y| + \epsilon |F(X, a) - F(X, b)| - \epsilon |F(X, b) - F(Y, b)| \\ &\geq |X - Y| + \epsilon K|a - b| - M\epsilon |X - Y| = (1 - M\epsilon)|X - Y| + \epsilon K|a - b|. \end{aligned} \quad (19)$$

Elegimos ahora $0 < \epsilon < M^{-1}$ y luego $\tilde{C}_2 = \min\{1 - M\epsilon, \epsilon K\}$. Por el lema 5.2, $g(U \times I)$ es un conjunto abierto, y $g : U \times I \rightarrow g(U \times I)$ es biyectiva, con función inversa cumpliendo (a) y (b) del lema 5.2.

Consideremos ahora las proyecciones canónicas $\pi_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por $\pi_n(X, a) = X$ y $\pi(X, a) = a$.

Sea $V = B(X_0) \subset \mathbb{R}^n$ una bola euclidiana centrada en X_0 y cuyo radio se elige de manera que $B(X_0) \subset U$ y $\pi(g^{-1}(X, 0)) \in I$ para toda $X \in B(X_0)$. Esta bola existe porque $\pi(g^{-1}(X_0, 0)) = a_0$ y porque π y g^{-1} son funciones continuas en conjuntos abiertos adecuados.

Estamos listos para definir $f : V \rightarrow I$ como $f(X) = \pi(g^{-1}(X, 0))$. Notemos que por definición ya se tiene $f(X_0) = a_0$, y usando la definición de g , para $X \in V$ también tenemos

$$\begin{aligned} (X, 0) &= g(g^{-1}(X, 0)) = g(\pi_n(g^{-1}(X, 0)), \pi(g^{-1}(X, 0))) \\ &= (\pi_n(g^{-1}(X, 0)), \epsilon F(\pi_n(g^{-1}(X, 0)), f(X))). \end{aligned}$$

Como g es inyectiva en $U \times I$, tenemos que $X = \pi_n(g^{-1}(X, 0))$ y $F(\pi_n(g^{-1}(X, 0)), f(X)) = 0$, y por tanto $F(X, f(X)) = 0$ para $X \in V$. Esto significa precisamente que

$$\{(X, f(X)) : X \in V\} \subset \{(X, a) \in V \times I : F(X, a) = 0\}.$$

Por otro lado, si $(X, a) \in V \times I$ es tal que $F(X, a) = 0$, entonces $g(X, a) = (X, 0)$, lo cual implica $(X, a) = g^{-1}(X, 0)$. Aplicando la proyección $a = \pi(g^{-1}(X, 0)) = f(X)$, que lleva a

$$\{(X, a) \in V \times I : F(X, a) = 0\} \subset \{(X, f(X)) : X \in V\}.$$

Resta probar que f satisface (16) para cierta $M' > 0$. Para probar esto, notemos que, como se observó antes, para $X \in V$ tenemos $g(X, f(X)) = (X, \epsilon F(X, f(X))) = (X, 0)$. Así, como (18) y (19) se cumplen, si $X_1, X_2 \in V$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_2 |f(X_1) - f(X_2)| &\leq \tilde{C}_2 |(X_1, f(X_1)) - (X_2, f(X_2))| \\ &\leq |g(X_1, f(X_1)) - g(X_2, f(X_2))| = |X_1 - X_2|. \end{aligned}$$

Y el teorema queda probado. $\square$

Reconocimientos y agradecimientos

El autor ha recibido apoyo de la *Asociación Mexicana de Cultura* para preparar este trabajo. También agradece a A. Domínguez-Corella por discusiones de posibles extensiones del teorema 3.2, y por la colaboración trabajando en la solución de la *conjetura* que daría lugar al teorema 4.2.

Las observaciones hechas por las personas que realizaron el arbitraje de este trabajo han sido muy adecuadas, pertinentes y han aclarado enunciados y frases del texto original. El autor agradece enormemente el trabajo de revisión y todas estas observaciones.

Bibliografía

- [1] T. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2.^a ed., Addison-Wesley, New York, 1974.
- [2] A. Domínguez-Corella y J. Rivera-Noriega, «Una clase de dominios no cilíndricos para ecuaciones de tipo parabólico», *Lecturas Matemáticas*, núm. 38, 2017, 49–63.
- [3] J. L. Doob, *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*, Classics in Mathematics, Springer, Berlin, 2001, Reimpresión de la edición de 1984.
- [4] E. B. Fabes y N. M. Rivière, «Singular integrals with mixed homogeneity», *Studia Math.*, núm. 27, 1966, 19–38.
- [5] B. F. Jones, «On a class of singular integrals», *Amer. J. Math.*, núm. 86, 1964, 441–462.
- [6] S. G. Krantz y H. R. Parks, *The Implicit Function Theorem. History, Theory and Applications*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser, Boston MA, 2003, 2a. Reimpresión.
- [7] J. R. Munkres, *Elementary Differential Topology*, Annals of Mathematics Series vol. 54 (ed. revisada), Princeton University Press, Princeton NJ, 1966.
- [8] K. Nyström, «The Dirichlet problem for second order parabolic operators», *Indiana Univ. Math. J.*, núm. 46, 1997, 181–245.
- [9] J. Rivera-Noriega, «Perturbation and solvability of initial L^p Dirichlet problems for parabolic equations over non-cylindrical domains», *Canadian J. Math.*, vol. 66, 2014, 429–452.
- [10] J. Rivera-Noriega y L. S. Martin, «An l^q regularity condition that implies the a_∞ property of parabolic measure», *Indag. Math.*, núm. 30, 2019, 943–956.
- [11] N. M. Rivière, «Singular integrals and multiplier operators», *Ark. Mat.*, núm. 9, 1971, 243–278.
- [12] R. S. Strichartz, *The way of analysis*, Jones & Bartlett Publ., Boston MA, 2000.

- [13] M. Wuertz, «The Implicit Function Theorem for Lipschitz Functions and Applications», May of 2008, Master's Thesis, University of Missouri-Columbia.
- [14] A. P. Youshkevitch, «The concept of function up to the middle of the 19th. century», *Archive for History of Exact Sciences*, núm. 16, 1976, 37–85.