

# Para aprender a dibujar

Ana Irene Ramírez

Facultad de Ciencias, UNAM

Circuito Exterior

Ciudad Universitaria

04510, México, D.F.

*Gracias, Juanjo, por tu lucha en pro de mejorar la enseñanza de las matemáticas en México.*

En el periodo de 1490 a 1494 y a instancias de su padre, Alberto Durero (1471-1528) emprendió, una serie de viajes con el fin de perfeccionar sus conocimientos sobre pintura y grabado.

Llegó así hasta Venecia, donde aprendió la teoría de la perspectiva que habían desarrollado los artistas de esa región, quedando convencido de que “sin la geometría, ninguno puede hacerse o ser un artista completo”.

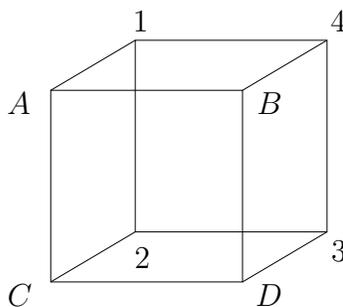
Decidió entonces actuar en consecuencia. Escribió el libro *Instituciones de geometría*, publicado por primera vez en Nuremberg en 1525 en alemán, y diez años después en París traducido al latín.

En la página xxi de la traducción al castellano, se lee:

*...puesto que la misma (la geometría) es el verdadero fundamento de todo el arte del dibujo, me pareció conveniente escribir para los alumnos estudiosos ciertos rudimentos... [D]*

Morris Kline, en [K], afirma que, desde entonces, la perspectiva se enseña en todas las escuelas de Europa.

Pero actualmente es muy común encontrar, incluso en libros o revistas de matemáticas, ilustraciones por computadora de paralelepípedos, en particular de cubos, realizadas por personas que claramente desconocen los rudimentos de la perspectiva (Figura 1).



**Figura 1:** ¿Cuál cara está atrás,  $ABCD$  ó  $1234$ ?

Tales cubos constituyen verdaderos *trompe l'œil*, engaños visuales, pues el cerebro ha registrado una ley que fue explicada por Leonardo Da Vinci (1452-1519) en [DV] así:

*139. Entre los cuerpos de igual altura, el que esté más lejos será el que aparezca (en el dibujo) más abajo.*

En la Figura 1, los cuadrados  $ABCD$  y  $1234$  son congruentes y no es posible determinar cuál de las dos caras está adelante y cuál está atrás.

Como además también es frecuente encontrar, incluso en textos de geometría, un manejo poco claro de los puntos al infinito, esperamos que este artículo demuestre que el conocimiento de los rudimentos de la perspectiva facilita el manejo correcto de los puntos al infinito de la geometría afín bidimensional, pues es a la geometría afín y no a la proyectiva a la que pertenece ese concepto: en el plano proyectivo todos los puntos son de la misma clase.

El tratamiento que presentamos del plano afín tiene varias ventajas: el paso al plano proyectivo resulta natural y la generalización de la geometría afín a dimensiones mayores es inmediata. Además, un programa como *Mathematica* permitirá hacer dibujos correctos a quien aplique las reglas básicas que aparecen en el inciso siguiente.

### De los puntos de fuga a los puntos al infinito

Se atribuye a Filippo Brunelleschi (1377-1446), la invención del concepto de **punto de fuga**, el punto en el que los bordes paralelos de un camino recto se juntarían si prolongáramos las líneas que aparecen en un dibujo.

Si el dibujo (o una fotografía) incluye un piso de mosaicos cuadrados,

por ser los lados de los cuadrados paralelos por pares, a cada par le corresponde un punto de fuga,  $F_h$  para un par y  $F_v$  para el otro.

Esos dos puntos de fuga son los mismos para todos los mosaicos, y en el plano del dibujo o de la fotografía determinan una recta, **la línea del horizonte** del plano de la perspectiva.

Pero cada cuadrado tiene además dos diagonales, y las diagonales de todos los cuadrados dan lugar a otros dos conjuntos de paralelas, cada uno de los cuales determina en la línea del horizonte su propio punto de fuga,  $F_d$  para unas y  $F_{d'}$  para las otras (Figura 2).

Con eso ya podemos dar dos reglas básicas para el dibujo en perspectiva:

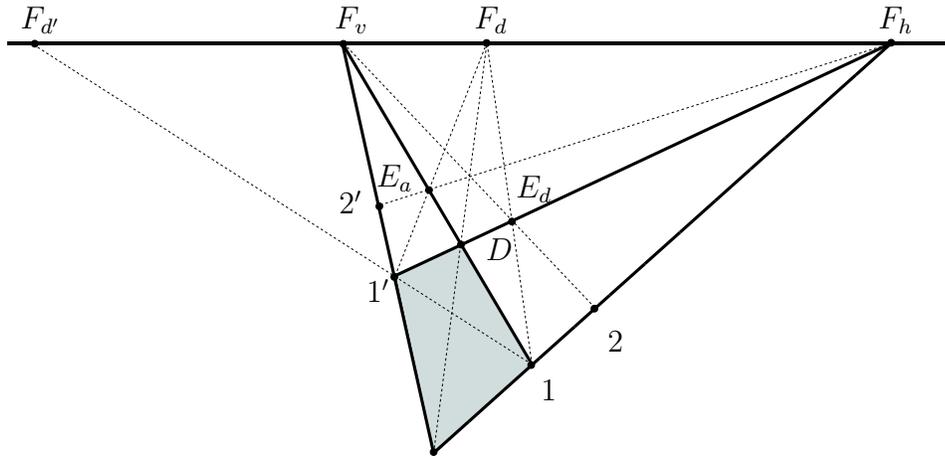
1. Cada familia de paralelas del plano del piso, determina en el plano del dibujo (el plano de la perspectiva) un punto de fuga.
2. Todos los puntos de fuga de las distintas familias de paralelas del plano del piso, se representan en una misma recta del plano de la perspectiva, la línea del horizonte.

Estas dos reglas simples permiten demostrar que **el dibujo de un solo mosaico determina el dibujo de todos los demás** (este hecho se traduce más tarde en el Teorema fundamental de la geometría proyectiva).

Para ilustrar nuestra afirmación, recordemos que cada par de lados paralelos del mosaico sombreado de la Figura 2, determina un punto de fuga,  $F_h$  y  $F_v$ ; esos dos puntos de fuga determinan la línea del horizonte, y la intersección de cada una de las diagonales  $d$  y  $d'$  con la línea del horizonte determinan los puntos de fuga  $F_d$  y  $F_{d'}$  en que **deben incidir** las diagonales de uno y otro tipo de todos los demás cuadrados.

Entonces, al dibujar el mosaico sombreado de la Figura 2, las esquinas 1 y 1' determinan con  $F_d$  las diagonales de los mosaicos de la "derecha de "arriba", respecto al mosaico sombreado; la intersección de esas diagonales con las rectas de los lados superior y derecho, respectivamente, del mosaico sombreado, dan las esquinas superior derecha tanto del mosaico de la derecha ( $E_d$ ) como del mosaico de arriba ( $E_a$ ) del mosaico sombreado.

Ahora basta trazar las rectas determinadas por  $E_d$  y  $F_v$ , y por  $E_a$  y  $F_h$  para tener dibujados completamente los mosaicos de la derecha:  $D12E_d$ , y de arriba:  $2'1'DE_a$  respecto al mosaico sombreado. Adicionalmente, se dibuja automáticamente el mosaico que sigue en diagonal al sombreado.



**Figura 2:** El dibujo de un solo mosaico determina el de todos los demás.

Este **algoritmo** puede iterarse para dibujar el resto de los mosaicos (infinitos en número) de la porción del plano de la perspectiva acotado por la línea del horizonte y la prolongación de los lados izquierdo e inferior del mosaico sombreado. Desde luego, también podemos dibujar los mosaicos de los otros tres “cuadrantes” con origen  $O$ , y para algunos de ellos sería más cómodo utilizar el punto de fuga de las otras diagonales,  $F_{d'}$ , en lugar de  $F_d$ .

Como un dibujo representa un único punto de vista, los artistas del Renacimiento no se preocuparon del problema planteado por el hecho de que al dar media vuelta, los bordes del camino parecen unirse en la dirección opuesta. Habría entonces dos puntos de fuga comunes a todas las rectas de un haz de paralelas, lo cual contrasta con el hecho de que dos puntos ordinarios determinan una única recta.

Veremos más adelante que la solución a este problema propuesta independientemente por Johannes Kepler (1571-1630) y por Gérard Desargues (1591-1661), consistente en dotar a cada familia de paralelas de un **único** punto al infinito, funciona muy bien. Sólo hace falta introducir en el juego la Banda creada por Ferdinand August Möbius (1790-1868) (vea [I]).

Volvamos al problema de dibujar correctamente un cubo; para ello, debemos generalizar el algoritmo ilustrado en la Figura 2, pues las doce aristas de un cubo se dividen en tres cuartetos de paralelas que no son coplanares.

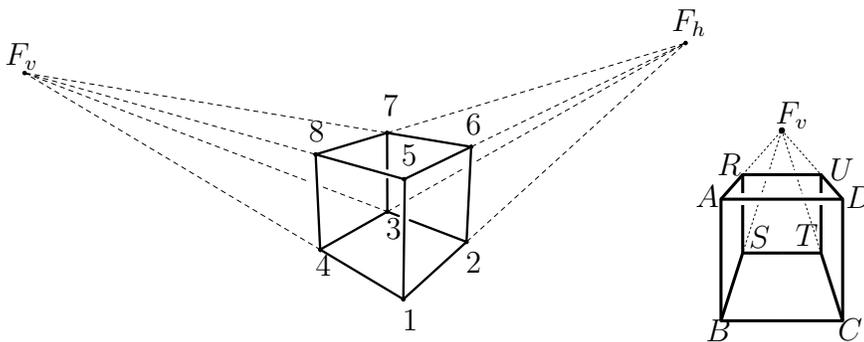
En los dibujos donde la mirada del espectador se dirige hacia de-

lante, no hacia arriba ni hacia abajo, se representa como paralelas en el plano del dibujo a las aristas perpendiculares al piso; las otras dos cuartetadas incluyen aristas de la base, que tienen los puntos de fuga  $F_h$  y  $F_v$  (Figura 3). En esos puntos de fuga deben incidir (las prolongaciones de) las aristas de la tapa paralelas a las que determinan, en el plano de la perspectiva del piso,  $F_h$  y  $F_v$ .

Eso da, automáticamente, el tamaño que **deben** tener en el dibujo las aristas verticales una vez que hayamos dibujado una sola de ellas, y si no se sigue esta regla tan sencilla, el dibujo parecerá deformado a nuestro cerebro, acostumbrado a “leer” en la retina la representación correcta de un cubo.

En la Figura 3 hemos dibujado dos cubos; en el primero hay una sola arista que está más próxima al espectador, y si hemos dibujado el cuadrado de la base, 1234, eso determina los puntos de fuga  $F_h$  y  $F_v$ . Entonces, al dibujar la arista vertical 15, las rectas  $F_v5$  y  $F_h5$  determinan la longitud de las aristas 26 y 48 y el último vértice, 7, está dado por la intersección de las rectas  $F_v6$  y  $F_h8$ .

El segundo cubo tiene una de sus caras,  $ABCD$  de frente al espectador, por eso se le representa con un cuadrado, y la base  $SBCT$  da lugar a un único punto de fuga,  $F_v$ , pues las aristas  $BC$  y  $ST$  son paralelas en el plano del dibujo. Ese único punto de fuga basta para determinar las rectas  $FA$  y  $FD$  cuyas intersecciones con las paralelas a  $AB$  y  $CD$  por  $S$  y  $T$ , dan lugar a los vértices  $R$  y  $U$ , respectivamente.



**Figura 3:** Dibujo correcto de dos cubos con la base en el piso.

En matemáticas, los puntos de fuga se llaman **puntos al infinito**, y la línea del horizonte del plano de la perspectiva se llama **recta al infinito**.

El algoritmo presentado en este inciso muestra que si bien en el plano del dibujo (Figura 2), los mosaicos no tienen todos las mismas

medidas, es falso que las longitudes de sus lados sean arbitrarias: están determinadas por la **incidencia** de rectas. Por ejemplo, para construir la esquina inferior derecha del mosaico tercero en  $OF_h$ , trazamos  $F_d2$  que corta a  $1'F_h$  en lo que debe ser la esquina superior derecha de dicho mosaico,  $S_d$ ; la recta  $F_dS_d$  corta a  $OF_h$  en el punto correspondiente a 3.

Podemos asociar cada familia de paralelas con una pendiente: los lados “horizontales” de los mosaicos corresponden a la pendiente  $m = 0$ , los lados “verticales” corresponden a la pendiente  $m = \infty$ , las diagonales que van de abajo a la izquierda a arriba a la derecha, tienen pendiente  $m = 1$ , y las otras diagonales tienen pendiente  $m = -1$ .

Es claro que así como los bordes de los mosaicos no pueden ubicarse arbitrariamente, tampoco el punto al infinito correspondiente a una pendiente puede elegirse arbitrariamente en la recta al infinito.

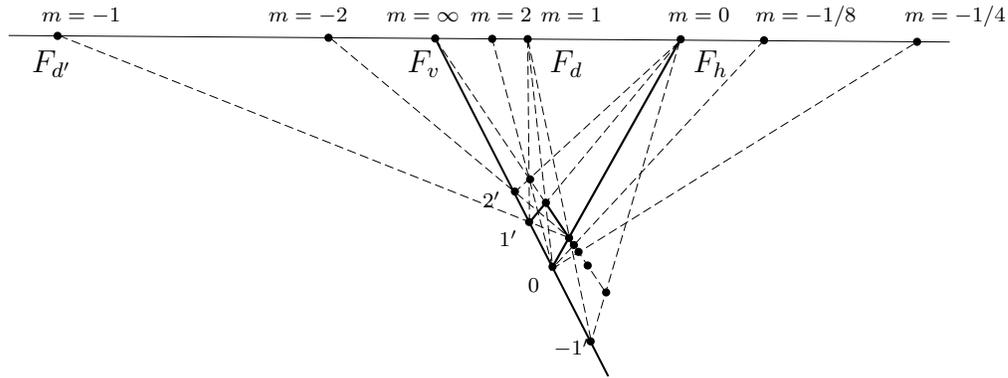
Por ejemplo, para la pendiente  $m = 2$  debe tomarse en cuenta dos mosaicos, uno encima de otro, y trazar la recta determinada por la esquina inferior izquierda del mosaico de abajo y la esquina superior derecha del mosaico de arriba; su intersección con la recta al infinito dará el punto al infinito correspondiente a  $m = 2$ .

Los puntos de la porción de la recta al infinito (la antigua línea del horizonte) abarcada por  $OF_h$  y  $OF_v$  en la Figura 2, corresponden todos a pendientes positivas, mientras que los puntos asociados a pendientes negativas quedan fuera de ese segmento, ya sea a la izquierda de  $F_v$  o a la derecha de  $F_h$ .

La Figura 4 muestra que los puntos correspondientes a  $m = -1$ ,  $m = -2$ , etc. quedan a la izquierda de  $E_v$ , mientras que los puntos asociados a  $m = -1/8$ ,  $m = -1/4$ , etc., quedan a la derecha de  $E_h$ .

Como el punto correspondiente a  $m = -1/2$  debe quedar simultáneamente a la izquierda de  $m = -1$  y a la derecha de  $m = -1/4$ , eso sugiere que la recta al infinito debe ser una curva cerrada, semejante a una gran circunferencia, lo cual concuerda con la idea de añadir un único punto al infinito a cada recta: ese punto ideal pega los “dos extremos” de las rectas ordinarias, convirtiéndolas en curvas cerradas, y lo mismo ocurre para la recta al infinito. Pero, para todo propósito práctico, es válido dibujar la recta al infinito como (un segmento de) recta.

El grabador holandés M.C. Escher (1898-1972), ilustra esa idea en su xilografía *Arriba y abajo*, [Es], donde funde el *zenit*, nombre dado al punto de fuga de las aristas de un edificio perpendiculares al piso cuando se le contempla desde abajo, con el *nadir*, nombre dado al punto de fuga de esas mismas aristas cuando se les mira desde arriba hacia abajo. El libro, escrito por Escher mismo, describe la evolución de las



**Figura 4:** El punto al infinito correspondiente a una pendiente negativa queda a la izquierda o a la derecha del segmento  $F_v F_h$  de la recta al infinito, dependiendo de su valor y del punto de vista del dibujante.

ideas geométricas en el autor.

Cuando añadimos los puntos al infinito a los puntos ordinarios del plano euclidiano, obtenemos un sistema geométrico con puntos de dos clases, pero es posible dotarlos simultáneamente de coordenadas de suerte que, siguiendo la definición de geometría dada por Félix Klein (1849-1925), exista un grupo de transformaciones que, preservando la diferencia entre las dos clases de puntos, nos permitan analizar cuáles son los invariantes asociados a ese grupo.

De todo eso nos ocuparemos en el inciso siguiente, pero antes de concluir éste queremos dar una aplicación de la utilización de los puntos de fuga para ubicar, usando una fotografía de una cámara instalada en una habitación, el extremo superior  $P$  de un segmento  $PH$  perpendicular al piso de la habitación. Eso permitiría dirigir, con una cierta precisión, un brazo mecánico a un objeto tridimensional cuya ubicación corresponda aproximadamente al extremo superior del segmento.

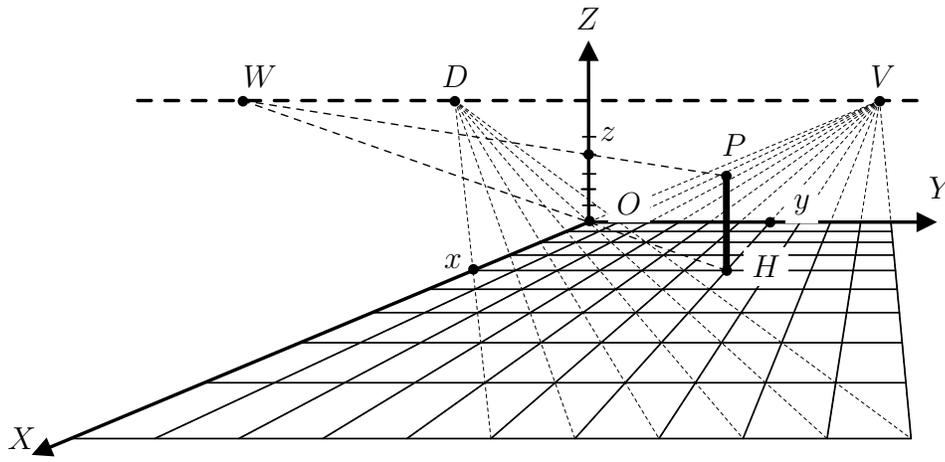
El piso de la habitación debe tener marcados cuadrados de lados 1 y sus submúltiplos decimales, hasta el orden requerido por la precisión deseada; entonces las coordenadas  $x, y$  del punto  $H$  están dadas en la fotografía por la cuadrícula del piso.

Sólo resta determinar la altura  $z$  del punto  $P$  a partir de la fotografía. Para ello, marcamos también en la arista de la habitación perpendicular al piso y que puede observar la cámara, puntos correspondientes a múltiplos y submúltiplos de la unidad.

En la fotografía tomada por la cámara podemos determinar la línea

del horizonte del plano de la fotografía utilizando los puntos al infinito  $V$  de los lados “verticales” de los cuadrados, y  $D$ , de las diagonales de los cuadrados. El punto al infinito  $W$  de la diagonal del paralelogramo  $OxHy$  es la intersección de la línea del horizonte  $VD$  con la diagonal  $OH$  (Figura 5).

La tercera coordenada,  $z$ , está dada por la marca de la intersección de  $PW$  con la arista de la habitación perpendicular al piso.



**Figura 5:** Determinación de las coordenadas de un punto  $P$  usando una fotografía.

### El plano afín

Al conjunto unión del conjunto de los puntos del plano euclidiano con el conjunto de los puntos al infinito, lo llamaremos **el plano afín** y lo denotaremos por  $A^2$ . Por tanto, estamos añadiendo la línea al infinito al plano euclidiano, cuyos elementos llamaremos puntos ordinarios.

Es posible dar coordenadas a los puntos del plano afín, pero como los puntos ordinarios agotan los pares ordenados de coordenadas, debemos usar al menos tres coordenadas, y la última no puede ser variable porque entonces tendríamos tantos puntos como en el espacio tridimensional.

Propongamos entonces dejar la tercera coordenada fija y elijamos el número 1 para esa tercera coordenada. Entonces, las coordenadas de un punto ordinario del plano afín serán  $(x, y, 1)$ , con  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

En el caso de los puntos al infinito, recordemos que cada uno está asociado a una pendiente, y que una pendiente está asociada a un cociente de dos números reales  $\lambda$  y  $\mu$  que no son ambos cero:  $m = \lambda/\mu$ ; es claro

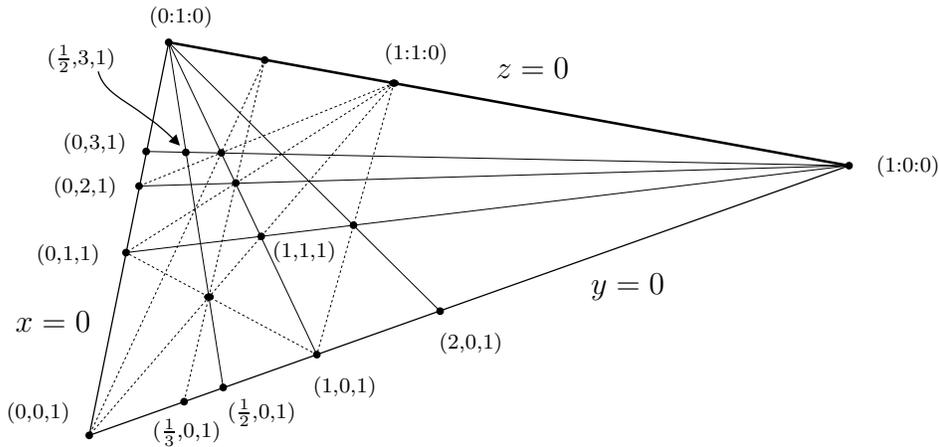
que  $\lambda$  y  $\mu$  pueden multiplicarse por un mismo número  $k \neq 0$  sin que el cociente se altere. Entonces, como el tercer número de las tres coordenadas de un punto al infinito debe distinguirlo de un punto ordinario, y no debe depender del par que define el cociente, es conveniente elegir al número 0.

Con eso, las coordenadas del punto al infinito correspondiente a la pendiente  $m$  estarán dadas por cualquier terna  $(\lambda : \mu : 0)$  donde  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ ; el cociente de la primera entre la segunda dará el número  $m$ , incluyendo el caso en que  $\mu$  sea 0, asociado a  $m = \infty$ , y los dos puntos entre las coordenadas de un punto al infinito recuerdan que los números  $\lambda$  y  $\mu$  pueden multiplicarse por una misma constante, porque eso no altera la pendiente.

En resumen, el plano afín consta de los puntos siguientes:

$$\mathbb{A}^2 = \{(x, y, 1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(\lambda : \mu : 0) \mid (\lambda, \mu) \neq (0, 0)\}.$$

El plano de la perspectiva tiene ahora tres ejes:  $y = 0$ ,  $x = 0$  y  $z = 0$ , como lo muestra la Figura 6.



**Figura 6:** El plano de la perspectiva es un modelo local del plano afín.

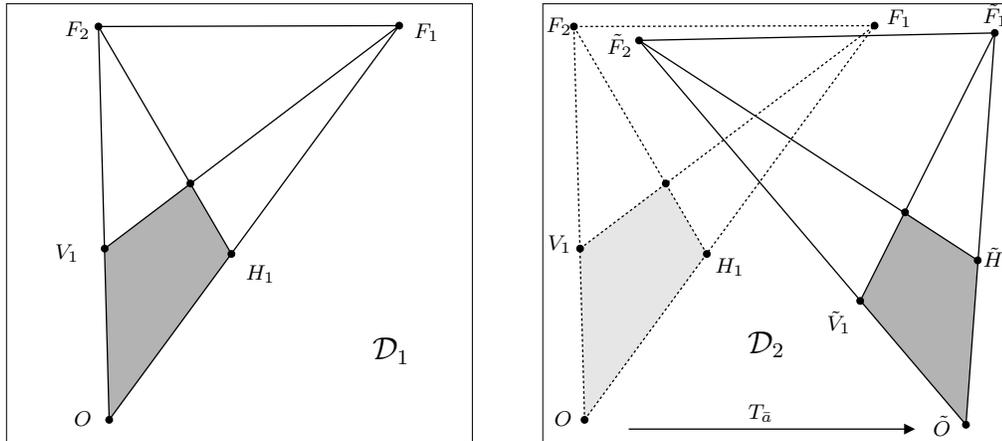
En cuanto a las transformaciones admisibles, basta notar que al mirar dos dibujos o fotografías de un mismo lugar tomadas desde puntos de vista distintos, siempre reconocemos que se trata del mismo lugar.

Esto implica que el cerebro de cualquier persona reconoce invariantes que casi nadie concientiza.

Por ejemplo, las rectas paralelas debidas a los bordes de un camino o a ciertas aristas de un edificio aparecerán en ambos casos como concurrentes en un punto al infinito del plano de la fotografía, aunque esos puntos al infinito tengan distinta ubicación en cada uno de los dibujos.

La Figura 7 muestra el caso sencillo de dos dibujos de un piso de mosaicos, en cada uno de los cuales hemos sombreado el dibujo de un mosaico elegido al azar. Si en el piso hemos elegido un vértice del mosaico como origen de coordenadas  $O$ , y los dos lados concurrentes en  $O$  como ejes  $X$  y  $Y$ , para llevar el mosaico sombreado de un dibujo en el otro, basta aplicar la transformación lineal no singular  $L$  que lleve los vectores linealmente independientes  $\bar{e}_1$   $\bar{e}_2$  en los vectores linealmente independientes  $\bar{e}'_1$   $\bar{e}'_2$ , y aplicar después la traslación  $T$  que lleve  $O$  en  $O'$ .

Es interesante hacer notar que la aproximación de primer grado (en el sentido de Taylor) de una transformación diferenciable del plano cartesiano en sí mismo, es composición de una traslación con una transformación lineal; si esta última es no singular, dicha aproximación es una transformación afín.



**Figura 7:** La composición de una traslación con una transformación lineal no singular lleva uno de los dibujos en el otro.

Una matriz de  $3 \times 3$  no singular que expresa la composición  $T \circ L$ , tiene la forma siguiente (suponemos  $ad - bc \neq 0$ ):

$$\begin{pmatrix} a & b & r \\ c & d & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

como puede verificarse al aplicar esa matriz al vector columna formado por las coordenadas de un punto ordinario:

$$\begin{pmatrix} a & b & r \\ c & d & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + r \\ cx + dy + s \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Al analizar el vector columna resultante, vemos que corresponde a un punto ordinario, porque la tercera coordenada es 1, y que las dos primeras coordenadas implican que el punto  $(x, y)$  sufrió una transformación lineal (dada por la matriz con entradas  $a, b, c, d$ ) seguida de una traslación por el vector  $(r, s)$ .

En cambio, cuando multiplicamos la matriz por un vector columna que represente a un punto al infinito, obtenemos otro punto al infinito:

$$\begin{pmatrix} a & b & r \\ c & d & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda + b\mu \\ c\lambda + d\mu \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las matrices de este tipo forman un grupo,  $A(2)$ , que llamaremos **el grupo afín**, y la **geometría afín** es el conjunto de invariantes bajo ese grupo de transformaciones.

De acuerdo con los cálculos anteriores, el tipo de punto es un invariante afín, es decir, un punto ordinario sólo puede transformarse en un punto ordinario (de hecho, en cualquier otro), y un punto al infinito sólo puede transformarse en otro punto al infinito (en cualquier otro),

Otros invariantes afines son las rectas y las cónicas, es decir, bajo una transformación afín una ecuación polinomial de primer grado y otra de segundo van en ecuaciones polinomiales de los grados respectivos.

Para demostrarlo, basta considerar por separado la traslación y la transformación lineal no singular: una traslación lleva rectas en rectas y cónicas en cónicas, pues las traslaciones son transformaciones rígidas.

Es muy sencillo comprobar que bajo una transformación lineal no singular, una ecuación de primer grado en 2 variables se aplica en otra ecuación del mismo tipo, y para comprobar que el signo del discriminante de una cónica se conserva, basta tomar en cuenta la relación entre la matriz  $M'$  de la cónica transformada y la matriz  $M$  de la cónica original:

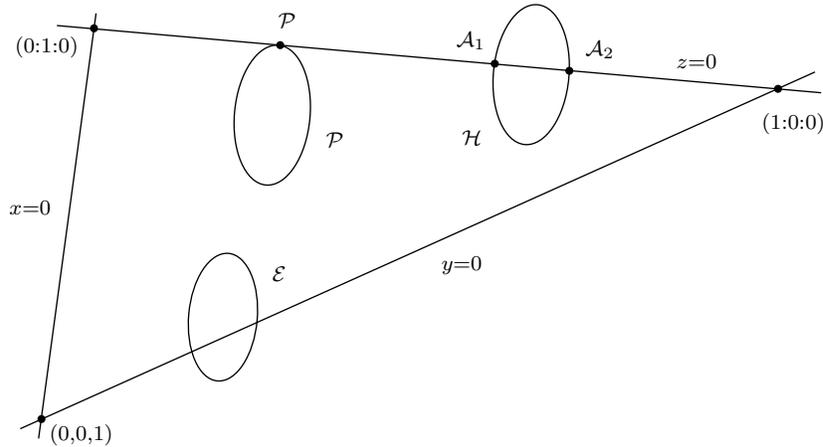
$$M' = (L^{-1})^t M L^{-1},$$

donde  $L^{-1}$  es la matriz de la inversa de la transformación lineal no singular  $L$ .

El discriminante de la cónica transformada es el negativo del determinante del producto de matrices escrito arriba, y como el determinante de una matriz y el de su transpuesta coinciden, el signo del determinante de  $M'$  es igual al signo del determinante de la matriz  $M$  de la cónica original.

Otra forma de analizar lo anterior es considerar los puntos al infinito de una cónica.

Como la elipse es una curva acotada, no tiene puntos al infinito. Por tanto, en el plano de la perspectiva una elipse no toca a la recta al infinito (Figura 8).



**Figura 8:** Los tipos de cónica y sus puntos al infinito.

Pero una parábola sí tiene un punto al infinito, porque la tangente en uno de sus puntos tiende a volverse paralela al eje focal cuando el punto se aleja del vértice en cualquiera de las dos direcciones.

Entonces, en el plano de la perspectiva, una parábola es tangente a la recta al infinito (Figura 8).

En el caso de una hipérbola, los puntos al infinito son dos: los asociados a las pendientes de sus asíntotas, pues al alejarse un punto de la hipérbola del vértice en cualquiera de sus ramas, la recta tangente en el punto tiene como límite la asíntota.

En consecuencia, en el plano de la perspectiva, una hipérbola corta a la recta al infinito en dos puntos (Figura 8).

El concepto de punto al infinito permite justificar la afirmación siguiente:

*el “otro foco” de la parábola es el punto al infinito del eje de la parábola.*

Una parábola puede verse como un caso límite de elipse: cuando el ángulo  $\phi$  entre el plano de corte de un cono y el eje del mismo, tiende al ángulo  $\theta$  entre una generatriz y el eje.

Para una elipse, los focos son los puntos de tangencia de las esferas

de Dandelin (ver [Ev]) con el plano de corte, y al inclinar el plano de corte para que el ángulo  $\phi$  coincida con el ángulo  $\theta$ , uno de los focos se aleja sin cota sobre el eje de la elipse: tiende al punto al infinito del eje.

Justifiquemos ahora haber llamado al plano de la perspectiva *modelo local* de la geometría afín.

Para ello, volvamos al problema de lograr una representación fiel de una escena cualquiera.

Hay dos xilografías de Durero incluidas en [D]; la más conocida muestra la *Técnica con la que cualquier cosa que se ve y no está muy lejos de la vista, ha de ser medida con tres hilos, y así transferida a la pintura*. La Figura 9 muestra la otra, *Manera de dibujar lo que se ve por un vidrio*.

El vidrio en que se traza el dibujo puede acercarse o alejarse, y en los dos dibujos habría puntos correspondientes a un mismo punto del sujeto. (Mucho tiempo después, Vincent van Gogh (1853-1890), febrilmente pragmático, utilizó una tela traslúcida para dibujar lo que veía a través de ella [W].)



**Figura 9:** Xilografía de Alberto Durero para enseñar cómo lograr un dibujo correcto.

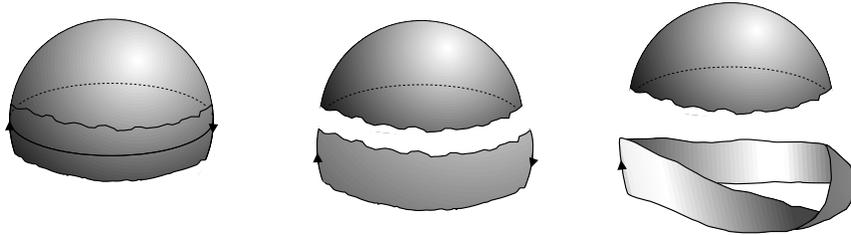
Eso precisamente es lo que dice la definición del **plano proyectivo real**,  $P^2(\mathbb{R})$ , donde **un punto proyectivo** es una clase de equivalencia, la definida por los puntos del espacio cartesiano tridimensional pertenecientes a una recta por el origen excluyendo al origen:

$$P^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 - \{0\} / \sim,$$

donde  $\sim$  se define así:  $(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$  para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

En la definición de  $P^2(\mathbb{R})$  podemos restringirnos a puntos de norma 1, pertenecientes a la esfera con centro en el origen y radio 1 en  $\mathbb{R}^3$ ; únicamente hace falta identificar los puntos antípodas de la esfera.

Al intentarlo, es fácil comprobar que el plano proyectivo real contiene una Banda de Möbius y, en consecuencia, es una superficie que sólo tiene un lado: marcamos un cinturón en torno al ecuador, nos quedamos con sólo uno de los casquetes porque el otro contiene a los antípodas del primero, y nos quedamos sólo con la parte delantera del cinturón porque la parte posterior contiene a los antípodas de la parte delantera. Como los segmentos izquierdo y derecho de la franja delantera contienen puntos antípodas, deben pegarse en direcciones opuestas y se forma una Banda de Möbius (Figura 10).



**Figura 10:** El plano proyectivo sólo tiene un lado.

Un punto proyectivo se representa por  $(x : y : z)$ , donde los dos puntos entre las coordenadas recuerdan que pueden utilizarse ternas equivalentes.

El conjunto de los puntos proyectivos que satisfacen  $z = 0$  es una recta proyectiva, y como las transformaciones proyectivas son clases de matrices no singulares de  $3 \times 3$ , el subgrupo cuyo último renglón es  $(0 \ 0 \ 1)$  corresponde precisamente al grupo afín.

En resumen, para dibujar el plano afín completo, deberíamos haber dibujado el plano proyectivo real distinguiendo en él una recta,  $z = 0$ , que como conjunto permanece invariante bajo las transformaciones afines.

Pero al dibujar el plano de la perspectiva, sólo hemos ilustrado una parte del plano proyectivo, la que equivale a un disco, y evitamos exhibir la Banda.

Por eso llamamos al plano de la perspectiva modelo local del plano afín. Para más detalles sobre el plano proyectivo, puede consultarse [C] o [R-S].

## Referencias

- [B-ML] Birkhoff, G., McLane, S. *A Survey of Modern Algebra*, Macmillan, 1963.
- [C] Coxeter, H.S.M. *The Real Projective Plane*, Cambridge University Press, 1961.
- [D] Durero, A. *Instituciones de Geometría*, Fuentes **3**, IIB, UNAM, 1987.
- [DV] Da Vinci, L. *Tratado de la pintura*, Colección Austral **650**, Espasa Calpe, 1964.
- [Es] Escher, M.C. *The Graphic Work*, Taschen, 1989.
- [Ev] Eves, H. *Estudio de las geometrías*, UTEHA, 1969.
- [I] Illanes, A. *La caprichosa forma de Globión*, la ciencia para todos **168**, Fondo de Cultura Económica, 1999.
- [K] Kline, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1990.
- [R-S] Ramírez-Galarza, A. Seade, J. *Introducción a la geometría avanzada*, Las Prensas de Ciencias, UNAM, 2a. edición 2005.
- [W] Walter, I., Metzger, R. *Vincent van Gogh. La obra completa: pintura*, Taschen, 2001.