ALGUNAS APLICACIONES DEL ALGEBRA LINEAL EN LA GEOMETRIA EUCLIDIANA

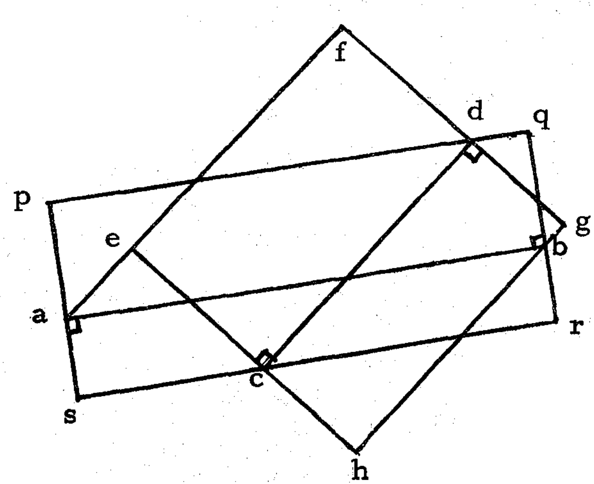
Por: Luis Verde Star

Sean L_1, L_2 dos segmentos de recta en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. Supongamos que los extremos de L_1 son los puntos $\underline{a}$ y $\underline{b}$ y los extremos de L_2 son $\underline{c}$ y $\underline{d}$. Notación: $L_1 = [a,b]$, $L_2 = [c,d]$.

Si por los extremos de L_1 trazamos rectas paralelas a L_2 y por los extremos de L_2 trazamos rectas perpendiculares a L_2, los puntos de intersección de éstas cuatro rectas, que llamaremos p, q, r, s, son los vértices de un rectángulo, diremos que éste rectángulo está generado por L_1 y L_2 (en éste orden). (Ver fig. 1)

Si ahora repetimos tal construcción pero reemplazando L_1 por L_2 y L_2 por L_1, obtendremos un rectángulo con vértices e, f, g, h, en general diferente del rectángulo p, q, r, s, .

Fig. 1



Demostraremos que el área del rectángulo p,q,r,s es igual que el área del rectángulo e,f,g,h. Nótese que en algunos casos, como L_1 paralelo a L_2 ó longitud $L_i=0$, $i=1$ ó 2 ambos rectángulos se reducen a un segmento de recta. Nótese también que la construcción de tales rectángulos se puede efectuar para <u>cualquier</u> par de segmentos L_1, L_2 aun cuando éstos segmentos de recta no se intersecten.

Introducimos ahora un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales e identificamos los puntos del plano con vectores de $\mathbb{R}^2$ usando la notación $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ etc. y $\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ = longitud del vector x.

Si $x, y \in \mathbb{R}^2$ definimos: $(x,y)=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$, entonces tenemos que

$\det(x,y)=x_1 y_2 - x_2 y_1$

Recordemos que toda rotación en $\mathbb{R}^2$ se puede representar por una matriz

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad -\pi < \alpha \leq \pi \quad , \quad \text{que } \det R_\alpha = \cos^2_\alpha + \operatorname{sen}^2_\alpha = 1$$

y que $\|R_\alpha x\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Usaremos también que $\det(ST)=\det S \cdot \det T$, donde S y T son matrices cuadradas de la misma dimensión.

Sean $u = b-a$, $v= d-c$, $A= |\det(u ,v)|$

Proposición: $A=$ área del rectángulo $p,q,r,s,=$ área del rectángulo $e,f,g,h.$

Demostración: Sea R_α una rotación tal que $u'=R_\alpha u=(u_1',0)$, ($\alpha=-\arctan(u_2/u_1)$, $\alpha=-\pi/2$ si $u_1=0$) , sea $v'=R_\alpha v$. Entonces $R_\alpha(u,v)=(u',v')$ y por lo tanto $\det(u',v')=\det R_\alpha \det(u,v)=\det(u,v)$ y $A= |\det(u,v)| = |u_1' v_2' - u_2' v_1'| = |u_1' v_2'| = |u_1'| \; |v_2'|$

pero $|u_1'| = \|u'\| = \|u\|$ y $|v_2'| =$ longitud de la componente de v' perpendicular a u' = longitud de la componente de v perpendicular a u, por lo tanto A es el área del rectángulo p,q,r,s .

Si tomamos una rotación R_β tal que $v'=R_\beta v'=(v_1',0)$, $u'=R_\beta u$ obtenemos $A= |\det(u',v')| = |-u_2' v_1'| = |v_1'| \; |u_2'| = \|v\|$. longitud de la componente de u perpendicular a v = área del rectángulo $e,f,g,h.$

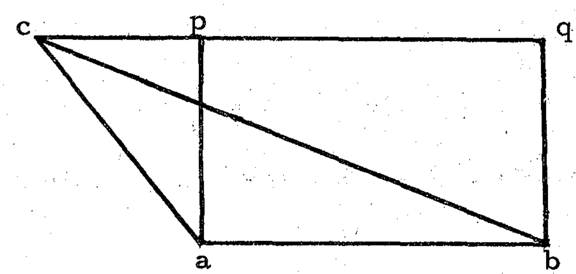
Corolario 1: Si a,b son los extremos de un lado de un rectángulo y d es cualquier punto en el lado opuesto, entonces el área del rectángulo es igual a $|\det(b-a, d-a)|$

Demostración.- Tómese $a=c$ en la proposición anterior.

Corolario 2: Si a,b,c son los vértices de un triángulo entonces el área del triángulo está dada por $1/2 \; |\det(b-a,\ c-a)|$

<u>Demostración</u>.- Construimos un rectángulo en la forma siguiente: por los puntos a y b trazamos rectas perpendiculares al segmento $[a,b]$, por el punto c trazamos una recta paralela al segmento $[a,b]$, sean p y q los puntos de intersección de estas rectas. Es claro que p,q,a,b son los vértices de un rectángulo (ver fig. 2).

Fig. 2



Area del triángulo $c\,a\,b$ = área del triángulo $p\,a\,b$ pues tienen la misma base y la misma altura = $\|p-a\|$,

pero área del triángulo $p\,a\,b$ = $1/2$ área del rectángulo p,q,a,b, y éste es el rectángulo generado por los segmentos $L_1 = [a,c]$, $L_2 = [a,b]$ y por lo tanto su área es igual a $|\det(b-a,c-a)|$

El corolario anterior puede utilizarse para calcular áreas de polígonos (no necesariamente convexos). Por ejemplo, si $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ son los vértices de un polígono estrellado con respecto a un punto b en su interior, (esto es; los segmentos $[a_i, b]$ están contenidos en el interior del polígono para $i=1,2,\dots,n$) y además los vértices están ordenados de tal forma que el índice i crece al recorrer el perímetro del polígono en la dirección positiva usual (contra las manecillas del reloj) entonces, si definimos $u_i = a_i - b$, $i=1,2,\ldots, n$, $u_{n+1} = u_1$ y denotamos el área del polígono por A tendremos

$$A = 1/2 \sum_{i=1}^{n} \det(u_i , u_{i+1})$$

No es necesario tomar valores absolutos debido a las condiciones de orientación de los vértices. Nótese que el punto b puede ser alguno de los vértices del polígono.

Para evaluar un determinante solo se requieren operaciones de suma y multiplicación, por ésto en algunos casos es más conveniente calcular áreas usando determinantes que usando trigonometría o fórmulas que requieren el cálculo de distancias y por tanto de raices cuadradas.

Estudiaremos ahora la relación entre el producto escalar en $\mathbb{R}^2$ y la función det considerada como una función de dos variables de $\mathbb{R}^2$.

Si $x, y \in \mathbb{R}^2$ denotamos el producto escalar de x e y por

$< x, y > = x_1 y_1 + x_2 y_2$ y definimos $\arg(x)=$ ángulo desde el vector $(1,0)$ al vector x medido en la dirección positiva usual (contra las manecillas del reloj). Definimos la función $y \to y^*$ para $y \in \mathbb{R}^2$ por la ecuación $y^* = (-y_2, y_1)$, entonces tenemos:

$$(y^*)^* = y \ , \qquad \| y^* \| = \| y \| \ , \qquad \arg(y^*) = \pi/2 + \arg(y)$$

Del corolario 1 se obtiene que para todo par de vectores $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$|\det(x,y)| = \|x\| \ \|y\| \ |\operatorname{sen}\theta| \qquad \text{donde } \theta = \arg(y) - \arg(x) ,$$

como las rotaciones del plano tienen determinante igual a $+1$ es fácil ver que $\det(x,y) = \|x\| \ \|y\| \operatorname{sen}\theta$ pues es suficiente considerar el caso $x = (x_1, 0)$.

Consideremos la ecuación :

$$<x, y^*> = -y_2 x_1 + y_1 x_2 = \det(y,x) = -\det(x,y)$$

como $(y^*)^* = y$ se tiene

$$\begin{aligned} <x, y> &= -\det(x, y^*) \\ &= -\|x\| \ \|y^*\| \operatorname{sen}(\arg(y^*) - \arg(x)) \\ &= -\|x\| \ \|y\| \operatorname{sen}(\pi/2 + \arg(y) - \arg(x)) \\ &= \|x\| \ \|y\| \cos(\arg(y) - \arg(x)) \\ &= \|x\| \ \|y\| \cos\theta \qquad \text{donde } \theta \text{ es el ángulo entre} \end{aligned}$$

x e y .

(la orientación de θ no importa porque $\cos\theta = \cos(-\theta)$) .

Este último resultado generalmente se demuestra utilizando la ley de los cosenos, aquí hemos usado la identidad $\cos\theta = -\operatorname{sen}(\pi/2+\theta)$

También se pueden usar determinantes para calcular volúmenes, por ejemplo : si a,b,c,d son puntos en $\mathbb{R}^3$ tales que los segmentos $[a,b]$, $[a,c]$, $[a,d]$ son aristas de un paralelepípedo, el volumen de éste es igual a $|\det(b-a,\ c-a,\ d-a)|$, pues se puede encontrar una rotación que transforma la matriz $(b-a,\ c-a,\ d-a)$ en la matriz

$$\begin{pmatrix} \pm\|b-a\| & 0 & 0 \\ 0 & \pm\|c-a\| & 0 \\ 0 & 0 & \pm\|d-a\| \end{pmatrix}$$