Miscelánea Matemática **82** (2026) 39-51 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.8204

Sobre teoría de juegos y el teorema del votante mediano

David González Sánchez
Departamento de Matemáticas
CONAHCYT–Cinvestav-IPN
dgonzalezsa@conahcyt.mx
y
Feliú Sagols
Departamento de Matemáticas
Cinvestav-IPN
fsagols@math.cinvestav.edu.mx

1. Introducción

La teoría de juegos es un área extensa de las matemáticas, su rango va desde lo elemental [1, 10, 14] hasta modelos más sofisticados [11, 17]. La teoría de juegos ha sido útil para comprender algunos fenómenos en diferentes áreas de la ciencia [2, 4, 8]. Sin embargo, algunos supuestos, como la información completa sobre el juego o las habilidades computacionales de los jugadores, son difíciles de cumplir. Por lo tanto, la teoría de juegos aplicada es multidisciplinaria y requiere esfuerzos no solo de matemáticos sino también de informáticos y científicos sociales, entre otros.

Consideramos el teorema del votante mediano como un ejemplo para ilustrar uno de los conceptos de solución más estudiados en la teoría de juegos: el equilibrio de Nash. Este teorema se refiere a un juego de votación en el que dos candidatos (jugadores) anuncian sus preferencias políticas para obtener votos y ganar una elección. Bajo supuestos adecuados, el equilibrio de Nash les dice a ambos candidatos que se ubiquen en la mediana de la distribución de votantes. Resulta que el mismo juego con tres candidatos no tiene equilibrio de Nash. Sin embargo, cuando imponemos algunas restricciones, sí existe un equilibrio de Nash para el juego de tres jugadores.

Palabras clave: Juegos no-cooperativos, Equilibrio de Nash, Aproximación de densidades.

En la siguiente sección, proporcionamos la definición de *equilibrio de Nash*, que es el punto de partida en el estudio de los juegos no cooperativos. La sección 3 está dedicada al Teorema del votante mediano. En la sección 4, proponemos una metodología para estimar la distribución de votantes. En la sección 5, incluimos la demostración de un teorema clásico de existencia de equilibrios. Finalizamos con algunas observaciones adicionales en la sección 6.

2. Juegos no-cooperativos

Definición 2.1. Un juego (A, r) con n jugadores en forma normal consiste de conjuntos de acciones

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

y recompensas

$$r : A \to \mathbb{R}^n,$$

donde la componente $r_j : A \to \mathbb{R}$ de r es la recompensa del jugador $j = 1, \ldots, n$.

En el contexto de los juegos no cooperativos, se supone que los jugadores toman sus decisiones con el fin de maximizar sus recompensas. Los jugadores eligen acciones de manera independiente y simultánea. Uno de los principales conceptos de solución en juegos no cooperativos es el *equilibrio de Nash* cuya definición se da a continuación.

Dado el vector de acciones $\hat{a} \in A$ y $a_j \in A_j$, usaremos la notación

$$(\hat{a}_{-j}, a_j) := (\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{j-1}, a_j, \hat{a}_{j+1}, \ldots, \hat{a}_n),$$

es decir, la combinación de acciones $(\hat{a}_{-j}, a_j)$ se obtiene de $\hat{a}$ reemplazando $\hat{a}_j$ por a_j.

Definición 2.2. Sea (A, r) un juego con n jugadores en forma normal. El vector de acciones $\hat{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n)$ es un equilibrio de Nash si para cada jugador j

$$r_j(\hat{a}) \geq r_j(\hat{a}_{-j}, a_j) \qquad \forall a_j \in A_j.$$

Intuitivamente, cuando se tiene un equilibrio de Nash $\hat{a}$, los jugadores no tienen incentivos para cambiar de manera unilateral sus acciones (también llamadas estrategias). Es decir, si el jugador j cambia su acción $\hat{a}_j$ por $a_j \in A_j$, y los otros jugadores mantienen sus acciones en $\hat{a}$, entonces la recompensa $r_j(\hat{a}_{-j}, a_j)$ no es mayor que $r_j(\hat{a})$ por lo que esperaríamos que el jugador j no cambie su acción de equilibrio. En este sentido, si los jugadores mantienen las acciones $\hat{a}$, entonces el juego está en un *equilibrio estratégico.*

Dado un juego en forma normal y un vector de acciones $\hat{a}$, algunas veces podemos verificar directamente si $\hat{a}$ es un equilibrio de Nash utilizando la definición 2.2. En la siguiente sección seguimos esta forma de verificación. En general, sin embargo, necesitamos teoremas que ofrezcan condiciones suficientes para la existencia de equilibrios de Nash.

Hay algunos juegos con conjuntos finitos de acciones que no tienen equilibrios de Nash. Sin embargo, considerando *estrategias mixtas o aleatorias* (las cuales son distribuciones de probabilidad para cada conjunto de acciones), la existencia de equilibrios de Nash se cumple para cualquier juego finito. Esto fue probado por J. F. Nash [13] quien también introdujo la noción de equilibrio. La existencia de equilibrios de Nash, en estrategias mixtas, para juegos de n-jugadores cuyos conjuntos de acciones son espacios topológicos compactos y de Hausdorff fue demostrado por Glicksberg [5].

Existen también resultados sobre la existencia de equilibrios de Nash en estrategias puras, como el que enunciamos y demostramos en la sección 5.

3. El teorema del votante mediano

El teorema del votante mediano se refiere a la existencia de equilibrios de Nash en una versión modificada de un *modelo de ubicación* de Hotelling [9]. En el presente artículo, seguimos la nomenclatura de Aliprantis y Chakrabarti [1] así como Osborne y Rubinstein [14].

Ejemplo 3.1 (Juego de votación con dos candidatos)**.** Supongamos que existe un continuo de votantes cuyas preferencias políticas se ubican en un punto del intervalo $[0, 1]$. La distribución de estas preferencias tiene una densidad, lo que significa que existe una función f integrable y no negativa tal que $\int_0^1 f(s)ds = 1$ (la figura 1 muestra una función de densidad típica). Hay dos candidatos, C1 y C2, quienes anuncian una posición dentro del intervalo $[0, 1]$. Los votantes eligen entonces al candidato cuya posición anunciada esté más cerca de su propia preferencia política. Si ambos candidatos anuncian la misma posición, entonces el total de votos se divide en partes iguales.

Recompensas. Supongamos que C1 elige la posición x y C2 elige y. Entonces el total de votos $V_1(x, y)$ para C1 es

$$V_1(x,y) = \begin{cases} \int_0^{(x+y)/2} f(s)ds & \text{si } x < y, \\ \int_{(x+y)/2}^1 f(s)ds & \text{si } y < x, \\ 1/2 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

El total de votos $V_2(x, y)$ para C2 se calcula análogamente.

Teorema 3.2 (Teorema del votante mediano)**.** *Suponga que* $f(x) > 0$ *para cada* $0 < x < 1$. *Entonces existe un único equilibrio de Nash para el juego del ejemplo 1. La estrategia de equilibrio para cada candidato es anunciar la posición* M *del votante mediano, es decir,* M *es el punto único que satisface*

$$\int_0^M f(s)ds = 1/2.$$

Demostración. La existencia y unicidad del punto M se derivan de resultados estándar de cálculo diferencial e integral. Para verificar que (M, M) es el único equilibrio de Nash, es suficiente considerar los siguientes tres casos (i) $x < y$, (ii) $x = y$, $x \neq M$, y (iii) $x = y = M$. En efecto, para los casos (i) y (ii), cualquiera de los candidatos puede obtener más votos al cambiar apropiadamente su posición. En contraste, para el caso (iii), si uno de los candidatos cambiara su posición, entonces captaría menos votos. □

Desde un punto de vista meramente estratégico, el teorema anterior sugiere que ambos candidatos deberían alejarse de posiciones de extrema derecha o extrema izquierda. Idealmente, cada candidato debería adoptar la postura que divide en partes iguales a la masa de votantes.

Hay una pregunta obvia que podemos hacernos: ¿existe evidencia empírica que apoye la conclusión del teorema? En Estados Unidos, los candidatos generalmente se *mueven al centro* en los últimos días de sus campañas; por ejemplo, los candidatos demócratas dejan de enfatizar los derechos de los inmigrantes o los republicanos se acercan a la comunidad LGBT. Este tipo de posicionamientos se alinean con las estrategias de equilibrio indicado en el teorema del votante mediano. Otra pregunta está relacionada con la distribución de votantes. ¿Cómo podemos obtener datos de los votantes para discernir sus preferencias políticas? Abordamos esta pregunta en la sección 4.

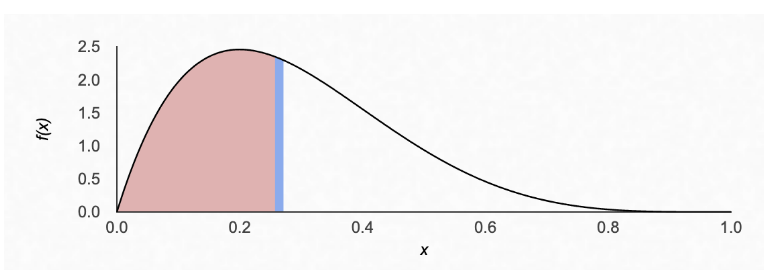


Figura 1. Densidad de una distribución Beta(2,4). La mediana $M \approx 0.31$ mientras que la media se aproxima a 0.33 (Imagen tomada de https://homepage.divms.uiowa.edu/~mbognar/).

Ejemplo 3.3 (Un juego de votación con tres candidatos)**.** Consideremos una distribución de votantes como en el ejemplo 1. Supongamos que tenemos ahora tres candidatos, C1, C2, y C3, que anuncian su posición en $[0,1]$. Nuevamente cada votante elige al candidato cuya posición política es más cercano a su preferencia. Sean x, y, y z las posiciones de los candidatos C1, C2, y C3, respectivamente. Considere las recompensas para los casos siguientes:

(I) $x < y < z$,

$$V_1(x,y,z) = \int_0^{(x+y)/2} f(s)ds, \tag{1a}$$

$$V_2(x,y,z) = \int_{(x+y)/2}^{(y+z)/2} f(s)ds, \tag{1b}$$

$$V_3(x,y,z) = \int_{(y+z)/2}^{1} f(s)ds, \tag{1c}$$

(II) $x = y < z$,

$$V_1(x,y,z) = V_2(x,y,z) = \frac{1}{2}\int_0^{(y+z)/2} f(s)ds,$$

$$V_3(x,y,z) = \int_{(y+z)/2}^{1} f(s)ds,$$

(III) $x = y = z$,

$$V_1(x,y,z) = V_2(x,y,z) = V_3(x,y,z) = \frac{1}{3}.$$

Las recompensas en los casos restantes se calculan de manera análoga.

Este juego no tiene equilibrios de Nash. Para cada terna (x,y,z), los candidatos tienen incentivos para cambiar sus posiciones. En efecto, considere los casos anteriores:

(I) Si $x < y < z$, entonces C1 puede obtener más votos posicionándose en x' tal que $x < x' < y$.

(II) Cuando $x = y < z$, C3 se puede acercar a z' de tal forma que $y < z' < z$ para incrementar V_3.

(III) Finalmente, si $x = y = z$, entonces cualquier candidato podría aumentar su número de votos haciendo pequeños movimientos hacia la izquierda o la derecha. Por ejemplo, supongamos que todos los candidatos eligen la mediana $x = y = z = M$, entonces cualquiera de ellos, digamos $C2$, se puede mover a la izquierda posicionándose en y' de tal manera que

$$\frac{1}{3} < V_2(x,y',z) < \frac{1}{2}.$$

Teorema 3.4 (Tres candidatos con restricciones)**.** Sea $0 \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < b_3 \leq 1$. Supongamos que el conjunto de acciones para C_j es $[a_j, b_j]$, $j = 1, 2, 3$, y la distribución de preferencias tiene una densidad f. Entonces existe al menos un equilibrio de Nash.

Demostración. Como los conjuntos de acciones son disjuntos, las recompensas están dadas por (1a)–(1c). Notemos que V_1 es creciente en x. Entonces la *mejor respuesta* de C_1 es b_1, es decir, b_1 maximiza $V_1(\cdot, y, z)$ para cualquier par (y, z). Como V_3 es decreciente en z, entonces la mejor respuesta de C_3 es a_3.

Por otro lado, $V_2(b_1, y, a_3)$ es continua en y y $[a_2, b_2]$ es compacto. Luego, existe al menos un punto $\hat{y}$ que maximiza $V_2(b_1, \cdot, a_3)$. En consecuencia $(b_1, \hat{y}, a_3)$ es un equilibrio de Nash. $\square$

Observación 3.5. Una vez que hemos obtenido las estrategias de equilibrio, hace falta determinar al ganador (o ganadores en caso de empate) de la elección. Para el juego del teorema 3.4, cualquier candidato podría ganar. El resultado depende de la longitud de los intervalos así como de la densidad. Un estudio de caso relacionado con las elecciones presidenciales de 2006 en México, puede consultarse en [6].

4. Metodología para usar el teorema del votante mediano

A continuación, proporcionamos una posible metodología para el uso práctico de los resultados de este artículo.

Para ello, es fundamental estimar la función de densidad f que aparece en los enunciados de los teoremas 3.2 y 3.4. Una forma sencilla sería realizar una estimación en una muestra de votantes de sus posiciones políticas y aplicar un método como el KDE basado en núcleos [15], [16]. Bajo esta metodología, o cualquier otra, la parte más complicada es estimar las posiciones políticas de los miembros de la muestra. Podríamos resolver esto pidiendo a los votantes seleccionados que elijan un número dentro del intervalo [0,1] que mejor represente su posición política, siendo 0 la posición más radical de izquierda y 1 la más radical de derecha.

Para un votante, puede ser claro que su posición es un número menor que 0.5 porque tiene una tendencia de izquierda o mayor que 0.5 porque se inclina más a la derecha. Sin embargo, para cualquier votante, incluso aquellos con una buena educación política, sería muy difícil determinar si su posición es 0.2314 o 0.2315. En otras palabras, si queremos tener un número cada vez más preciso, para un votante es prácticamente imposible decirlo directamente.

Lo anterior es similar al juego en el que una persona elige aleatoriamente un número entre 1 y 100, lo mantiene en secreto y un adversario lo «adivina» haciendo preguntas sobre el número secreto para averiguar si es mayor, menor o igual a otro número. Sin mucho esfuerzo, se puede demostrar que el problema de adivinar el número se puede resolver de manera óptima con un máximo de $\log_2(n)$ preguntas, donde n es el valor máximo posible del número a adivinar, utilizando el algoritmo de búsqueda binaria para localizar un dato dentro de un arreglo estático en memoria. El pseudocódigo para este método aparece en el siguiente algoritmo.

Algoritmo 1 Búsqueda binaria para adivinar un número aleatorio

function GUESSRANDOMNUMBER(n)
    $low \leftarrow 1$
    $high \leftarrow n$
    while $low \leq high$ **do**
        $mid \leftarrow \lfloor \frac{low+high}{2} \rfloor$
        $guess \leftarrow$ MAKEGUESS(mid) ▷ Suponiendo que existe una función MakeGuess() para adivinar números
        if $guess = 0$ **then** ▷ El número propuesto es el correcto
            return mid
        else if $guess < 0$ **then**
            $high \leftarrow mid - 1$ ▷ Se ajusta el rango de búsqueda
        else
            $low \leftarrow mid + 1$ ▷ Se ajusta el rango de búsqueda
        end if
    end while
    return no hallado ▷ Esto no debería suceder para un rango válido
end function

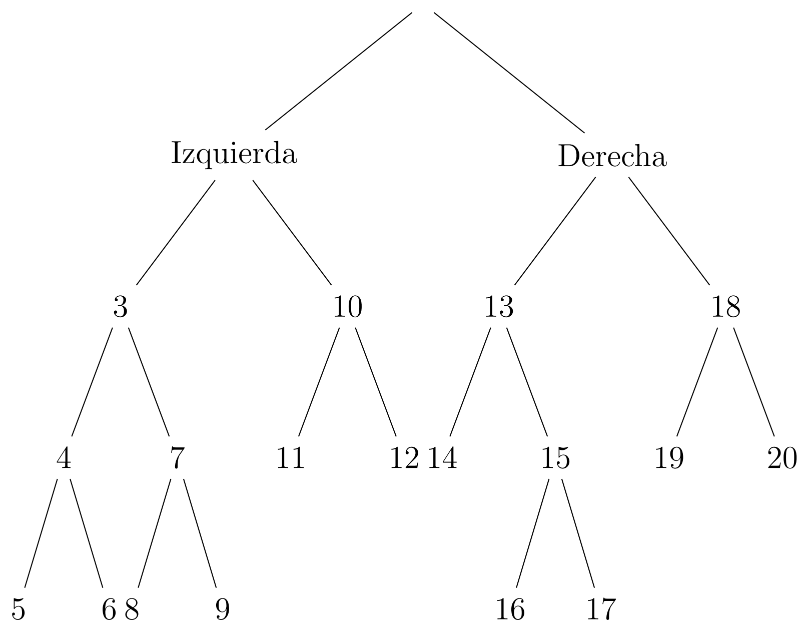
Para lograr la máxima eficiencia posible, es fundamental que en cada iteración el intervalo de búsqueda reduzca su longitud a la mitad de manera precisa.

En cierto modo, el problema de un votante que define su posición política es encontrar un número secreto, incluso para el propio votante. Podemos revelarlo haciendo preguntas equivalentes a la búsqueda binaria; pero en lugar de hacer preguntas del tipo «¿el número secreto es mayor o igual que 50?», estas serían «¿su posición política se inclina más a la derecha o a la izquierda?» y con esto sabremos que es mayor o menor que 0.5, asumiendo que 0.5 corresponde a la posición de un votante neutral. Si es menor que 0.5, es decir, el votante simpatiza con la izquierda, sería necesario decidir si está o no en la extrema izquierda o en la izquierda moderada. Para ello, tendríamos que hacerle al votante una pregunta como «¿su tendencia se inclina más hacia la extrema izquierda?». Si la persona es de izquierda extrema, sabríamos que su posición es menor a 0.25 y de lo contrario, que es mayor o igual a 0.25 pero menor a 0.5. Obviamente, un especialista en ciencias políticas podría decir que el valor 0.25 no es del todo correcto y que se podría ajustar mejor a 0.20. Si ese fuera el caso, entonces sería conveniente averiguar qué pregunta nos lleva a 0.25 tratando de emular lo que sucede con la búsqueda binaria donde el intervalo de búsqueda se divide exactamente a la mitad en cada paso. Si no es posible, tendríamos que manejar desbalances en nuestro intervalo y tenerlos en cuenta al estimar la distribución final.

Análogamente, para refinar la posición de un votante de derecha.

Con el modelo descrito hasta ahora, podríamos asignar cuatro posiciones políticas con cierto grado de precisión. Podríamos acotar la posición de cada persona dentro de los intervalos [0, 0.25[, [0.25,0.5[, [0.5,0.75[, [0.75,1.0]. Ahora, lo que tendríamos que hacer es generar las preguntas adecuadas para discriminar entre las mitades de cada uno de estos intervalos, y así podríamos continuar recursivamente hasta llegar a intervalos tan pequeños que nos permitan determinar la posición política de cualquier persona con una precisión de $(\frac{1}{2})^n$, donde n es el número de rondas de preguntas que cada votante debe responder. La figura 2 muestra, en un diagrama de árbol, ejemplos de preguntas que se les tendrían que hacer a los votantes para refinar su posición política. De ninguna manera recomendamos utilizar el diagrama propuesto para fines prácticos, este tiene que ser diseñado por expertos en ciencias políticas.

El éxito de esta metodología radica fundamentalmente en la capacidad para determinar las preguntas correctas dentro de la estructura jerárquica que se muestra en la figura 2. El desafío fundamental es lograr que cada pregunta divida el intervalo anterior en dos partes iguales en la estructura jerárquica que se está construyendo. Esto requiere un conocimiento técnico básico del funcionamiento de la estrategia «divide y vencerás» que se aplica en la búsqueda binaria con la pericia para ajustar las preguntas que dividan exactamente el intervalo anterior (en la estructura jerárquica) en dos partes iguales. Para resolver esta última parte, se necesita un especialista en ciencias políticas. Uno de los objetivos de la redacción de este artículo es precisamente servir como un llamado a los especialistas en este campo para que contribuyan con la estructura jerárquica de preguntas, así como la determinación de cuál debería ser el nivel ideal de profundidad que permita generar una apreciación de las posiciones políticas de los votantes, con capacidad



3 Comunista o demócrata social
4 Anti-capitalista
5 Anti-sistema
6 Reformista
7 Capitalista de bienestar
8 Eco-socialista
9 Mercados regulados
10 Libertario o progresivo
11 Libertades civiles
12 Política de identidad
13 Neo-liberal o socialmente conservador
14 Libre mercado
15 Valores religiosos
16 Teocracia
17 Tradicionalista
18 Populista o libertario
19 Nacionalista
20 Monarquista

Figura 2. Árbol binario con preguntas muestra para determinar la posición política de un votante .

razonable para poder discernir la estructura de las preguntas que de manera efectiva genera una partición adecuada del intervalo [0,1].

Por otro lado, sería interesante que instituciones como el INE (Instituto Nacional Electoral de México) coordinaran esfuerzos para que todos los partidos políticos conozcan modelos (véase [7]) como los que aquí se han discutido, de tal manera que los partidos puedan definir sus posiciones políticas de una manera que esté acorde con lo que la población realmente exige para generar un juego político mucho más equilibrado.

5. Un teorema de existencia

En esta sección demostramos un teorema de existencia de equilibrios en estrategias puras. Para este propósito necesitamos los dos lemas siguientes.

Lema 5.1. *Sean X y A subconjuntos compactos de espacios euclidianos y $u : A \times X \to \mathbb{R}$ una función continua. Si para cada $a \in A$ existe un único $\hat{x}(a) \in X$ tal que*

$$u(a, \hat{x}(a)) \geq u(a, x) \quad \forall x \in X, \tag{2}$$

entonces $\hat{x} : A \to X$ es continua.

Demostración. Sea $(a_n) \subset A$ una sucesión que converge a a. Consideremos

$$\overline{x} := \limsup_{n\to\infty} \hat{x}(a_n) \in X$$

y

$$\underline{x} := \liminf_{n\to\infty} \hat{x}(a_n) \in X.$$

Sea $x \in X$ fijo. Entonces existe una subsucesión $\hat{x}(a_{n_k})$ que converge a $\overline{x}$ y satisface

$$u(a_{n_k}, \hat{x}(a_{n_k})) \geq u(a_{n_k}, x).$$

Haciendo $k \to \infty$, obtenemos $u(a, \overline{x}) \geq u(a, x)$ ya que u es continua. Análogamente se puede verificar también $u(a, \underline{x}) \geq u(a, x)$. Como las desigualdades anteriores son válidas para cada $x \in X$, obtenemos

$$u(a, \underline{x}) = u(a, \overline{x}) \geq u(a, x) \quad \forall x \in X.$$

Puesto que (2) se cumple para un único punto $\hat{x}(a)$, concluimos que

$$\hat{x}(a) = \lim_{n\to\infty} \hat{x}(a_n).$$

Esto demuestra que $\hat{x}$ es continua. □

Lema 5.2 (Geanakoplos [3])**.** *Sean X un subconjunto convexo de algún espacio euclidiano, $x_0 \in X$ y $u : X \to \mathbb{R}$ una función cóncava. Entonces la función*

$$u_0(x) := u(x) - |x - x_0|^2, \quad x \in X,$$

satisface lo siguiente:

(a) *Existe a lo más un punto $\hat{x} \in X$ tal que*

$$u_0(\hat{x}) \geq u_0(x) \quad \forall x \in X. \tag{3}$$

(b) *Si $x_0 = \hat{x}$ satisface* (3)*, entonces*

$$u(x_0) \geq u(x) \quad \forall x \in X.$$

Demostración. La afirmación (a) se sigue porque u_0 es la suma de u, que es cóncava, y la función $-|x-x_0|^2$ que es estrictamente cóncava. Por lo tanto, u_0 es estrictamente cóncava.

Probemos ahora la segunda parte del lema. Sean $0<\varepsilon<1$ y $x\in X$. Por (3) y la concavidad de u, tenemos

$$\begin{aligned} u(x_0) &\geq u((1-\varepsilon)x_0+\varepsilon x)-|(1-\varepsilon)x_0+\varepsilon x-x_0|^2 \\ &\geq (1-\varepsilon)u(x_0)+\varepsilon u(x)-\varepsilon^2|x-x_0|^2 \end{aligned}$$

de donde

$$\varepsilon|x-x_0|^2\geq u(x)-u(x_0).$$

Haciendo $\varepsilon\to 0$, tenemos $u(x_0)\geq u(x)$. Por ser x arbitrario, se cumple la afirmación (b). □

Teorema 5.3. *Sea (A,r) un juego con n jugadores en forma normal. Para cada $j=1,\ldots,n$, suponga lo siguiente:*

(a) A_j es un subconjunto convexo y compacto de algún espacio euclidiano,
(b) $r_j:A\to\mathbb{R}$ es continua,
(c) $r_j(a_{-j},\cdot):A_j\to\mathbb{R}$ es cóncava para cada combinación de acciones a_{-j}.

Entonces (A,r) tiene al menos un equilibrio de Nash.

Demostración. Para cada $j=1,\ldots,n$, sea $u_j:A\times A_j\to\mathbb{R}$ dada por

$$u_j(a,x):=r_j(a_{-j},x)-|x-a_j|^2. \tag{4}$$

Notemos que u_j es continua en $A\times A_j$ y $u_j(a,\cdot)$ es estrictamente cóncava en A_j, luego existe un único punto $\alpha_j(a)$ en A_j tal que

$$u_j(a,\alpha_j(a))\geq u_j(a,x)\quad\forall x\in A_j.$$

Por el lema 5.1, $\alpha_j:A\to A_j$ es continua, $j=1,\ldots,n$. Entonces la función

$$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n):A\to A$$

es continua. Como A es convexo y compacto, por el teorema de punto fijo de Brouwer, existe $\hat{a}\in A$ tal que $\alpha(\hat{a})=\hat{a}$. Es decir, para cada $j=1,\ldots,n$,

$$\alpha_j(\hat{a})=\hat{a}_j$$

por lo que

$$u_j(\hat{a},\alpha_j(\hat{a}))\geq u_j(\hat{a},x)\quad\forall x\in A_j.$$

Por el lema 5.2,

$$r_j(\hat{a}_{-j},\hat{a}_j)\geq r_j(\hat{a}_{-j},x)\quad\forall x\in A_j,$$

para cada $j=1,\ldots,n$, lo cual demuestra el teorema. □

La forma clásica (véase [1] o [14]) de probar el teorema 5.3 es a través del teorema de punto fijo de Kakutani. El teorema de Kakutani establece, bajo ciertas hipótesis, la existencia de puntos fijos para correspondencias (también llamadas funciones multivaluadas). Las correspondencias aparecen en la demostración cuando se considera el conjunto de puntos que maximizan las funciones $r_j(a_{-j}, \cdot)$, $j = 1, \ldots, n$. A este conjunto de puntos se le conoce como *correspondencia de mejores respuestas*.

Al considerar la función u_j, definida en (4), se tiene un único punto que maximiza $u_j(a, \cdot)$. La unicidad de $\alpha_j(a)$ permite el uso del teorema de Brouwer en lugar del de Kakutani. La demostración que presentamos aquí fue tomada de Geanakoplos [3].

6. Conclusiones

El equilibrio de Nash es uno de los conceptos de solución más usados en la teoría de juegos no-cooperativos. La existencia de este equilibrio puede verificarse de manera directa como en el teorema del votante mediano. En otros casos, como en el teorema de Nash [13] o el teorema 5.3, se tienen resultados de existencia bajo condiciones generales. En estos casos, los equilibrios pueden aproximarse de manera numérica. Esta nota, así como la referencia [12], pretende ser una invitación al estudio de la teoría de juegos. En este trabajo nos hemos concentrado principalmente en el caso de estrategias puras mientras que [12] considera estrategias mixtas.

La metodología propuesta en la sección 4 presenta limitaciones potenciales que podrían generar inquietudes. En primer lugar, reducir ideologías complejas a un único número ignora sus matices inherentes y su multidimensionalidad. Esta simplificación excesiva puede conducir a representaciones inexactas y malentendidos del panorama político diverso. En segundo lugar, los nombres asignados a las posiciones políticas en la figura 2 pueden contener sesgos y subjetividad inherentes. Estas etiquetas podrían potencialmente influir en los encuestados o crear confusión sobre su verdadera postura política, complicando aún más el análisis. Finalmente, asignar valores numéricos (entre 0 y 1) a estas posiciones simplifica un espectro complejo de opiniones políticas. Esta asociación numérica podría conducir a malas interpretaciones y comparaciones inexactas, sin poder capturar la riqueza y sutilezas de las creencias individuales.

Bibliografía

[1] C. D. Aliprantis y S. K. Chakrabarti, *Games and decision making*, Oxford University Press, New York, 2000.

[2] S. J. Brams, *Game theory and politics*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004.

[3] J. Geanakoplos, «Nash and Walras equilibrium via Brouwer», *Econom. Theory*, vol. 21, núm. 2-3, 2003, 585–603, https://doi.org/10.1007/s001990000076.

[4] R. S. Gibbons, *Game theory for applied economists*, Princeton University Press, 1992.

[5] I. L. Glicksberg, «A further generalization of the Kakutani fixed theorem, with application to Nash equilibrium points», *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 3, 1952, 170–174, https://doi.org/10.2307/2032478.

[6] K. F. Greene, «El votante mediano y la regla de mayoría relativa para elegir presidente en México», *Política y gobierno*, vol. 14, núm. 1, 2007, 203–213.

[7] J. K. Hodge y R. E. Klima, *The mathematics of voting and elections: a hands-on approach*, 2.ª ed., American Mathematical Society, Providence, RI, 2018.

[8] J. Hofbauer y K. Sigmund, *Evolutionary games and population dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[9] H. Hotelling, «Stability in competition», *The Economic Journal*, vol. 39, núm. 153, 1929, 41–57, https://doi.org/10.2307/2224214.

[10] M. Maschler, E. Solan y S. Zamir, *Game theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[11] J.-F. Mertens, S. Sorin y S. Zamir, *Repeated games*, Econometric Society Monographs, vol. 55, Cambridge University Press, New York, 2015.

[12] R. Montes-de Oca, «Muchos juegan... ¡yo también quiero jugar!», *MIXBA'AL, Revista Metropolitana de Matemáticas*, vol. 14, núm. 1, 2023, 27–36, http://www.doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v14n1/rmom.

[13] J. Nash, «Non-cooperative games», *Ann. of Math. (2)*, vol. 54, 1951, 286–295, https://doi.org/10.2307/1969529.

[14] M. J. Osborne y A. Rubinstein, *A course in game theory*, MIT press, 1994.

[15] M. Rosenblatt, «Remarks on some nonparametric estimates of a density function», *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 27, núm. 3, 1956, 832–837.

[16] B. W. Silverman, *Density estimation for statistics and data analysis*, Chapman and Hall, 1986.

[17] J. Yong, *Differential games*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2015, A concise introduction.