Miscelánea Matemática **77** (2023) 35-58 SMM

DOI: https://doi.org/10.47234/mm.7703

El primer infinito no numerable y su topología

Rodrigo Hernández Gutiérrez
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa
rod@xanum.uam.mx

1. Introducción

Uno de los primeros resultados de teoría de conjuntos que uno aprende en su vida es el famoso *teorema de Cantor* que dice que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es no numerable. Recordemos que un conjunto infinito no es numerable si no se puede poner en correspondencia biyectiva con el conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales. El teorema de Cantor tiene una generalización que nos dice que para ningún conjunto X existe una función biyectiva entre X y su conjunto potencia $\wp(X)$. Esto en particular nos dice que la jerarquía de infinitos no tiene un máximo, ya que siempre podemos encontrar un conjunto mayor en cardinalidad. Sin embargo, algo que no se conoce tanto es que existe otro conjunto no numerable fundamental además de $\mathbb{R}$: el conjunto ω_1 de los ordinales numerables. Es mi intención en este escrito presentar a ω_1 y algunas de sus propiedades básicas, tratando de hacer la presentación accesible a personas que conozcan el concepto de conjunto pero que no necesariamente estén familiarizadas con los axiomas de ZFC (a esto a veces se le llama «teoría de conjuntos simplista»[1] o «teoría de conjuntos intuitiva»). A partir de la sección 4 vamos a suponer cierta madurez matemática y conocimientos elementales de topología, ya que en la topología podremos encontrar motivación para varias de las propiedades importantes de ω_1.

En primera, platiquemos un poco de cuál podría ser una posible motivación para considerar a ω_1. Por una parte, los números reales $\mathbb{R}$ se pueden pensar como un proceso de *completación* del conjunto $\mathbb{Q}$ de

Palabras clave: ordinal, orden lineal, topología del orden, espacio paracompacto, conjunto estacionario, lema de Fodor.

[1] Traducción del término en inglés «naive set theory»

números racionales. En efecto, cada número irracional (real y no racional) x parte a $\mathbb{Q}$ en dos pedazos: los racionales menores que x y los racionales mayores que x. Así que cada número irracional representa un «agujero» en $\mathbb{Q}$ y sabemos que al «llenar» todos estos agujeros obtenemos el conjunto «continuo» $\mathbb{R}$. Entonces $\mathbb{R}$ puede pensarse como un tipo de extensión natural del conjunto numerable $\mathbb{Q}$. De manera similar, podemos pensar en una estructura en el conjunto de números naturales y «extenderla».

Ahora bien, la estructura que estamos pensando en $\mathbb{N}$ también es la del orden. Como nos dice el famoso *principio de inducción matemática*, si empezamos contando[2] en el 0 y en cada paso n tomamos el siguiente número natural $n+1$, podemos obtener todos los elementos de $\mathbb{N}$:

$$0 < 1 < 2 < \ldots < n < n+1 < \ldots.$$

Sin embargo, algo que podemos preguntarnos es: «¿porqué terminar ahí?» Aquí es donde los matemáticos usamos una de nuestras *habilidades especiales*, el generalizar. Lo que hacemos es considerar un nuevo tipo de número[3], el *ordinal* ω, y definimos que este sea el primer número que está por arriba de todos los naturales:

$$0 < 1 < 2 < \ldots < n < n+1 < \ldots < \omega.$$

Una vez más, no hay razón para terminar aquí, así que podemos seguir contando:

$$0 < 1 < 2 < \ldots < \omega < \omega+1 < \omega+2 < \ldots < \omega+n < \omega+(n+1) < \ldots$$

Y de hecho, después de esta cantidad infinita de *ordinales infinitos*, podemos agregar un ordinal mayor que todos ellos, $\omega \cdot 2$, y seguir con otra cantidad infinita de ordinales:

$$0 < 1 < 2 < \ldots < \omega < \omega+1 < \ldots < \omega \cdot 2 < \omega \cdot 2 + 1 < \omega \cdot 2 + 2 < \ldots$$

Y claro, ya que estamos en esto, podemos seguir de la siguiente forma:

$$\begin{gathered} 0 < 1 < \ldots < \omega < \omega+1 < \ldots < \omega \cdot 2 < \omega \cdot 2 + 1 < \ldots < \omega \cdot 3 < \\ \omega \cdot 3 + 1 < \ldots < \omega \cdot 4 < \ldots < \omega \cdot n < \ldots < \omega \cdot (n+1) < \ldots < \omega \cdot \omega. \end{gathered}$$

Una observación importante es que todos los números ordinales que hemos descrito hasta este momento (incluyendo, obviamente, a los que no escribimos por no tener una cantidad infinita de espacio en nuestro papel) forman una colección numerable[4]. Así que, a pesar de que hemos contado «más allá del infinito», en realidad aún llevamos contado a un conjunto numerable.

[2] A veces uno no se puede salvar de la controversia de si 0 es natural o no. Como definitivamente 0 *sí* es un ordinal, vamos a empezar contando aquí y supondremos $0 \in \mathbb{N}$.

[3] Este proceso de construir nuevos tipos de números seguramente ya lo conoce, el ejemplo más famoso es el de los números complejos a partir de los reales.

[4] Sugerencia para probar esto: a cada ordinal de la forma $\omega \cdot m + n$ asóciele la pareja $\langle m, n \rangle$.

¿Cuándo nos detenemos? De hecho, no es necesario detenerse, ya que con este procedimiento podemos construir la *clase de ordinales* que, por la llamada *paradoja de Burali-Forti*, es tan grande que no es un conjunto. Sin embargo, para no distraernos de nuestro objetivo, vamos a decir: detengámonos *la primera vez* que hayamos construido una cantidad no numerable de ordinales. Este ordinal en el que nos vamos a detener es ω_1.

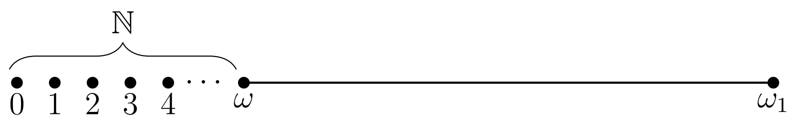

Figura 1. Cómo imaginamos a ω_1.

Algo que se puede notar de este argumento informal es que los ordinales están ordenados de tal manera que siempre hay una «primera vez» para cualquier propiedad sobre ordinales que pensemos, siempre y cuando se cumpla para al menos algún ordinal. Esto se formaliza diciendo que todo subconjunto no vacío de ordinales tiene un primer elemento, y se dice que la clase de ordinales está *bien ordenada*. Para los números naturales esto es bien conocido, y tiene el nombre de «principio del buen orden».

En este momento es buena idea comentar que según la construcción de John von Neumann, los ordinales se definen de tal manera que cada uno es el conjunto de todos los anteriores. Es decir, si α es un ordinal, entonces

$$\alpha = \{\beta \text{ ordinal}\colon \beta < \alpha\}.$$

Esto de hecho nos da una definición conjuntista de los números naturales como el conjunto de *ordinales finitos*: 0 es igual al conjunto vacío $\emptyset$, y si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n+1 = n \cup \{n\}$. Los primeros números naturales serían entonces:

$$\begin{array}{lllllll}
0 & = & \emptyset, & & & & \\
1 & = & 0 \cup \{0\} & = & \emptyset \cup \{0\} & = & \{0\}, \\
2 & = & 1 \cup \{1\} & = & \{0\} \cup \{1\} & = & \{0,1\}, \\
3 & = & 2 \cup \{2\} & = & \{0,1\} \cup \{2\} & = & \{0,1,2\}, \\
4 & = & 3 \cup \{3\} & = & \{0,1,2\} \cup \{3\} & = & \{0,1,2,3\},
\end{array}$$

y así sucesivamente. Notemos que esto en particular nos dice que $\mathbb{N} = \omega$; de aquí que en teoría de conjuntos usemos a ω como el símbolo para denotar al conjunto de números naturales[5].

[5] Este enunciado le causó un disgusto de uno de mis colegas que usa el símbolo $\mathbb{N}$ para $\omega \setminus \{0\}$. Al parecer incluso algunos conjuntistas no quieren que el 0 sea natural.

Ahora bien, con la construcción de von Neumann concluimos que ω_1 es igual al conjunto de todos los ordinales que son menores a ω_1. Entonces ω_1 es, por una parte, el primer ordinal no numerable, y por otra, el conjunto de todos los ordinales numerables (incluyendo los finitos).

Si usted no conocía esta construcción, quizá esta idea de seguir contando más allá del infinito le parece complicada. Sin embargo, se puede decir que de alguna forma ω_1 tiene una estructura más sencilla que $\mathbb{R}$ por una razón técnica: la cardinalidad.

Recordemos que uno de los problemas más famosos que dejó Cantor fue determinar si su *hipótesis del continuo* era verdadera.

Definición 1.1. La *hipótesis del continuo* (abreviada CH por sus siglas en inglés) es el enunciado siguiente: «si $X \subset \mathbb{R}$ es no numerable, entonces X tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$».

El problema de la CH fue incluido por David Hilbert en su lista de problemas abiertos de los cuales habló en su conferencia inaugural en el Congreso Internacional de las Matemáticas del año 1900. Tan importante le pareció a Hilbert el problema de la CH que lo incluyó como Problema 1. Para no hacer el cuento largo, sucede que para mediados de la década de 1960 ya se sabía que CH es *independiente* de los axiomas de ZFC. Es decir, la lista completa de axiomas de la teoría de conjuntos ZFC no es suficiente para determinar si CH es verdadera o falsa. De hecho, ahora podemos considerar extensiones de ZFC donde CH es verdadera y otras extensiones donde es falsa y, lo más importante, probar teoremas en ambas teorías.

Pues bien, el punto al que queremos llegar es que el enunciado análogo a CH para ω_1 *sí* se puede decidir en ZFC.

Teorema 1.2. *Si $A \subset \omega_1$ es no numerable, entonces A tiene la misma cardinalidad que ω_1.*

Después de esta explicación intuitiva, fragmento de la historia de las matemáticas, e intento de motivar el interés en este objeto matemático, es momento de empezar a ser formal. A partir de la siguiente sección daremos una forma alternativa de definir a ω_1 que no pasa por la mencionada construcción de von Neumann. Le sugiero que siga leyendo, y que si estos temas le interesan más, consulte alguna de las referencias que se sugieren.

2. Conceptos de conjuntos ordenados

En esta sección daremos las definiciones y conceptos sobre conjuntos ordenados que vamos a necesitar. Como referencia para esta parte, le recomiendo [8, §4.3]. Considere usted que esta sección es un requerimiento técnico que necesitamos cumplir antes de definir a ω_1. Varios de estos conceptos los aprende uno en cursos básicos de matemáticas universitarias. Sin embargo, para propósitos de este escrito es suficiente que usted conozca dos conjuntos ordenados: los reales $\mathbb{R}$ y los naturales $\mathbb{N}$, que nos servirán de ejemplos canónicos. Siéntase libre de saltar esta sección y regresar a ella cuando le falte entender algún término que mencionemos más adelante.

Consideremos un conjunto X y una relación binaria $<$ entre elementos de X. Como es común, $x \not< y$ denota la negación de $x < y$. Diremos que $<$ es un *orden estricto* en X si

(a) $<$ es antireflexiva: $x \not< x$ para todo $x \in X$, y
(b) $<$ es transitiva: si $x, y, z \in X$ son tales que $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$.

Si se cumplen estas condiciones también diremos que $\langle X, < \rangle$ es un *conjunto ordenado de manera estricta*. Usaremos la notación $x \leq y$, que significa que $x = y$ o $x < y$. Notemos que si $\langle X, < \rangle$ es un conjunto ordenado de manera estricta y $Y \subset X$ entonces en Y se tiene un *orden inducido*, que también denotaremos por $<$ para simplificar la notación.

Consideremos un conjunto ordenado de manera estricta $\langle X, < \rangle$. Si $A \subset X$ y $x \in X$, entonces diremos que:

- x es *cota superior* de A si $a \leq x$ para todo $a \in A$, y
- x es el *supremo* de A si es una cota superior de A y para cualquier $y \in X$ cota superior de A se tiene que $x \leq y$; denotaremos esto como $x = \sup A$.

Un subconjunto de un conjunto ordenado de manera estricta que tiene una cota superior lo llamaremos *acotado*[6].

Si $<$ es un orden estricto en X, diremos que es un orden *lineal* si cualesquiera dos elementos son comparables, es decir: si $x, y \in X$ entonces $x = y$ o $x < y$ o $y < x$, y solo una de estas tres opciones[7]; diremos también que $\langle X, < \rangle$ es un conjunto *linealmente ordenado*. Ahora supongamos que $\langle X, < \rangle$ es linealmente ordenado. Vamos a requerir varios tipos de intervalos: dados $a, b \in X$ consideraremos los intervalos

$$
\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in X \colon a < x < b\}, \\
(a, b] &= \{x \in X \colon a < x \leq b\}, \\
[a, b) &= \{x \in X \colon a \leq x < b\} \text{ y} \\
[a, b] &= \{x \in X \colon a \leq x \leq b\}.
\end{aligned}
$$

[6] O acotado superiormente. Sin embargo, no trataremos cotas inferiores en este escrito así que nos ahorramos la palabra «superior».

[7] A esto también se le llama *tricotomía*.

Diremos que $J \subset X$ es un *segmento inicial* si $a \in J$, $b \in X$ y $b < a$ implican que $b \in J$; de forma dual $J \subset X$ es un *segmento final* si $a \in J$, $b \in X$ y $a < b$ implican que $b \in J$. En el caso de $\mathbb{R}$, ocuparemos los siguientes intervalos que a su vez son segmentos iniciales o finales, donde $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rclrcl} (a,\infty) & = & \{x \in \mathbb{R}\colon a < x\}, & (-\infty,a) & = & \{x \in \mathbb{R}\colon x < a\} \text{ y} \\ [a,\infty) & = & \{x \in \mathbb{R}\colon a \leq x\}, & (-\infty,a] & = & \{x \in \mathbb{R}\colon x \leq a\}. \end{array}$$

Sean $\langle X, <_X\rangle$ y $\langle Y, <_Y\rangle$ conjuntos ordenados de manera estricta y sea $f\colon X \to Y$ una función. Diremos que f es un *isomorfismo* si es biyectiva y se cumple que dados $a, b \in X$ se tiene que $a <_X b$ si y solo si $f(a) <_Y f(b)$. En tal caso, diremos que $\langle X, <_X\rangle$ y $\langle Y, <_Y\rangle$ son *isomorfos*[8].

3. Definición de ω_1 y sus propiedades básicas

Como comentamos en la sección 1, hay una construcción de ordinales dada por John von Neumann, que es la que se usa en teoría de conjuntos para definir a los ordinales. Sin embargo, queremos saltarnos esto ya que la presentación se haría muy larga. En caso de que quiera ver cómo se desarrolla esta sección de manera extensiva, le recomendamos la referencia [8].

Volvemos a ver una analogía con $\mathbb{R}$. Formalmente, $\mathbb{R}$ se puede construir a partir de $\mathbb{Q}$ usando las famosas *cortaduras de Dedekind*, pero uno usualmente no piensa en las cortaduras de manera explícita cada vez que se trabaja con los reales sino que se piensa en sus axiomas de campo ordenado. Entonces, con ω_1 podemos hacer algo similar: vamos a definir las propiedades que debe cumplir ω_1, que lo definen de manera *única salvo isomorfismo* y son suficientes en la práctica para poder trabajar con este objeto.

Vamos a requerir el concepto de *conjunto bien ordenado*. La idea intuitiva de un conjunto bien ordenado es un conjunto que tiene un orden que se puede usar para hacer inducción de manera similar a la que podemos hacer en $\mathbb{N}$.

Definición 3.1. Diremos que $<$ es un *buen orden* en un conjunto X si $<$ es un orden estricto y además, si $A \subset X$ es tal que $A \neq \emptyset$ entonces existe $a \in A$ con la propiedad de que si $x \in A$ entonces $a \leq x$; tal a es el elemento *mínimo* de A. En este caso vamos a decir que $\langle X, <\rangle$ es un *conjunto bien ordenado*.

[8]En esta nota solo usaremos isomorfismos de orden, así que la palabra «isomorfo» siempre se referirá a estos.

Una propiedad importante de los conjuntos bien ordenados es que son linealmente ordenados. Para ver esto, supongamos que $\langle X, <\rangle$ es un conjunto bien ordenado y sean $x, y \in X$. El buen orden implica que existe $m = \min\{x, y\}$. Si $m = x$ entonces $x = m \leq y$ y si $m = y$ entonces $y = m \leq x$.

Definición 3.2. Postulamos la existencia de un conjunto bien ordenado $\langle \omega_1, <\rangle$ que cumple las siguientes propiedades.

(a) *Cada subconjunto numerable tiene una cota fuera de ese subconjunto*, es decir, si $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \omega_1$, entonces existe $\beta \in \omega_1$ tal que $\alpha_n < \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) *Cada segmento inicial propio es numerable*, es decir, para cada $\alpha \in \omega_1$ el conjunto $\{\beta \in \omega_1 : \beta \leq \alpha\}$ es numerable.

A los elementos de ω_1 les llamaremos *ordinales numerables*.

Una forma en la que se puede justificar la existencia de ω_1 sin hacer toda la construcción de von Neumann es usando el *axioma de elección*. El axioma de elección es equivalente a la afirmación que dice que todo conjunto admite un buen orden. Se empieza tomando un buen orden $\prec$ en $\mathbb{R}$ (que no va a coincidir con el orden usual). Afirmamos que con respecto a $\prec$ existe un segmento inicial $W \subset \mathbb{R}$ que es el más chico (con respecto a la contención) tal que W es no numerable.

En el caso de que todos los segmentos iniciales propios de $\mathbb{R}$ sean numerables, tomamos $W = \mathbb{R}$. Supongamos que entonces hay segmentos iniciales propios no numerables. Si J es un segmento inicial propio de $\mathbb{R}$, tomando r el mínimo elemento de $\mathbb{R} \setminus J$ según el orden $\prec$ se tiene que $J = \{x \in \mathbb{R} : x \prec r\}$; llamemos a este último conjunto J_r. Entonces, según el orden $\prec$ existe $s \in \mathbb{R}$ el mínimo elemento de $\mathbb{R}$ tal que J_s es no numerable. Entonces tomamos $W = J_s$ en este caso.

Veamos que este conjunto cumple las condiciones de la definición 3.2. Primero notemos que W no tiene elemento máximo ya que de tenerlo, al removerlo obtendríamos un segmento inicial más chico que sigue siendo no numerable. La propiedad (b) debe ser clara de la definición de W y el comentario que acabamos de hacer, así que solo queda probar (a). Si $A \subset W$ es numerable, necesitamos encontrar $p \in W$ tal que $a \prec p$ para todo $a \in A$. El conjunto

$$B = \bigcup_{a \in A} \{x \in W : x \prec a\}$$

es unión de una colección numerable de segmentos iniciales propios de W, así que es un segmento inicial numerable. Definiendo a p como el mínimo elemento de $W \setminus B$ obtenemos que se cumple (a). Este argumento también se puede encontrar en [9, §1.2].

Usualmente a los ordinales numerables se les denota con letras griegas minúsculas, así que seguiremos esta convención. En ω_1, necesitaremos dos intervalos más además de los definidos en la sección anterior. Dado $\alpha \in \omega_1$ consideramos

$$(\alpha, \omega_1) = \{\gamma \in \omega_1 \colon \alpha < \gamma\} \quad \text{y} \quad [\alpha, \omega_1) = \{\gamma \in \omega_1 \colon \alpha \leq \gamma\}.$$

Nótese que la idea intuitiva de esta notación es que ω_1 es otro ordinal que es mayor que todos sus elementos.

Sucede que la definición 3.2 es suficiente para demostrar algunas de las propiedades básicas de ω_1. En primera, de la propiedad (a) se sigue que ningún subconjunto numerable de ω_1 puede agotar a los elementos de ω_1.

Propiedad 3.3. ω_1 es no numerable.

El primer elemento de ω_1 lo podemos denotar por 0. Combinando (a) y (b) de la definición y el hecho de que el orden es lineal, se puede ver que ω_1 no tiene elemento máximo. Entonces, si $\alpha \in \omega_1$, el conjunto (α, ω_1) es distinto del vacío; por el buen orden, este conjunto tiene un elemento mínimo.

Propiedad 3.4. Para cada $\alpha \in \omega_1$ existe un elemento $\alpha + 1 \in \omega_1$ tal que $\alpha < \alpha + 1$ y $(\alpha, \alpha + 1) = \emptyset$. Llamaremos a $\alpha + 1$ el *sucesor* (inmediato) de α.

Empezando en el 0 y repitiendo este proceso de tomar sucesor recursivamente podemos construir una copia de los números naturales: $0 < 1 < 2 < \ldots$ Después de esto, nos encontramos con el primer elemento de ω_1 mayor a todos estos, que llamaremos ω. Entonces los primeros elementos de ω_1 son $\mathbb{N} = \{n \in \omega_1 \colon n < \omega\}$.

Propiedad 3.5. ω_1 tiene un segmento inicial isomorfo a $\mathbb{N}$, sin pérdida de generalidad pensaremos que este segmento inicial es $\mathbb{N} \subset \omega_1$. Denotamos $\omega = \min(\omega_1 \setminus \mathbb{N})$.

A los elementos de ω_1 que no son el 0 ni el sucesor de ningún ordinal les llamamos *ordinales numerables límites*. Sucede que todo ordinal numerable límite tiene *cofinalidad* igual a ω. Esto significa que todo ordinal numerable límite se puede «alcanzar» con una sucesión creciente indicada por los números naturales; a continuación enunciamos esto de manera más formal.

Propiedad 3.6. Si $\alpha \in \omega_1$ es límite, entonces existe una colección $\{\alpha_n \colon n < \omega\} \subset [0, \alpha)$ con las propiedades siguientes:

(i) la sucesión es estrictamente creciente, es decir, $m < n < \omega$ implica $\alpha_m < \alpha_n$, y

(ii) dado $\beta \in \omega_1$ con $\beta < \alpha$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\beta < \alpha_m$.

Es importante notar que el inciso (II) de la propiedad 3.6 es equivalente a que $\alpha = \sup\{\alpha_n \colon n < \omega\}$. Para probar esta propiedad 3.6, primero escogemos una enumeración $\{\beta_n \colon n < \omega\}$ del intervalo $[0, \alpha)$; esto es posible por la propiedad (a) de la definición de ω_1. Note que esta enumeración no es creciente en general: a pesar de cumplir la parte (II), no necesariamente cumple la parte (I)[9]. Entonces, necesitamos otra sucesión. Sea entonces $\alpha_0 = \beta_0$ y para cualquier $m < \omega$, sea $\alpha_{m+1} = \beta_{k(m)}$, donde $k(m) = \text{mín}\{n < \omega \colon (\alpha_m < \beta_n) \text{ y } (\beta_m < \beta_n)\}$. Notemos que para cada $m < \omega$ se tiene que $\alpha_m < \beta_{k(m)} = \alpha_{m+1}$, por lo que se cumple (I), y $\beta_m < \beta_{k(m)} = \alpha_{m+1}$, por lo que se cumple (II).

De paso, aprovechamos para decir que cualquier sucesión numerable de ordinales numerables no solo está acotada sino que tiene un supremo; este es el mínimo elemento de ω_1 que es mayor o igual que todos.

Propiedad 3.7. Dado $\{\alpha_n \colon n < \omega\} \subset \omega_1$, existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $\alpha = \sup\{\alpha_n \colon n < \omega\}$.

La siguiente propiedad que nos interesa es la que dice que hay un único conjunto bien ordenado que cumple estas condiciones. Esto se sigue del teorema de unicidad de los buenos órdenes (véase [8, teo 5.15]).

Teorema 3.8. *Cualesquiera dos conjuntos bien ordenados que cumplen las condiciones de la definición 3.2 son isomorfos.*

Como corolario del teorema 3.8 se puede dar una prueba del teorema 1.2. Supongamos que $A \subset \omega_1$ es no numerable. En primera, A con el orden $<$ heredado de ω_1 es un buen orden. Además, es fácil ver que con este orden heredado, A cumple las condiciones (a) y (b) de la definición de ω_1. Entonces A es isomorfo a ω_1. Esto lo podemos escribir como sigue.

Propiedad 3.9. Sea $A \subset \omega_1$ no numerable. Entonces existe una enumeración biyectiva $A = \{x_\alpha \colon \alpha \in \omega_1\}$ que además preserva el orden, es decir, dados $\alpha, \beta \in \omega_1$ se tiene que $\alpha < \beta$ si y solo si $x_\alpha < x_\beta$.

Para finalizar esta sección vamos a enunciar el teorema de inducción; su demostración se puede obtener del hecho que la relación es de buen orden.

Teorema 3.10 (Inducción transfinita)**.** *Supongamos que $X \subset \omega_1$ cumple que si $\alpha \in \omega_1$ es tal que $[0, \alpha) \subset X$, entonces $\alpha \in X$. Entonces $X = \omega_1$.*

En las siguientes dos secciones platicaremos dos formas en las que podemos comparar $\mathbb{R}$ y ω_1. La primera será desde el punto de vista de la teoría de conjuntos ordenados, y la segunda desde el punto de vista de espacios topológicos.

[9] Para entender porqué, recuerde la construcción de los ordinales de la forma $\omega \cdot m + n$ que dimos en la sección 1.

4. $\mathbb{R}$ vs. ω_1 como conjuntos ordenados

Desde el punto de vista de la teoría de conjuntos ordenados, ambos $\mathbb{R}$ y ω_1 son conjuntos linealmente ordenados. Sin embargo, ω_1 está bien ordenado y $\mathbb{R}$ no. De principio, $\mathbb{R}$ no tiene elemento mínimo, pero aún más: cualquier intervalo en $\mathbb{R}$ de la forma (a, b) con $a < b$ es distinto del vacío pero no tiene elemento mínimo.

Algo que podemos preguntarnos sobre estos órdenes es si tienen *subórdenes isomorfos*. Podemos enunciar esto de la siguiente manera: ¿para cuales $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \omega_1$ se tiene que A es isomorfo a B (ambos con los órdenes inducidos como subconjuntos)? De principio, como ser buen orden se hereda a subórdenes y se preserva bajo isomorfismos, ambos A y B tienen que ser bien ordenados. Entonces vale la pena pensar en cuáles subconjuntos de ω_1 tienen «copias isomorfas» dentro de $\mathbb{R}$. Antes de empezar a resolver esta pregunta, vamos a mencionar el siguiente lema que nos será de utilidad.

Lema 4.1. *Cualquier intervalo* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *(con* $a < b$*) es isomorfo a* $\mathbb{R}$.

Esbozo de la prueba. Para probar esto, se puede proceder en dos pasos. Primero, la función $f\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)$ definida por $f(x) = x/\sqrt{x^2 + 1}$ es un isomorfismo (véase la figura 2). Después de esto, usando una función

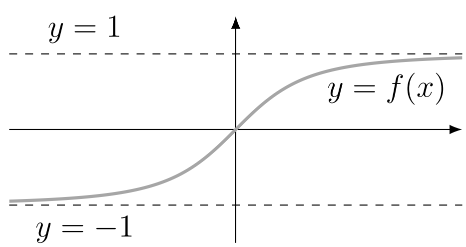

Figura 2. Función f de la prueba del lema 4.1.

lineal es fácil ver que $(-1, 1)$ es isomorfo a cualquier intervalo (a, b) con $a < b$. Componiendo estas dos funciones se obtiene el isomorfismo deseado. $\square$

Empecemos con un resultado positivo: sucede que todo segmento inicial de ω_1 se puede «copiar» dentro de $\mathbb{R}$ de tal forma que se preserve el orden.

Teorema 4.2. *Si* $\alpha \in \omega_1$ *entonces existe un subconjunto de* $\mathbb{R}$ *que es isomorfo al intervalo* $[0, \alpha)$.

Demostración. Este resultado se prueba por inducción transfinita (teorema 3.10). Supongamos primero que $\alpha = 0$ (este caso se llama el caso

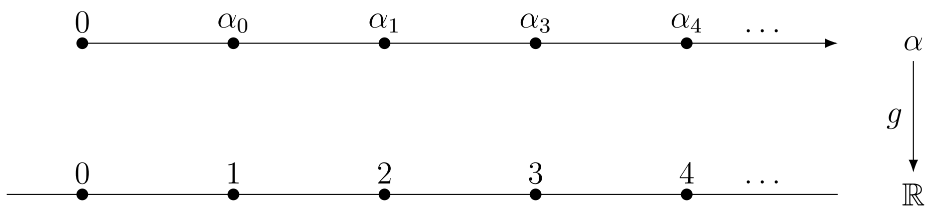

Figura 3. Función g en el teorema 4.2.

«base de inducción»). Como en este caso $[0, \alpha) = \emptyset$, $[0, \alpha)$ de hecho es un subconjunto de $\mathbb{R}$, así que el resultado es cierto para $\alpha = 0$.

Ahora supongamos que $\alpha > 0$ y que sabemos que para todo $\xi < \alpha$ existe un conjunto $X_\xi \subset \mathbb{R}$ y un isomorfismo $f_\xi \colon [0, \xi) \to X_\xi$. Tenemos que probar que existe un isomorfismo $f_\alpha \colon [0, \alpha) \to X_\alpha$ para algún subconjunto X_α de $\mathbb{R}$.

Si $\alpha = \beta + 1$ entonces $[0, \alpha) = [0, \beta]$. Por la hipótesis de inducción existe un conjunto $X_\beta \subset \mathbb{R}$ y un isomorfismo $f_\beta \colon [0, \beta) \to X_\beta$. Usando el lema 4.1 podemos suponer que $X_\beta \subset (0, 1)$. Entonces definimos $X_\alpha = X_\beta \cup \{1\}$ y $f_\alpha \colon [0, \alpha) \to X_\beta$ por $f_\alpha(\gamma) = f_\beta(\gamma)$ si $\gamma < \beta$ y $f_\alpha(\beta) = 1$.

Si α es límite, podemos encontrar una sucesión $\{\alpha_n \colon n < \omega\}$ con las propiedades (I) y (II) que aparecen en la propiedad 3.6 de ω_1. Sin pérdida de generalidad podemos pensar que $\alpha_0 > 0$. Entonces podemos partir el intervalo $[0, \alpha)$ en una unión de intervalos ajenos por parejas:

$$[0, \alpha) = [0, \alpha_0) \cup \left(\bigcup \{[\alpha_i, \alpha_{i+1}) \colon i < \omega\} \right).$$

Notemos que por nuestra hipótesis de inducción sabemos que para cada $n < \omega$, existe $X_{\alpha_n} \subset \mathbb{R}$ y un isomorfismo $f_{\alpha_n} \colon [0, \alpha_n) \to X_{\alpha_n}$. Haremos unas modificaciones a estos conjuntos.

Empezamos tomando $Y_0 = X_{\alpha_0}$ y $g_0 = f_{\alpha_0}$. Para $m < \omega$ tomamos la imagen $Y_{m+1} = f[[\alpha_m, \alpha_{m+1})]$ y consideramos la restricción

$$g_{m+1} = f_{\alpha_m} \restriction [\alpha_m, \alpha_{m+1}) \colon [\alpha_m, \alpha_{m+1}) \to Y_{m+1}.$$

Finalmente, por el lema 4.1 podemos suponer que para cada $m < \omega$ se tiene que $Y_m \subset [m, m+1)$. Entonces podemos tomar $Y = \bigcup_{m<\omega} Y_m$ y definir la función $g \colon [0, \alpha) \to Y$ por

$$g(\beta) = \begin{cases} g_0(\beta), & \text{si } \beta \in [0, \alpha_0), \text{ y} \\ g_{m+1}(\beta), & \text{si } \beta \in [\alpha_m, \alpha_{m+1}) \text{ para algún } m < \omega. \end{cases}$$

para todo $\beta \in [0, \alpha)$ (véase la figura 3). Sucede que g es un isomorfismo.

Esto completa la demostración por inducción transfinita. $\square$

Podemos deducir un poco más de este resultado, ya que si podemos encontrar copias isomorfas de cualquier segmento inicial, entonces podemos encontrar copias isomorfas de todos los subconjuntos acotados de ω_1. Por el contrario, los conjuntos no acotados, equivalentemente, los no numerables, no tienen esta propiedad como veremos a continuación.

Teorema 4.3. *Si $A \subset \omega_1$ es de cardinalidad ω_1, entonces no existe ningún subconjunto de $\mathbb{R}$ que sea isomorfo a A.*

Demostración. Vamos a proceder por contradicción. Suponemos que sí existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ isomorfo a A. Usando la propiedad 3.9 de ω_1 podemos suponer que tal subconjunto de $\mathbb{R}$ es $B = \{x_\alpha \colon \alpha < \omega_1\} \subset \mathbb{R}$ y cumple que si $\alpha, \beta \in \omega_1$ son tales que $\alpha < \beta$, entonces $x_\alpha < x_\beta$. Recordemos que el conjunto $\mathbb{Q}$ es numerable, entonces escogemos una enumeración $\mathbb{Q} = \{q_n \colon n < \omega\}$. Una propiedad importante de $\mathbb{Q}$ es que entre cualesquiera dos números reales existe un número racional. Esta propiedad nos permite definir una función $f \colon \omega_1 \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(\alpha) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \colon q_n \in (x_\alpha, x_{\alpha+1})\}$$

para todo $\alpha \in \omega_1$.

Veamos que f es inyectiva. Sean $\alpha, \beta \in \omega_1$ distintos; podemos suponer que $\alpha < \beta$. Notemos que esto implica que $x_\alpha < x_{\alpha+1} \leq x_\beta$. Entonces $q_{f(\alpha)} \in (x_\alpha, x_{\alpha+1})$, $q_{f(\beta)} \in (x_\beta, x_{\beta+1})$ y $(x_\alpha, x_{\alpha+1}) \cap (x_\beta, x_{\beta+1}) = \emptyset$; así que $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Pero esto no es posible: si existiera una función inyectiva de ω_1 a $\mathbb{N}$, tendríamos una biyección de ω_1 en un subconjunto de $\mathbb{N}$ (la imagen de ω_1 bajo la función), lo que implica que ω_1 es numerable. Esta contradicción nos permite concluir que no puede existir un conjunto B isomorfo a A. □

Entonces lo siguiente se puede deducir inmediatamente:

Corolario 4.4. *Sea $A \subset \omega_1$. Entonces A es isomorfo a algún subconjunto de $\mathbb{R}$ si y solo si A es acotado.*

5. $\mathbb{R}$ vs ω_1 como espacios topológicos

En lo que sigue, vamos a comparar a $\mathbb{R}$ y a ω_1 como espacios topológicos. A partir de ahora supondremos que usted tiene nociones básicas de topología, digamos, de un curso básico. Como referencias de topología general en español le recomendamos [3] y [9].

La topología de $\mathbb{R}$ se conoce más o menos de forma común entre estudiantes de mediados de una licenciatura en matemáticas. La topología de ω_1 es un poco menos conocida, así que la vamos a definir.

Dado un conjunto linealmente ordenado $\langle X, < \rangle$, la *topología del orden* en X es aquella topología generada por los conjuntos de la forma $\{y \in X \colon y < x\}$ y $\{y \in X \colon x < y\}$, donde $x \in X$.

En el caso de $\mathbb{R}$ su topología del orden coincide con la topología euclideana, y tiene como base a la colección $\{(a, b) \colon a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$

de intervalos abiertos. Para el caso de ω_1, tenemos que una base está dada por la familia que contiene a todos los conjuntos de alguno de los siguientes tres tipos:

(a) el unitario $\{0\}$,
(b) el unitario $\{\alpha+1\}$ para cualquier $\alpha \in \omega_1$, y
(c) el intervalo $(\beta, \alpha]$ para cualquier $\alpha \in \omega_1$ límite y $\beta < \alpha$.

De manera más concreta, se puede definir que un subconjunto de ω_1 es abierto si es unión de conjuntos de algunos de estos tres tipos. Notemos que en el caso sucesor el abierto $\{\alpha+1\} = (\alpha, \alpha+1]$ así que para todo $\alpha > 0$ un abierto básico es de la forma $(\beta, \alpha]$ con $\beta < \alpha$.

Otra forma equivalente de definir a la topología de ω_1 es definir a los cerrados. Le dejamos a usted la prueba del siguiente resultado que seguramente le dará una mejor idea de cómo es la topología de ω_1.

Lema 5.1. *Para $A \subset \omega_1$, los siguientes son equivalentes:*

(I) A es cerrado con la topología del orden,
(II) si $\{\alpha_n \colon n < \omega\} \subset A$ es tal que $i < j < \omega$ implica $\alpha_i < \alpha_j$, entonces $\alpha = \sup\{\alpha_n \colon n < \omega\} \in A$.

Basándonos en la idea de la sección pasada, podemos tratar de encontrar funciones entre $\mathbb{R}$ y ω_1 que preserven la estructura topológica, en este caso, funciones continuas. Por argumentos de conexidad es muy fácil probar que cualquier función continua $f \colon \mathbb{R} \to \omega_1$ es constante. Por otro lado, modificando lo que hicimos en la sección pasada, es posible producir funciones continuas e inyectivas de segmentos iniciales de ω_1 a los reales.

Teorema 5.2. *Dado $\alpha \in \omega_1$ existe una función $f \colon [0, \alpha) \to \mathbb{R}$ que es continua e inyectiva.*

Esbozo de demostración. Siga la idea de la prueba del teorema 4.2 asegurándose que si $\beta \in \omega_1$ es un ordinal numerable límite con $\beta < \alpha$, entonces $f(\beta) = \sup\{f(\gamma) \colon \gamma < \beta\}$. Si esta condición se cumple, la función obtenida será continua. □

Sucede que también podemos encontrar un resultado análogo al del teorema 4.3: no hay funciones continua e inyectivas de ω_1 a los reales. Sin embargo, para probar esto necesitamos hacer un poco más de trabajo ya que las funciones continuas no necesariamente respetan el orden. A continuación veremos que las funciones continuas de ω_1 a $\mathbb{R}$ se vuelven constantes a partir de algún momento.

Teorema 5.3. *Si $f \colon \omega_1 \to \mathbb{R}$ es una función continua, existen $\eta \in \omega_1$ y $r \in \mathbb{R}$ tales que si $\alpha \in [\eta, \omega_1)$ entonces $f(\alpha) = r$.*

Demostración. La técnica para demostrar este teorema es mostrar que la imagen bajo f de los segmentos finales $(\alpha, \omega_1]$ de ω_1 «decrece a un solo punto» en una cantidad numerable de pasos. De manera más explícita, para cada $m < \omega$ probaremos que existe $\alpha_m < \omega_1$ tal que para todo $\beta \in (\alpha_m, \omega_1)$ se tiene que la distancia $|f(\alpha_m) - f(\beta)| < 2^{-m}$.

Fijamos $m < \omega$ y supongamos que esto no se cumple. Entonces podemos construir una sucesión $\{\beta_n \colon n < \omega\}$ de la siguiente forma. Primero, $\beta_0 = 0$. Ya que está definido β_n, tomamos β_{n+1} el mínimo $\gamma \in (\beta_n, \omega_1)$ con la propiedad que $|f(\beta_n) - f(\gamma)| \geq 2^{-m}$. Sea $\beta = \sup\{\beta_n \colon n < \omega\}$. Notemos que entonces $\{\beta_n \colon n < \omega\}$ es una sucesión que converge a β. Se sabe que las funciones continuas mandan sucesiones convergentes a sucesiones convergentes (véase, por ejemplo, [9, teo. 6.18]). Entonces $\{f(\beta_n) \colon n < \omega\}$ es una sucesión convergente en $\mathbb{R}$, y existe $x = \lim_{n\to\infty} f(\beta_n)$. Esto en particular implica que existe $k < \omega$ tal que si $n \geq k$ entonces $|x - f(\beta_n)| < 2^{-(m+1)}$. Aplicando esto a $n = k$ y $n = k+1$ más la *desigualdad del triángulo* obtenemos que

$$|f(\beta_k) - f(\beta_{k+1})| \leq |f(\beta_k) - x| + |x - f(\beta_{k+1})| < 2^{-(m+1)} + 2^{-(m+1)} = 2^{-m}.$$

Pero recordemos que β_{k+1} se escogió con la propiedad de que $|f(\beta_k) - f(\beta_{k+1})| \geq 2^{-m}$, por lo que obtenemos una contradicción.

Entonces concluimos que existe una sucesión de ordinales $\{\alpha_m \colon m < \omega\}$ con la propiedad que se menciona en el primer párrafo. Entonces por la propiedad (a) en la definición de ω_1 existe $\eta \in \omega_1$ tal que $\{\alpha_m \colon m < \omega\} \subset [0, \eta]$. Notemos que si $\beta \in (\eta, \omega_1)$ entonces para toda $m < \omega$ se tiene que $|f(\eta) - f(\beta)| < 2^{-m}$; esto implica que $f(\eta) = f(\beta)$. Tomando $r = f(\eta)$ obtenemos la conclusión del enunciado de este teorema. □

6. Propiedades tipo compacidad en ω_1

Ya que hemos comparado a ω_1 con el bien conocido $\mathbb{R}$ como espacios topológicos, podemos preguntarnos qué propiedades topológicas tiene ω_1 de manera intrínseca. Una de las propiedades topológicas más notables es la *compacidad*, que notamos que ω_1 no satisface.

Proposición 6.1. *ω_1 no es compacto.*

Demostración. Consideramos a la colección $\mathcal{U} = \{[0, \alpha) \colon \alpha \in \omega_1\}$, que claramente es una cubierta abierta. Una subcolección finita de $\mathcal{U}$ es de la forma $\mathcal{F} = \{[0, \alpha_i) \colon i \leq m\}$, donde $m < \omega$ y $\{\alpha_i \colon i \leq m\} \subset \omega_1$. Tomando $\beta = \max\{\alpha_i \colon i \leq m\} + 1$, observamos que $\beta \notin \bigcup \mathcal{F}$; así, $\mathcal{F}$ no es cubierta de ω_1. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de ω_1 sin subcubiertas finitas. □

A pesar de esto, sucede que ω_1 cumple propiedades topológicas *tipo compacidad* que son más débiles. Vamos a hablar de dos de ellas.

Al aprender sobre compacidad en un curso básico de análisis matemático, uno se puede encontrar con las siguientes propiedades de compactos en espacios métricos.

(I) Cualquier subconjunto infinito de un compacto tiene un punto de acumulación ([12, teo 2.37]).
(II) La imagen de un compacto bajo una función continua con valores reales es acotada ([12, teo 4.15]).

Más adelante, en un curso de topología se aprende que estas dos propiedades también se cumplen en espacios topológicos abstractos que son compactos. Podemos abstraer estas dos propiedades como definiciones de la siguiente manera.

Definición 6.2. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es

(I) *numerablemente compacto*[10] si cualquier subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación, y
(II) *pseudocompacto* si la imagen de cualquier función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ es acotada.

Para espacios métricos, las nociones de espacio compacto, espacio numerablemente compacto y espacio pseudocompacto coinciden (véase, por ejemplo, [9, teo. 7.48]). En general se sabe que un espacio compacto siempre es numerablemente compacto y un espacio numerablemente compacto siempre es pseudocompacto (véase [5, teo. 3.10.6]). Como es común en topología, uno busca *contraejemplos* de espacios que tengan una propiedad topológica pero no otra; vamos a ver a continuación que ω_1 nos sirve para «separar» compacidad de compacidad numerable.

Proposición 6.3. *ω_1 es un espacio numerablemente compacto, y por lo tanto, pseudocompacto.*

Demostración. Sea $A \subset \omega_1$ infinito. Primero notemos que si A es no numerable, como es isomorfo a ω_1 (por la propiedad 3.9 de ω_1), A contiene un segmento inicial isomorfo a ω. De cualquier manera, existe $N \subset A$ que es numerable infinito. Tomamos $\alpha = \sup N \in \omega_1$ y consideramos el conjunto

$$S = \{\beta \in \omega_1 \colon [0, \beta] \cap N \text{ es infinito}\}.$$

Dado que $N \subset [0, \alpha]$, entonces $\alpha \in S$. Así que $S \neq \emptyset$ y podemos considerar $\gamma = \min S$. Afirmamos que γ es un punto de acumulación de N.

Sea entonces $U \subset \omega_1$ un abierto de ω_1 con $\gamma \in U$. Dado que claramente $\gamma > 0$, existe $\delta \in \omega_1$ con $\delta < \gamma$ y $(\delta, \gamma] \subset U$. Notemos que $\delta \notin S$,

[10] La noción de numerablemente compacto a veces se define de manera distinta usando cubiertas y para obtener la equivalencia es suficiente suponer el axioma de Hausdorff, véase [5, 3.10.3]. Como se comentará en la sección 7, ω_1 es Hausforff así que no hay problema con usar esta noción.

así que $[0,\delta]\cap N$ es finito. Y como se tiene que

$$[0,\gamma]\cap N = ([0,\delta]\cap N)\cup((\delta,\gamma]\cap N),$$

entonces necesariamente $(\delta,\gamma]\cap N$ es infinito. Pero esto implica que $U\cap N$ es infinito, y dado que U es una vecindad abierta arbitraria de γ, obtenemos que γ es punto de acumulación de N. Por lo tanto, γ también es punto de acumulación de A. $\square$

Corolario 6.4. *ω_1 es un ejemplo de espacio topológico que es numerablemente compacto pero no es compacto.*

7. Normalidad y paracompacidad en ω_1

En esta sección sigamos con la motivación topológica para estudiar el espacio topológico ω_1. Pensemos en los *axiomas de separación*, que en cierta forma nos dicen qué tan parecido es un espacio topológico a un espacio métrico. Fácilmente se confirma que ω_1 es un *espacio de Hausdorff*, o T_2: si $\alpha,\beta\in\omega_1$ entonces, suponiendo $\alpha<\beta$, los intervalos $[0,\alpha+1)$ y (α,ω_1) son abiertos en la topología, el primero tiene a α, el segundo a β, y $[0,\alpha+1)\cap(\alpha,\omega_1)=\emptyset$.

Es un teorema famoso en topología que los *espacios linealmente ordenados* (es decir, con la topología del orden), son *normales*, o T_4. De hecho, estos espacios en general son *hereditariamente normales*, es decir, cualquiera de sus subespacios es normal. Sin embargo esta prueba no es tan conocida, y además es un poco difícil encontrarla en la literatura (véase, por ejemplo, [9, teo 5.18]). La demostración de que ω_1 es hereditariamente normal es fácil, podemos presentarla aquí.

Teorema 7.1. *Cualquier subespacio de ω_1 es normal.*

Demostración. Según [9, ejer. 5.12] es suficiente probar que si $A,B\subset\omega_1$ son tales que $\overline{A}\cap B=\emptyset=A\cap\overline{B}$,[11] entonces existen abiertos U y V tales que $A\subset U$, $B\subset V$ y $U\cap V=\emptyset$.

Sea $\alpha\in A$. Si $\alpha=0$, definimos $U_\alpha=\{0\}$. En caso contrario, como $\alpha\notin\overline{B}$, existe $\gamma_\alpha<\alpha$ tal que $B\cap(\gamma_\alpha,\alpha]=\emptyset$ y definimos $U_\alpha=(\gamma_\alpha,\alpha]$. Entonces sea $U=\bigcup\{U_\alpha\colon\alpha\in A\}$; claramente $A\subset U$.

Para $\beta\in B$ hacemos algo totalmente análogo. Si $\beta=0$, definimos $V_\beta=\{0\}$. En caso contrario, como $\beta\notin\overline{A}$, existe $\gamma_\beta<\beta$ tal que $A\cap(\gamma_\beta,\beta]=\emptyset$ y definimos $V_\beta=(\gamma_\beta,\beta]$. Finalmente, sea $V=\bigcup\{V_\beta\colon\beta\in B\}$; obtenemos que $B\subset V$.

Sean $\alpha\in A$ y $\beta\in B$. Si $\alpha<\beta$, se obtiene inmediatamente que $U_\alpha\subset[0,\alpha]$ y $V_\beta\subset(\alpha,\omega_1)$ por lo que $U_\alpha\cap V_\beta=\emptyset$. Si $\beta<\alpha$, se

[11] Aquí $\overline{X}$ denota la cerradura de $X\subset\omega_1$.

puede argumentar de manera análoga que $U_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$. Esto prueba que $U \cap V = \emptyset$. □

Ahora bien, hay una propiedad topológica más fuerte que la normalidad; esta es la famosa *paracompacidad*, que, como veremos, nos ayudará a descubrir una de las propiedades más importantes de ω_1.

Definición 7.2. Un espacio topológico X es *paracompacto* si es Hausdorff y cada vez que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, existe una cubierta abierta $\mathcal{V}$ de X con las siguientes dos propiedades:

(a) $\mathcal{V}$ *refina* a $\mathcal{U}$: para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U$, y
(b) $\mathcal{V}$ es *localmente finita*: si $x \in X$, existe un abierto W con $x \in W$ y $\{V \in \mathcal{V} : W \cap V \neq \emptyset\}$ es finito.

Sucede que todo espacio paracompacto es normal ([9, prop. 9.14]), y tanto los espacios compactos[12] como los espacios métricos ([9, teo. 9.22]) son paracompactos. La paracompacidad además es una propiedad importante de las *variedades topológicas* ya que gracias a la paracompacidad se pueden encontrar *particiones de la unidad*, muy útiles en la topología diferencial (véase, por ejemplo, [4, §1.4]). Sin embargo, ω_1 no es paracompacto.

Al principio, la falta de paracompacidad de ω_1 puede que nos suene como algo malo, y que entonces ω_1 se considere un ejemplo patológico. Todo lo contrario. Vamos a hacer un ejercicio de exploración: vamos a tratar de probar que ω_1 es paracompacto, y ver qué es lo que falla.

Sea entonces $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de ω_1. Para construir un refinamiento localmente finito $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ podemos basarnos en la idea del teorema 7.1 y usar *recursión* sobre ω_1 para escoger, para cada $\alpha \in \omega_1$, un abierto V_α y después definir $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$. Naturalmente, podemos tomar $V_0 = \{0\}$. Ahora, en el paso $\alpha > 0$ consideramos algún $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha \in U_\alpha$ y definimos $V_\alpha = (\gamma_\alpha, \alpha]$ de tal manera que $V_\alpha \subset U_\alpha$. Hasta ahora, es claro que esto produce un refinamiento de $\mathcal{U}$; ¿qué se necesitaría para que fuera localmente finito?

Que el refinamiento sea localmente finito implica que es *puntualmente finito*[13], es decir, que cada punto está en una cantidad finita de elementos de la cubierta. Entonces pensemos por ahora que solo requerimos puntualmente finito, y veamos qué se necesita.

Entonces, dado $\beta \in \omega_1$, hay que asegurarse que solo una cantidad finita de V_α tiene a β. Como todos los abiertos V_α miran «hacia atrás», solo nos tenemos que preocupar de los $\alpha \geq \beta$. Entonces requerimos que solo haya una cantidad finita de $\alpha \geq \beta$ tales que $\beta \in (\gamma_\alpha, \alpha]$. Equivalentemente: queremos que solo haya una cantidad finita de $\alpha \geq \beta$

[12] Esto es inmediato de la definición de compacidad.

[13] Si reemplazamos «localmente finito» por «puntualmente finito» en la definición de paracompacidad, obtenemos otra propiedad topológica más débil llamada *metacompacidad*.

con $\gamma_\alpha < \beta$. En 1923, los topólogos rusos Paul Alexandroff y Paul Urysohn demostraron[14] que eso es imposible.

Definición 7.3. Sea $S \subset \omega_1$ con $S \neq \emptyset$. Una función $f\colon S \to \omega_1$ es *regresiva* si para cada $\alpha \in S \setminus \{0\}$ se tiene que $f(\alpha) < \alpha$.

Proposición 7.4 (Alexandroff y Urysohn)**.** *Si $f\colon \omega_1 \to \omega_1$ es una función regresiva, entonces existen $\zeta \in \omega_1$ y un conjunto no numerable $A \subset \omega_1$ tales que $f(\alpha) = \zeta$ para todo $\alpha \in A$.*

Demostración. Supongamos que no es así, y que cada fibra $f^{\leftarrow}(\alpha)$, con $\alpha \in \omega_1$, es acotada. Construimos una sucesión creciente $\{\alpha_m\colon m < \omega\}$ de la siguiente forma.

Empezamos con $\alpha_0 = 0$. Supongamos que ya tenemos construido $\alpha_m \in \omega_1$ para algún $m < \omega$. Entonces, la unión de las fibras de todos los ordinales entre 0 y α_m, es una unión numerable de conjuntos numerables, así que es numerable. Por lo tanto podemos elegir $\alpha_{m+1} \in \omega_1$ como el mínimo $\alpha \in \omega_1$ tal que si $\beta \leq \alpha_m$ entonces $f^{\leftarrow}(\beta) \subset [0, \alpha]$. De hecho no es difícil ver que con esta elección

$$\alpha_{m+1} = \sup\left(\bigcup\{f^{\leftarrow}(\beta)\colon \beta \leq \alpha_m\}\right).$$

Como la función f es regresiva se puede ver que para cada $m < \omega$ se tendrá que $\alpha_m < \alpha_{m+1}$. Entonces podemos aplicar la propiedad 3.7 de ω_1 y obtener $\alpha_\omega = \sup\{\alpha_m\colon m < \omega\}$.

Como f es regresiva, sabemos que $f(\alpha_\omega) < \alpha_\omega$. Así que existe $n \in \omega$ tal que $f(\alpha_\omega) < \alpha_n$. Sin embargo, notemos que por la definición de α_{n+1} se obtiene que $f^{\leftarrow}(f(\alpha_\omega)) \subset [0, \alpha_{n+1}]$. Pero $\alpha_\omega \in f^{\leftarrow}(f(\alpha_\omega))$, lo cual implica que $\alpha_\omega < \alpha_{n+1}$. Esta es una contradicción, y por lo tanto la conclusión que queríamos se sigue. $\square$

Hasta ahora podemos afirmar que el método que estábamos discutiendo para probar que ω_1 no es paracompacto, no va a funcionar. Ahora veamos que definitivamente no habrá forma de probar esto.

Teorema 7.5. *ω_1 no es paracompacto.*

Demostración. Tenemos que dar una cubierta abierta sin refinamientos localmente finitos, propongamos

$$\mathcal{U} = \{[0, \alpha]\colon \alpha \in \omega_1\}.$$

Sea $\mathcal{V}$ cualquier refinamiento de $\mathcal{U}$, tenemos que probar que $\mathcal{V}$ no es localmente finito. Supongamos que sí, y lleguemos a una contradicción.

Como $\mathcal{V}$ es localmente finita, en particular es puntualmente finita. Esto significa que si $\alpha \in \omega_1$ entonces $I_\alpha = \{V \in \mathcal{V}\colon \alpha \in V\}$ es finito;

[14]Este resultado fue anunciado en 1923 en [1] pero no fue hasta 1929 que la demostración apareció en [2], después de la muerte de Urysohn en 1924.

en este caso definimos $W_\alpha = \bigcap I_\alpha$, el cual es un abierto alrededor de α. Definimos entonces nuestra función regresiva $f\colon \omega_1 \to \omega_1$ de la siguiente forma: $f(0) = 0$ y si $\alpha > 0$ entonces $f(\alpha) \in \omega_1$ es tal que $(f(\alpha), \alpha] \subset W_\alpha$. Por la proposición 7.4 sabemos que existe $A \subset \omega_1$ que es no numerable y $\zeta \in \omega_1$ tal que $A \subset f^{\leftarrow}(\zeta)$.

Tomemos $\eta \in A$ arbitrario, entonces sabemos que $\zeta < \eta$ y $(\zeta, \eta] \subset W_\eta$. Como I_η es finito, podemos enumerarlo $I_\eta = \{V_0, \ldots, V_k\}$ para algún $k \in \omega$. Como $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$, existe $\alpha_i \in \omega_1$ tal que $V_i \subset [0, \alpha_i]$ para cada $i \leq k$.

Entonces escogemos $\theta \in A$ tal que $\theta > \eta$ y $\theta > \alpha_i$ para cada $i \leq k$. De nuevo, como $\theta \in A$ obtenemos que $(\zeta, \theta] \subset W_\theta$. Pero entonces $\eta \in (\zeta, \eta] \subset (\zeta, \theta) \subset (\zeta, \theta] \subset W_\theta$. Esto implica que $\eta \in W_\theta$, así que existe $V \in I_\theta$ tal que $\eta \in V$. Pero por definición de I_η, $V \in I_\eta$. Esto implica que existe $j \leq k$ tal que $V = V_j$.

Sin embargo, los siguientes dos hechos se contradicen. Por una parte, $V = V_j \subset [0, \alpha_j] \subset [0, \theta)$, así que $\theta \notin V$. Pero por otra parte, como $V \in I_\theta$ se tiene que $\theta \in V$. Esta contradicción implica que nuestra suposición era falsa. Entonces ω_1 no es paracompacto[15]. $\square$

8. Interludio: una aplicación a productos y normalidad

En este punto vamos a detenernos a hablar sobre una de las aplicaciones más conocidas del espacio ω_1 que se estudia en cursos de topología, que es el demostrar que hay subespacios de espacios normales que no son normales. Presentaremos dos de estos ejemplos.

Sin embargo, para presentar estos ejemplos hay que «avanzar un paso más allá» de ω_1. Lo que haremos será agregar un elemento a ω_1 al final, y ese elemento será ω_1 mismo. De manera concreta, definimos

$$\omega_1 + 1 = \omega_1 \cup \{\omega_1\}$$

y extendemos el orden de tal manera que $\alpha < \omega_1$ para todo $\alpha \in \omega_1$. No es difícil convencerse de que al extender el orden de esta forma, $\omega_1 + 1$ es un conjunto bien ordenado.

Esta definición puede parecer extraña al verla por primera vez, pero en la sección 1 platicamos que también los números naturales se pueden definir de manera similar. Además, esta definición encaja con la noción de ordinales según von Neumann (que también platicamos brevemente en la sección 1), ya que $\omega_1 + 1$ es el *ordinal sucesor* de ω_1.

Con respecto a la topología de $\omega_1 + 1$, tomamos de nuevo la topología del orden. Resulta que ω_1 es abierto en $\omega_1 + 1$ así que todos los abiertos

[15] De hecho, probamos algo más fuerte: ω_1 no es metacompacto.

básicos de la sección 5 siguen siendo abierto básicos. Para tener una base para la topología de $\omega_1 + 1$, basta con tomar los abiertos básicos que mencionamos en la sección 5 y agregar los conjuntos de la forma

$$(\alpha, \omega_1] = (\alpha, \omega_1) \cup \{\omega_1\}$$

para todo $\alpha \in \omega_1$, que serán los abiertos básicos alrededor del nuevo punto ω_1.

Hacemos la observación de que $\omega_1 + 1$ es Hausdorff. Para separar puntos de ω_1 es suficiente usar los abiertos de la sección 7. Si queremos separar $\alpha \in \omega_1$ de ω_1, podemos considerar los abiertos $[0, \alpha]$ y $(\alpha, \omega_1]$.

El espacio normal que veremos tiene subespacios no normales es el producto $(\omega_1 + 1) \times (\omega_1 + 1)$ con la topología producto usual. Para ver que este producto es normal necesitamos auxiliarnos de que $\omega_1 + 1$, a diferencia de ω_1, sí es compacto.

Proposición 8.1. *$\omega_1 + 1$ es compacto.*

Demostración. Supongamos que $\omega_1 + 1$ no es compacto. Entonces existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ que no tiene subcubiertas finitas. Consideramos el conjunto A de todos los $\alpha \in \omega_1 + 1$ tales que $[0, \alpha]$ no puede ser cubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$. Por nuestra suposición, $\omega_1 \in A$. Dado que $\omega_1 + 1$ es bien ordenado, existe $\beta = \operatorname{mín} A$.

Como $[0, 0] = \{0\}$ se puede cubrir por un elemento de $\mathcal{U}$, obtenemos que $\beta > 0$. Sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $\beta \in U$. Entonces existe $\delta \in \omega_1 + 1$ con $\delta < \beta$ y $(\delta, \beta] \subset U$. Por la minimalidad de β, $[0, \delta]$ puede cubrirse por una subfamilia finita $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. De modo que $[0, \beta]$ puede cubrirse por la familia finita $\mathcal{V} \cup \{U\}$. Esto contradice la elección de β y termina la prueba de la proposición. $\square$

Corolario 8.2. *El espacio $(\omega_1 + 1) \times (\omega_1 + 1)$ es un compacto de Hausdorff, y por lo tanto, normal.*

A continuación damos los dos contraejemplos prometidos que, usando los nombres propuestos en [13], llamaremos *plancha de Tychonoff* (teorema 8.3) y *plancha de Dieudonné* (teorema 8.4).

Teorema 8.3. *El espacio $([0, \omega] \times (\omega_1 + 1)) \setminus \{\langle \omega, \omega_1 \rangle\}$ no es normal.*

Demostración. Sean $A = \omega \times \{\omega_1\}$ y $B = \{\omega\} \times \omega_1$; estos son dos subconjuntos cerrados y ajenos, veamos que no se pueden separar por abiertos. Sean entonces U y V abiertos con $A \subset U$ y $B \subset V$; es suficiente ver que $U \cap V \neq \emptyset$.

Para cada $n \in \omega$, $\langle n, \omega_1 \rangle \in A \subset U$ así que existe $\alpha_n \in \omega_1$ tal que $\{n\} \times (\alpha_n, \omega_1] \subset U$. Dado que $\{\alpha_n : n \in \omega\} \subset \omega_1$, existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $\alpha_n < \alpha$ para todo $n \in \omega$. Así que $\omega \times [\alpha, \omega_1] \subset U$.

Dado que $\langle \omega, \alpha+1\rangle \in B \subset V$, existe $k \in \omega$ tal que $[k,\omega] \times \{\alpha+1\} \subset V$. Pero entonces $\langle k, \alpha+1\rangle \in U \cap V$. Así, hemos probado que $U \cap V \neq \emptyset$, que es lo que necesitábamos. $\square$

Teorema 8.4. *El espacio $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ no es normal.*

Demostración. Aquí veremos que los subconjuntos cerrados y ajenos $A = \{\langle \alpha, \alpha\rangle \colon \alpha \in \omega_1\}$ y $B = \omega_1 \times \{\omega_1\}$ no se pueden separar por abiertos. Sean U y V abiertos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

Dado $\alpha \in \omega_1$, $\langle \alpha, \alpha\rangle \in A \subset U$ así que existe $\gamma_\alpha < \alpha$ tal que $(\gamma_\alpha, \alpha] \times (\gamma_\alpha, \alpha] \subset U$. Como la función $\omega_1 \to \omega_1$ dada por $\alpha \mapsto \gamma_\alpha$ para todo $\alpha \in \omega_1$ es regresiva, por el resultado de Alexandroff y Urysohn (proposición 7.4) existen $S \subset \omega_1$ no numerable y $\gamma \in \omega_1$ tales que $\gamma = \gamma_\alpha$ para todo $\alpha \in S$.

Sea ahora $\beta \in \omega_1$ con $\gamma < \beta$. Como $\langle \beta+1, \omega_1\rangle \in B \subset V$, existe $\delta < \omega_1$ tal que $\{\beta+1\} \times (\delta, \omega_1] \subset V$. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $\delta > \gamma$. Sea $\eta \in S$ con $\eta > \text{máx}\{\beta+1, \delta+1\}$. Entonces por una parte,

$$\langle \beta+1, \delta+1\rangle \in (\gamma, \eta] \times (\gamma, \eta] \subset U,$$

y por otra

$$\langle \beta+1, \delta+1\rangle \in \{\beta+1\} \times (\delta, \omega_1] \subset V,$$

lo cual implica que $\langle \beta+1, \delta+1\rangle \in U \cap V$. Así, hemos probado que $U \cap V \neq \emptyset$, que es lo que necesitábamos. $\square$

Corolario 8.5. *El espacio $(\omega_1+1) \times (\omega_1+1)$ es normal pero no hereditariamente normal.*

9. Generalizando: clubs, estacionarios y el lema de Fodor

Después de los teoremas de secciones anteriores, el autor intentó hacer énfasis en que hay varias propiedades especiales de ω_1 que se pueden abstraer de los teoremas topológicos. En esta sección damos un panorama de lo que sigue después de esto, esperando que usted se interese. Como referencia, le recomendamos que consulte [10, cap. 8].

Vamos a hablar de dos tipos de subconjuntos de ω_1 que resulta que tienen un papel protagónico: los clubs y los estacionarios.

Definición 9.1. Diremos que $A \subset \omega_1$ es un *club*[16] si es cerrado y no acotado.

Lema 9.2. *Si A y B son clubs de ω_1, entonces $A \cap B$ es un club, y en particular, es un conjunto no vacío.*

[16] Esto viene de que en inglés, «cerrado no acotado» se dice «**CL**osed and **U**n**B**ounded»

Demostración. En primera, la intersección de dos cerrados en un espacio topológico siempre es un cerrado. Entonces basta con probar que $A \cap B$ es no acotado, así que sea $\xi \in \omega_1$ y busquemos un elemento de $A \cap B$ que sea mayor que ξ. La prueba es una recursión en la que construiremos dos sucesiones $\{\alpha_n \colon n < \omega\} \subset A$ y $\{\beta_n \colon n < \omega\} \subset B$ de manera que $\xi < \alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1}$ para toda $n < \omega$.

Empezamos tomando $\alpha_0 = \min\{\alpha \in A \colon \xi < \alpha\}$. Como B no es acotado, existe $\beta_0 = \min\{\beta \in B \colon \alpha_0 < \beta\}$. Recursivamente suponemos que para $m < \omega$ tenemos construidos $\alpha_i \in A$ y $\beta_i \in B$ para todo $i \leq m$, ordenados como queremos. Entonces tomamos $\alpha_{m+1} = \min\{\alpha \in A \colon \beta_m < \alpha\}$ y $\beta_{m+1} = \min\{\beta \in B \colon \alpha_{m+1} < \beta\}$. Esto completa la construcción recursiva.

Por la propiedad 3.7 de ω_1, existen $\alpha = \sup\{\alpha_n \colon n < \omega\} \in \omega_1$ y $\beta = \sup\{\beta_n \colon n < \omega\} \in \omega_1$. Por el lema 5.1, como A y B son cerrados concluimos que $\alpha \in A$ y $\beta \in B$. Pero de la construcción de estas dos sucesiones debe ser claro que $\alpha = \beta$. Entonces concluimos que $A \cap B \cap (\xi, \omega_1) \neq \emptyset$, como queríamos. $\square$

Definición 9.3. Un subconjunto de ω_1 se llama *estacionario* si intersecta a cada club.

Notemos que ω_1 es un conjunto estacionario y que cada conjunto estacionario forzosamente es no acotado. Además, por el lema 9.2, todo club es un conjunto estacionario.

Lema 9.4. *La intersección de un estacionario y un club es un estacionario.*

Demostración. Sean $S \subset \omega_1$ estacionario y $C_0 \subset \omega_1$ un club. Hay que probar que $S \cap C_0$ es estacionario. Para esto, sea $C_1 \subset \omega_1$ otro club. Por el lema 9.2, $C_0 \cap C_1$ es un club así que $S \cap (C_0 \cap C_1) \neq \emptyset$. Pero esto lo podemos escribir como $(S \cap C_0) \cap C_1 \neq \emptyset$, de donde notamos que C_1 intersecta a $S \cap C_0$. $\square$

Existen conjuntos estacionarios que no son clubs, pero con lo que hemos hecho hasta ahora no podríamos demostrarlo en este momento. Sucede que usando la noción de conjuntos estacionarios, se puede probar una generalización de la proposición 7.4.

Teorema 9.5. *([7]) Si $S \subset \omega_1$ es estacionario y $f \colon S \to \omega_1$ es regresiva, existe un conjunto estacionario $T \subset S$ tal que f es constante en T.*

El teorema 9.5 fue probado por el teórico conjuntista húngaro Géza Fodor en 1956. Este resultado ahora se conoce como el «pressing down lemma» o el «lema de Fodor»; como el primer término es un poco difícil de traducir al español, en México se usa más el segundo.

Si usted es como yo, se estará preguntando si el concepto de conjunto estacionario tiene alguna relación con la topología. La respuesta es positiva, y de hecho el matemático William G. Fleissner escribió un artículo [6] en el que se resume esto. Por ejemplo, tenemos el siguiente resultado que relaciona a los conjuntos estacionarios con la metrizabilidad.

Teorema 9.6. *[6, 1.1] Un subespacio $X \subset \omega_1$ es metrizable (es decir, hay una métrica que genera su topología) si y solo si X no es estacionario.*

En vista de la presentación de la plancha de Tychonoff y la plancha de Dieudonné en la sección 8, vale la pena mencionar que ya se han logrado clasificar cuáles pares de subespacios de ω_1 tienen su producto normal, y dicha caracterización depende del concepto de conjunto estacionario. La siguiente caracterización fue probada en 1992 por Kemoto, Ohta y Tamano, pero su demostración es muy larga y se sale de los objetivos de nuestro texto.

Teorema 9.7. *[11] Para $A, B \subset \omega_1$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) A es no estacionario, o B es no estacionario, o $A \cap B$ es estacionario, y
(b) $A \times B$ es normal.

Para concluir este escrito, le dejo a usted un acertijo[17] que está relacionado con estos temas, esperando sea de su interés.

> En cierto lugar existen unas vías de ferrocarril cuyas estaciones son los ordinales en el intervalo $[0, \omega_1]$. Un tren de pasajeros sale de la estación 0, visitando cada estación en orden y terminando su recorrido en la última estación ω_1. En cada estación $\alpha \in [0, \omega_1)$ pasan exactamente dos cosas:
> (1) En caso de que haya pasajeros dentro del tren, exactamente uno de ellos se baja del tren. (Si no hay, no pasa nada.)
> (2) Exactamente $|\alpha|$ pasajeros abordan el tren.
> ¿Cuántos pasajeros llegan a la última estación ω_1?

Agradecimientos

Le agradezco a David Fernández Bretón, Ilán A. Goldfeder y Fernando Hernández Hernández por sus comentarios a versiones anteriores de este escrito

[17]El origen de este acertijo es desconocido por el autor.

Bibliografía

[1] P. Alexandroff y P. Urysohn, «Sur les espaces topologiques compacts», *Bull. Acad. Polon. (A)*, 1924, 5–8.

[2] ———, «Mémoire sur les espaces topologiques compacts», *Verh. Kon. Acad. Weten.*, vol. 1, 1929, 1–96.

[3] R. Benitez y R. G. Wilson, *Topología general*, Editorial Trillas, México, 2017.

[4] L. Conlon, *Differentiable manifolds*, Birkhaüser, 2008.

[5] R. Engelking, *General topology*, 2.ª ed., Sigma Series in Pure Mathematics, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[6] W. G. Fleissner, «Applications of stationary sets in topology», en *Surveys in General Topology*, ed. George M. Reed, Academic Press, 1980, 163–193.

[7] G. Fodor, «Eine bemerkung zur theorie der regressiven funktionen», *Acta Sci. Math.*, vol. 17, 1956, 139–142.

[8] R. Hernández Gutiérrez, *Un curso introductorio de teoría de conjuntos*, 1.ª ed., disponible en línea en la página web del autor, 2022.

[9] F. Hernández Hernández, *Curso de topología: un enfoque conjuntista*, Aportaciones Matemáticas, textos, núm. 43, Instituto de Matemáticas, UNAM, Ciudad de México, 2021.

[10] T. Jech, *Set theory. the third millennium edition, revised and expanded.*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2003, http://doi.org/10.1007/3-540-44761-X.

[11] N. Kemoto, H. Ohta y K.-i. Tamano, «Products of spaces of ordinal numbers», *Topology Appl.*, vol. 45, núm. 3, 1992, 245–260, http://doi.org/10.1016/0166-8641(92)90007-M.

[12] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3.ª ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, Mc.Graw-Hill, Inc, 1976.

[13] S. Watson, «The construction of topological spaces: Planks and resolutions», en *Recent progress in general topology. Papers from the Prague Toposym 1991, held in Prague, Czechoslovakia, Aug. 19-23, 1991.*, eds. Miroslav Hušek *et al.*, North-Holland, 1992, 673–757.