Miscelánea Matemática **33** (2001) 43–55 SMM

Acerca del triángulo de Zhu Shijie

Arturo Mena Lorca
Instituto de Matemáticas
Universidad Católica de Valparaíso
Casilla 4059
Valparaíso, Chile
Chile
amena@ucv.cl

1. Antecedentes históricos.

Es bien conocido el "triángulo"

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
\quad .
$$

(que se supone que se prolonga indefinidamente hacia abajo).

Muchos llaman a esta disposición de números *triángulo de Pascal*, atribución equivocada, como suele ocurrir.

Esta disposición contiene, ordenadamente, los números que usamos en el llamado *teorema del binomio de Newton,* otro error.

En realidad, el filósofo y matemático Blaise Pascal usó este triángulo en el estudio de probabilidades, en una correspondencia con Pierre de Fermat que comienza en 1654, a propósito de cálculo de probabilidades – el triángulo consigna, también en forma ordenada, el número posible de eventos con una determinada condición. (Hay quienes afirman que Pascal padecía de dolor de muelas, y que acostumbraba abstraerse de su dolencia encontrando propiedades interesantes en el triángulo − las hay en cantidad apreciable).

Resulta interesante consignar, además, que Pascal tampoco es, como se acostumbra a decir, el primer matemático que se ocupó de las probabilidades.

En el siglo anterior, Gerolamo Cardano, uno de los mejores matemáticos italianos de entonces, se ocupó seriamente en determinar, por ejemplo, la probabilidad de que una determinada carta de naipe apareciera durante el juego, problema que no sería ajeno a Pascal ni a Fermat. Sin embargo, entre otras afirmaciones, Cardano asevera que esa probabilidad aumenta bastante si en forma previa se unta convenientemente la carta con jabón[1].

El triángulo fue usado también por un contemporáneo y rival (en la resolución de ecuaciones cúbicas por radicales) de Cardano, Niccolò Fontana, más conocido como *Tartaglia* (o también *Tartalea*, pues era tartamudo, debido a una herida de espada que recibió en la mandíbula cuando pequeño).

En realidad, sin embargo, el triángulo aparece el texto *El precioso espejo de los cuatro elementos*, (o *El espejo de jade de las cuatro incógnitas*, como también se ha traducido) del matemático chino *Zhu Shijie*, aparecido en 1303.

En cuanto al teorema del binomio

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots + nab^{n-1} + b^n,$$

el resultado se conoce desde antiguo; el matemático árabe *Al-k$\bar{a}\check{s}\bar{i}$* lo usa en su *Llave de la Aritmética* ($Mift\bar{a}h$ *al-his$\bar{a}$b*), en 1427, sin pretender que es un descubrimiento suyo (él llama "elementos de los exponentes" a los números del triángulo de Zhu Shijie).

Lo que Isaac Newton hizo en sus *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica)*, en 1687, fue ampliar el exponente natural n del teorema a números racionales

[1]Cardano, un personaje notable, fue médico y astrólogo además de matemático, inventó el *cardan* que hoy usan los automóviles. Alguna vez decidió que, en lo posible, debía obtener un beneficio por cada una de sus actividades; tal ganancia podía consistir en avanzar en el conocimiento de algún asunto, pero su afición a los juegos de cartas debía reportarle también alguna utilidad.

cualesquiera, obteniendo tanto sumas finitas como series infinitas. (El resultado está, al pasar, en el libro 1, en el escolio a la proposición 93 del Libro Primero, a propósito del cálculo del área de un semicírculo).

En lo que sigue haremos honor a la historia, y, evitando otras expresiones, nos referiremos al *triángulo de Zhu Shijie*, o, simplemente, el triángulo.

2. El triángulo: primera aproximación.

Si mostramos el triángulo de Zhu Shijie a una persona cualquiera, que vamos a llamar Blas, probablemente observará de inmediato que es simétrico, que tiene sólo números “1” en los “lados” (no en la base) y que la sucesión de los números naturales aparece al interior de los lados; es posible que luego advierta cómo es que se obtiene los números interiores del triángulo, vale decir, se suma los dos números inmediatamente arriba del que se va a escribir.

Posteriormente, es posible que Blas observe, además, que si mira detenidamente una determinada fila, se tiene, (alternativamente), que la suma de todos los números de cada fila es una potencia de 2, o bien, que cada fila es una potencia de 11, según se aprecia a continuación:

	suma	potencia de 11
1	$1 = 2^0$	$1 = 11^0$
1 1	$2 = 2^1$	$11 = 11^1$
1 2 1	$4 = 2^2$	$121 = 11^2$
1 3 3 1	$8 = 2^3$	$1331 = 11^3$
1 4 6 4 1	$16 = 2^4$	$14641 = 11^4$

3. El triángulo: segunda aproximación.

3.1. Los números combinatorios.

Convengamos primero que 0 es un número natural. Tomemos $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$ y escribamos

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Blas se sorprenderá agradablemente al reconocer en esta fórmula los números del triángulo, ordenados convenientemente. Sólo tiene que contar con precisión. Por ejemplo, $\binom{5}{2} = 10$ se encuentra intersectando la fila del 5 (la sexta) con la columna del 2 (la tercera, y un tanto oblicua).

Para llevar mejor la cuenta de filas y columnas, puede serle conveniente anotar el triángulo en forma no-simétrica:

	columnas	0	1	2	3	4	5
filas							
0		1					
1		1	1				
2		1	2	1			
3		1	3	3	1		
4		1	4	6	4	1	
5		1	5	10	10	5	1

Esta notación permite ahora expresar con claridad las propiedades que se aprecia en el triángulo (y que no son, claro está, propiedades del triángulo):

Proposición 1. *Sean* $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$; *entonces:*

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; *simetría*
4. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}; (n, k \geq 1)$; *ley de formación*
5. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Por supuesto, la última propiedad es más difícil de leer. Además, si Blas es perspicaz observará que la propiedad 4 debería haber sido escrita con antelación, tal vez, en primer lugar. (Lo referente a potencias de 11 será postergado, por ahora).

3.2. Heurística de la demostración.

Nuestro buen Blas podrá hacer algunos experimentos y comprobar las afirmaciones anteriores para el caso de números concretos. Más aún, puede habérselas con las fórmulas de manera directa; por ejemplo, puede hacer

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

Ello le mostrará, además, que puede abreviar los enunciados 1 y 2 (si es que no los había hecho antes).

La afirmación 4 ofrecerá mayor resistencia, pero, si el acervo de nuestro invitado contempla el teorema del binomio, escribirá eventualmente

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

3.3. Demostración inductiva.

3.3.1. Excurso.

Es un paso importante darse cuenta de cuándo se requiere hacer demostraciones recursivas y cuándo son ellas evitables. Uno de los ingredientes consiste en saber, realmente, desde dónde empiezan demostración y enunciado.

Blas podría hacer buen uso, por ejemplo, de una pregunta al estilo de

¿Cuál es el número que sigue en la sucesión $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$?

que, en este caso particular, podría ser el número 1811040006 (pues estaba pensando en la 'ley'

$$15092000\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5) + n$$

(aquí se considera el orden tradicional, de los números naturales desde el 1, para no estorbar eventualmente el ejemplo).

Por el contrario, cuando presentamos la lista (que puede completarse hacia arriba)

$$\begin{array}{rcl} 5^2 & = & 25 \\ 15^2 & = & 125 \\ 25^2 & = & 625 \\ 35^2 & = & 1225 \end{array}$$

se puede colegir que, siguiendo la ley de formación, para hacer 75^2 basta tomar $7 \times 8 = 56$ y agregar 25 al final: 5625, y hacer una conjetura conveniente al respecto. Aquí, la inducción no es indispensable, pues se trata de la fórmula

$$(10n + 5)^2 = 100n\,(n + 1) + 25,$$

que es válida para todo número real n.

(Se podría también en ocasiones recurrir a una variable continua para una afirmación de variable discreta. Por ejemplo, que se cumple $2^x > x^2 + 17$ a partir de algún $x > 0$ es más fácil de demostrar para números reales que naturales $-$ si bien es cierto que el caso discreto se puede tratar "antes").

En cualquier caso, nuestro sufrido Blas puede colegir, a propósito de la pregunta inicial de esta sección, que el enunciado de la proposición es más confiable que el triángulo que dibuja.

3.3.2. Inducción finita.

El hacer o al menos sugerir la demostración inductiva de nuestra proposición relativa al triángulo de Zhu Shijie tiene como subproducto la organización de las diferentes propiedades: es claro que las propiedades 1 y 2 se abrevian usando la número 3; la demostración de la 5 depende de la del teorema del binomio y por tanto de la 4; pero, además, cuando se quiera comenzar la inducción, habrá que recurrir siempre a la regla de formación, que debería ser la primera en la lista de propiedades (y, qué curioso que el cociente $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ sea siempre un número natural - cosa no tan evidente de demostrar sin la regla de formación).

4. Aproximación conjuntística.

En analogía con aquellos concursos en que se pide descubrir una melodía en un mínimo de compases, podríamos proponer ahora *enunciar* *la demostración* de cada "propiedad del triángulo" *en una sola palabra.*

Ello requiere de una mirada más de conjunto.

4.1. Un "nuevo" triángulo.

Podemos recurrir al concepto de conjunto de las partes de un conjunto dado A y hacer el cálculo correspondiente siguiendo la disposición sugerida por los siguientes casos:

	0	1	2	3	4	5
0	$\varnothing$					
1	$\varnothing$	$\{a\}$				
2	$\varnothing$	$\{a\}$ $\{b\}$	$\{a,b\}$			
3	$\varnothing$	$\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$	$\{b,c\}$ $\{a,c\}$ $\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$		
4	$\varnothing$	$\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{d\}$	$\{a,b\}$ $\{a,c\}$ $\{a,d\}$ $\{b,c\}$ $\{b,d\}$ $\{c,d\}$	$\{b,c,d\}$ $\{a,c,d\}$ $\{a,b,d\}$ $\{a,b,c\}$	$\{a,b,c,d\}$	
5	$\varnothing$	$\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{d\}$ $\{e\}$	$\{a,b\}$ $\{a,c\}$ $\{a,d\}$ $\{a,e\}$ $\{b,c\}$ $\{b,d\}$ $\{b,e\}$ $\{c,d\}$ $\{c,e\}$ $\{d,e\}$	$\{c,d,e\}$ $\{b,d,e\}$ $\{b,c,e\}$ $\{b,c,d\}$ $\{a,d,e\}$ $\{a,c,e\}$ $\{a,c,d\}$ $\{a,b,e\}$ $\{a,b,d\}$ $\{a,b,c\}$	$\{b,c,d,e\}$ $\{a,c,d,e\}$ $\{a,b,d,e\}$ $\{a,b,c,e\}$ $\{a,b,c,d\}$	$\{a,b,c,d,e\}$

Se podría observar atentamente esta tabla, y concluir que, dado un conjunto A con n elementos, si cuenta los subconjuntos de A que tienen exactamente k elementos, obtiene precisamente $\binom{n}{k}$ de ellos; en otras palabras, ha reproducido, nuevamente, el triángulo de Zhu Shijie.

De acuerdo a lo que se observa en la tabla de arriba, cada vez que se elige k elementos de A, quedan $n-k$ elementos 'sobrantes'; esto es, cada vez que se elige un subconjunto B de A se elige, inevitablemente, su complemento $A-B$ (lo que explica el orden en el que se escribió los subconjuntos en la última tabla). De manera que es obvio que el número de subconjuntos de A que tienen (exactamente) k elementos es igual al número de subconjuntos de A que tienen (exactamente) $n-k$ elementos. Es decir, *la demostración* de la propiedad 3, esto es, la simetría $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, requiere 'sólo' del concepto de *complemento* de un subconjunto de un conjunto dado.

Resulta ahora más directo que con el cálculo numérico que se tenga, por ejemplo, $\binom{n}{0} = 1$ (pues no hay más que un conjunto vacío), $\binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n$, etc.

Ahora bien, cuando se suma

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

se está contando *todos los subconjuntos de* A, que son, en total, 2^n.

De manera que *la demostración* de la propiedad 5 requiere 'sólo' del concepto de conjunto *potencia*.

4.2. Cardinal del conjunto potencia.

A propósito, sería interesante realizar la demostración de que el cardinal del conjunto de las partes de un conjunto finito A es $2^{|A|}$, es decir,

Proposición 2. *Si A es un conjunto finito de cardinal n, entonces*
$|\mathbb{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^n$.

Demostración: Para cada subconjunto B de A definimos la "función característica" ψ_B de B de la siguiente manera:

$$\psi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

Así, tenemos una función $\Psi : \mathbb{P}(A) \to \{f : A \to \{0,1\} : f \text{ es función}\}$.

Ahora bien, cada función $f : A \to \{0,1\}$ define el conjunto $B = \{x \in A : f(x) = 1\}$, y por lo tanto Ψ es sobreyectiva; además, si $B \neq B'$, es obvio que se tiene $\psi_B \neq \psi_{B'}$.

Por lo tanto, Ψ es biyectiva, y, en consecuencia

$$|\mathbb{P}(A)| = |\{f : A \to \{0,1\} : f \text{ es función}\}| = 2^{|A|} .$$

$\square$

Se observará, sin duda, que este resultado se basa en uno anterior. Lo importante, nos parece, es que Blas registre que la afirmación $|\mathbb{P}(A)| = 2^{|A|}$ recoge un hecho bastante *natural.* (Además, él puede tal vez aventurar que la misma demostración le serviría para conjuntos infinitos).

Blas podría querer intentar probar primero la siguiente afirmación para, desde allí volver al cardinal de las partes de A:

Proposición 3. *Si A es un conjunto finito de cardinal $n, k \leq n$, y*
$\mathbb{P}_k(A) = \{X \in \mathbb{P}(A) : |X| = k\}$, *entonces*
$|\mathbb{P}_k(A)| = \binom{n}{k}$

Ello requeriría de inducción. El paso crucial del argumento está, una vez más, en la ley de formación del triángulo, es decir, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Ahora bien, aceptada la relación anterior, ella nos indica cómo contar los conjuntos en $\mathbb{P}_k(A)$: si $A = A' \cup \{b\}$, donde $|A'| = n-1$ y, (por lo tanto), $b \notin A'$, para obtener los subconjuntos de A que tienen k elementos, hay que contar por separado los que contienen a b y luego los que no lo contienen:

Se toman los conjuntos de A' que (ya) tienen k elementos, que son $\binom{n-1}{k}$, y se añaden los conjuntos de A' que tienen $k-1$ elementos, a cada uno de los cuales se agrega b.

5. El triángulo visto como listado de potencias.

5.1. El "etcétera" de Newton.

El gran Isaac Newton hizo la misma observación sobre las potencias de 11 que anotamos al comienzo: la segunda fila tiene escrito el número 11; la tercera tiene $121 = 11^2$ y así, sucesivamente...

Parece que Newton pensó que, como se tiene que $11^3 = 11^2 \times 11$, por tanto, para hacer 11^3 hay que escribir, según el método abreviado de multiplicación,

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 2 & 1 \\ + & 1 & 2 & 1 & \\ \hline & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

similarmente, para hacer $11^4 = 11^3 \times 11$, se escribe

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ + & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ \hline & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

Lo único que sucede, entonces, es que se está siguiendo la regla de formación del triángulo, y, anotándola tal vez de otra manera. En cualquier caso, Newton examinó hasta la quinta fila, la del 4, y escribió a continuación "&c ", que es la manera en que entonces se abreviaba *et caetera.*

El problema es que, para $11^5 = 11^4 \times 11$, se tiene

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ + & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ \hline & 1 & 6 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{array}$$

de manera que parece que Newton se equivocó, por no haberse acordado de la *suma con reserva* ("me reservo 1", "llevo 1"...). Sin embargo, como quiera que estamos hablando de Newton, es mejor que dejemos la decisión al lector tal vez para después de la siguiente sección.

5.2. Bases de numeración.

Como se sabe, el sistema de numeración que nosotros usamos es el posicional de base 10. Así, cuando escribimos, por ejemplo, 3425, estamos anotando

$$3000 + 400 + 80 + 7, \text{ es decir, } 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10 + 5.$$

Para enfatizar que estamos usando base 10, podemos anotar $3425_{(10}$ (si no declaramos una base, sub-entendemos que se trata de la base 10).

Si anotamos en otra base, con los mismos dígitos señalamos otro número. Por ejemplo,

$3425_{(6} = 3 \times 6^3 + 4 \times 6^2 + 2 \times 6 + 5 = 3 \times 216 + 4 \times 36 + 2 \times 6 + 5 = 809_{(10}$

Por supuesto, si estamos trabajando, por ejemplo, en base 6, los dígitos que cuentan son $0, 1, 2, 3, 4, 5$; de otra forma, tendríamos errores inútiles de notación.

Por ejemplo, si quisiéramos escribir $n = 3485_{(6}$, tendríamos, en realidad,

$n = 3 \times 6^3 + 4 \times 6^2 + 8 \times 6 + 5 = 3 \times 6^3 + 4 \times 6^2 + (6+2) \times 6 + 5 =$

$3 \times 6^3 + (4 \times 6^2 + 6 \times 6) + 2 \times 6 + 5 = 3 \times 6^3 + 5 \times 6^2 + 2 \times 6 + 5,$
y deberíamos haber escrito $n = 3525_{(6}$.

Recordemos ahora que Newton, considerando los números en base 10, encontró que cada fila registraba las potencias de 11. Una conjetura natural podría ser, entonces, la siguiente (de acuerdo a la descripción anterior):

Conjetura 1. Si consideramos el triángulo en base b, en tanto cuanto no excedamos la base de numeración, tendremos escritas, en las filas, las potencias de $b+1$.

Hagamos algunos experimentos:

Si la base es 5, tenemos sucesivamente

$1_{(5} = 1 = 6^0$

$11_{(5} = 1 \times 5 + 1 = 6 = 6^1$

$121_{(5} = 1 \times 5^2 + 2 \times 5 + 1 = 36 = 6^2$

$1331_{(5} = 1 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 3 \times 5 + 1 = 216 = 6^3$

Nuestro experimento termina allí, pues ya en la siguiente fila excedemos la base de numeración y estaríamos escribiendo incorrectamente. Podemos intentar con bases mayores que 10, con análogo resultado.

Un caso interesante sería tomar precisamente $b = 11$. Para no tener inconvenientes de notación, tenemos que introducir un dígito adicional para anotar 10; usaremos K, como suele hacerse para los números de identidad, o de pasaporte (en algunos países). Tal notación nos alcanza ahora hasta la sexta fila, la del 5, según se comprueba de inmediato. Deberíamos tener escritos, hasta esa fila, sólo potencias de 12. Veamos:

$1_{(11} = 1 = 12^0$

$11_{(11} = 1 \times 11 + 1 = 12 = 12^1$

$121_{(11} = 1 \times 11^2 + 2 \times 11 + 1 = 144 = 12^2$

$1331_{(11} = 1 \times 11^3 + 3 \times 11^2 + 3 \times 11 + 1 = 1{,}728 = 12^3$

$14641_{(11} = 1 \times 11^4 + 4 \times 11^3 + 6 \times 11^2 + 4 \times 11 + 1 = 20.736 = 12^4$

$15KK51_{(11} = 1 \times 11^5 + 5 \times 11^4 + 10 \times 11^3 + 10 \times 11^2 + 5 \times 11 + 1 =$
$248.832 = 12^5$

En fin, los ejemplos son sugerentes.

El teorema general es un tanto difícil de enunciar con entera precisión (note que, cada vez que agregamos una nueva fila, es mayor el número de bases que salen de competencia), pero es un ejercicio saludable.

6. Comentario.

Como se sabe, es frecuente que las fábulas de Esopo (y otras) terminen en una enseñanza moral. Uno no puede escapar a la sensación de que tales *moralejas* sean añadidos posteriores, que arruinan la poesía de la fábula propiamente dicha. En este caso, bien o mal, se ha tratado un hermoso tema, y, con alguna reticencia, añadimos algunos comentarios.

El tema tratado es especialmente instructivo respecto de lo que se acostumbra a llamar *matemática moderna* y la matemática antigua.

El triángulo de Zhu Shijie nos sirve para ilustrar que la oposición entre moderna y antigua, además de irrelevante y lingüísticamente discutible, puede ser inconveniente. Nuestro caso presenta, por el contrario, un interesante vaivén: el triángulo permite ver directamente las fórmulas elementales de los números combinatorios; el tratamiento de conjuntos se apoya en esa mirada, le da solidez y la amplía; el triángulo se reviste de mayor significado (si se nos permite la expresión); algunas propiedades conjuntísticas no están ya en la memoria RAM sino a la vista...

Incluso, nos parece que un alumno al que se le propone el tema se dará inevitablemente cuenta, por ejemplo, de por qué Pascal y Fermat usaban el triángulo en su discusión acerca de probabilidades.

Hay por lo general varias estrategias para abordar el estudio de un tema. A menudo, una de las más interesantes consiste precisamente en poner un pie en la historia.

Referencias

[1] Ivor Grattann-Guinness, The Norton history of mathematical sciences, *W. W. Norton & Co.*, New York, 1998.

[2] Morris Kline, Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford, University Press, 1972.

[3] Morris Kline, Mathematics in Western Civilisation, Oxford, University Press, 1972.

[4] Adolf P. Youschkevitch, Les mathématiques arabes (VII-XVe. siècles), Librairie Philosophique Vrin, Paris, 1976.