Miscelánea Matemática **48** (2009) 1–6 SMM

Las medias como promedios ponderados

Alfinio Flores Peñafiel

University of Delaware

alfinio@math.udel.edu

Resumen

Tres de las medias que se usan frecuentemente en matemáticas (media cuadrática, media geométrica, y media armónica) se obtienen como promedios ponderados utilizando ciertos segmentos paralelos a las bases de un trapecio.

1. Una interpretación geométrica de promedios ponderados

La media aritmética de dos números a y b es simplemente $\frac{a+b}{2}$, pero cuando uno de los números se repite, como cuando queremos obtener el promedio de a, a, a, b, necesitamos obtener el promedio ponderado $\frac{3a+b}{4}$. En esta expresión los coeficientes de a y b nos dan el peso de cada número y el denominador es la suma total de los pesos. En este artículo vamos a considerar números a y b que satisfacen $0 < a \leq b$. El segmento que une los puntos medios de los lados de un trapecio con bases a y b da una interpretación geométrica de la media aritmética de dos números $\frac{a+b}{2}$. Si tomamos un segmento que equidiste de este segmento y una de las bases, podemos encontrar su longitud tomando el promedio del segmento paralelo medio y la base correspondiente, por ejemplo (Figura 1)

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{a+b}{2}\right) = \frac{3a+b}{4}.$$

Para el segmento en la cuarta parte inferior de la altura su longitud sería $\frac{a+3b}{4}$. Vemos que la longitud de los nuevos segmentos está dada por un promedio ponderado de los dos números a y b. El peso que corresponde a una de las bases es menor si el segmento está más lejos de esta base que de la otra.

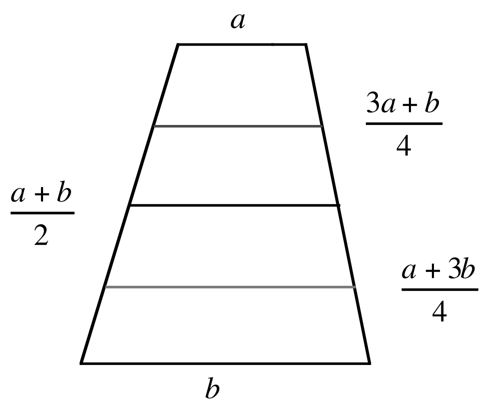

Figura 1: Promedios ponderados

En general, si la distancia de un segmento paralelo a la base a es n, y la distancia a la base b es m (Figura 2), el peso correspondiente a a será m y el peso correspondiente a b será n. La longitud del segmento está dada por

$$\frac{ma+nb}{m+n} \tag{1}$$

Para probar esto, denotamos por x la longitud del segmento, expresamos el área total del trapecio como la suma de las áreas de los dos trapecios menores, $n\frac{a+x}{2}+m\frac{b+x}{2}=\frac{a+b}{2}(m+n)$, y encontramos x. O sea que para un segmento dado paralelo a las bases, si h_a es la altura del trapecio que contiene a a, y h_b es la altura del trapecio que contiene a b, entonces los pesos p_a and p_b asociados con a y b satisfacen la relación inversa

$$\frac{h_a}{h_b}=\frac{p_b}{p_a}. \tag{2}$$

Notamos que si reemplazamos m y n por km y kn en la expresión (1) no se cambia su valor. Esto es, para bases dadas a y b, y un cierto valor de la razón $\frac{h_a}{h_b}$ entre las alturas de los trapecios menores, el valor correspondiente de x será el mismo para cualquier trapecio con bases a y b, y la misma razón de las alturas $\frac{h_a}{h_b}$, independientemente de la altura del trapecio original. Otra manera de pensar acerca de esto es imaginar que si un trapecio se estira uniformemente en la dirección vertical tal transformación no afectará las longitudes de los segmentos horizontales. O sea que no necesitamos saber las alturas de los trapecios menores, todo lo que necesitamos saber es su razón. Dada esta razón, la longitud del segmento se puede calcular como un promedio ponderado de a y b.

Los pesos para a y b pueden ser cualesquiera dos valores que satisfagan la ecuación (2).

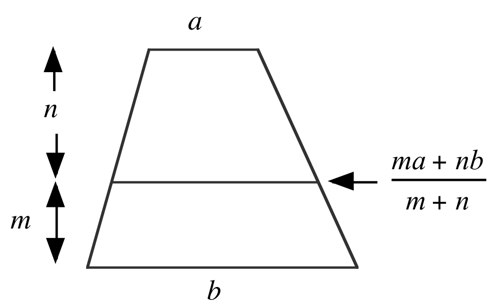

Figura 2: Pesos y alturas

2. Áreas iguales

Un segmento paralelo a las bases que es interesante es el que divide el trapecio en dos trapecios de áreas iguales (Figura 3). Si las bases son a y b, la longitud x de este segmento satisface $h_a \frac{a+x}{2} = h_b \frac{b+x}{2}$, o equivalentemente $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b+x}{a+x}$. Por tanto el peso asociado con a sería $a+x$, el peso asociado con b sería $b+x$, y tenemos que $x = \frac{(a+x)a+(b+x)b}{(a+x)+(b+x)}$. Resolviendo la ecuación obtenemos $2x^2 = a^2 + b^2$, o $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Este número es llamado la media cuadrática de los dos números a y b.

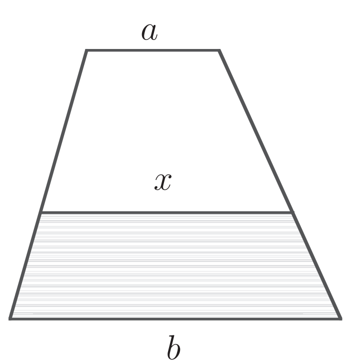

Figura 3: Áreas iguales

3. Dos trapecios semejantes

Otro segmento paralelo a las bases que es interesante es el que divide el trapecio original en dos trapecios que son semejantes entre sí. Las alturas de los dos trapecios menores son proporcionales a sus bases mayores, kx y kb (Figura 4).

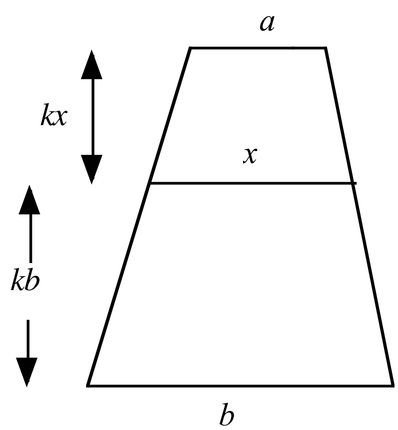

Figura 4: Trapecios semejantes

El segmento x es así un promedio ponderado de a y b donde el peso de a es b, y el peso de b es x, y por tanto $x = \frac{ba+xb}{x+b}$. Resolviendo la ecuación obtenemos $x^2 = ab$, o $x = \sqrt{ab}$. Esta es la media geométrica de a y b. Desde luego, dada la semejanza de los trapecios podemos comparar las bases y ver que la longitud x del segmento satisface $\frac{b}{x} = \frac{x}{a}$.

4. Intersección de las diagonales

Otro segmento paralelo a las bases que es interesante es el que pasa por la intersección de las diagonales del trapecio (Figura 5). Los triángulos ABE y DCE son semejantes. Sus alturas son proporcionales a las bases del trapecio. Podemos hacer que el peso de b sea a y el peso de a sea b. La longitud del segmento es as $\frac{ab+ba}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$. Este número es la media armónica de los dos números a y b.

Otro segmento interesante paralelo a las bases pasa donde la media armónica se obtiene como un promedio ponderado, por ejemplo, al calcular la velocidad promedio de un objeto que atraviesa la misma distancia d una vez con velocidad a y la segunda vez con velocidad b.

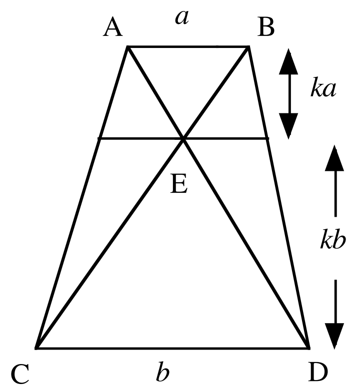

Figura 5: Segmento por la interesección de las diagonales

La velocidad promedio será

$$\frac{2d}{\frac{d}{a}+\frac{d}{b}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab+ba}{a+b}. \tag{3}$$

Como el objeto pasa más tiempo viajando a la velocidad menor, el valor de esta velocidad tendrá un peso mayor. Podemos ver en la ecuación (3) que el peso de a es b y el peso de b es a.

5. Comentarios finales

Desde luego, la idea de usar un trapecio para representar las diferentes medias no es nueva (Beckenbach y Bellman 1975). Colocando todos los segmentos en el mismo trapecio (Figura 6) podemos ver fácilmente el orden entre las diferentes medias

$$a \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq b.$$

Si pensamos en términos de los pesos podemos lograr una comprensión adicional de este orden. Para $a \leq b$, las razones de los pesos para las medias armónica, geométrica, aritmética, y cuadrática satisfacen

$$\frac{a}{b} \leq \frac{x}{b} \leq 1 \leq \frac{b+y}{a+y},$$

donde tanto x como y son números entre a y b. Las razones de los pesos $\frac{p_b}{p_a}$ para las diferentes medias nos permiten entender de otra manera por qué la media armónica es la más cercana al menor de los dos números,

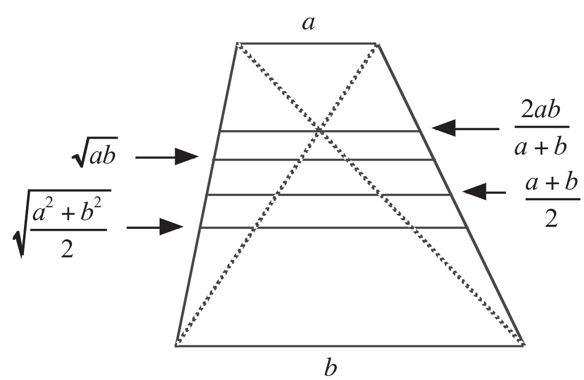

Figura 6: Varias medias

por qué la media geométrica está entre la media armónica y la media aritmética, y por qué la media cuadrática está más cerca del mayor de los dos números.

Referencias

[1] Beckenbach, E. y Bellman, R. (1975). *An introduction to inequalities.* Washington, DC: Mathematical Association of America.