

Clasificación de 1-variedades largas

Ahtziri González Lemus

Facultad de Ingeniería Eléctrica
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
ahtziri.lemus@umich.mx,

Reynaldo Rojas Hernández

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
reynaldo.hernandez@umich.mx

y

Víctor Arnulfo Ponce Chávez

Facultad de Ingeniería Eléctrica
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
1217683a@umich.mx

1. Introducción

La noción de variedad fue usada por primera vez por B. Riemann en 1851, aunque la definición actual fue introducida hasta 1912 por H. Weyl [7]. Una n -variedad es un espacio topológico Hausdorff que es localmente homeomorfo al espacio euclidiano \mathbb{R}^n , lo que permite aplicar en ella muchas de las estrategias y los resultados de \mathbb{R}^n . Usualmente en la definición se agrega la condición de segundo numerable, para que así las variedades sean metrizables.

Las variedades son muy importantes en matemáticas, en física e incluso para otras áreas de la ciencia. Es por ello que sería muy útil tener una clasificación completa de las variedades, es decir, poder identificar si dos variedades tienen o no la misma forma (son homeomorfas entre sí). Existen diferentes maneras de clasificar las 1-variedades; en [12, 6] se usan herramientas de topología diferencial, en [11] se utilizan complejos CW y en [3, 4] se usan técnicas topológicas. Las 2-variedades o superficies, fueron clasificadas en dos etapas. Primero, K. Weierstrass clasificó las superficies compactas en 1861 y después, B. Kerékjártó clasificó las superficies no compactas en 1923 [10]. La clasificación de las

3-variedades es un tema muy activo en topología. Para $n \geq 4$, la clasificación de las n -variedades es un problema que no se puede resolver.

En tiempos recientes las variedades que no son segundo numerables están tomando relevancia en otras áreas de las matemáticas, es por ello que comienzan a aparecer trabajos importantes acerca de estas [13, 1, 5]. Para $n \geq 2$, no se tiene una clasificación completa de las n -variedades no segundo numerables. Sobre la clasificación de 1-variedades de tamaño arbitrario, la única referencia que encontramos es de 1962 de Z. Frolík [2]. En ella solo se consideran 1-variedades no compactas y sin frontera y se clasifican utilizando técnicas de teoría de conjuntos.

En este texto utilizamos órdenes lineales para dar una clasificación de las 1-variedades de tamaño arbitrario con y sin frontera. El tema nos pareció interesante ya que las pruebas son accesibles, ejemplifica cómo con herramientas básicas se puede probar un resultado importante, es una muestra de la interrelación que existe entre elementos de diferentes áreas de las matemáticas y deja de manifiesto la influencia que tienen las propiedades locales de un espacio en su estructura global. Finalizamos mencionando que escribimos este artículo asumiendo que el lector tiene los conocimientos de topología correspondientes a un primer curso de licenciatura.

2. 1-variedades

En todo el trabajo denotamos con $(0, 1)$, $[0, 1)$, $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ a los intervalos usuales y para distinguirlos de los intervalos abiertos, escribimos los pares ordenados como $\langle a, b \rangle$. Por «espacio» nos referimos a un espacio topológico.

Sean X un espacio, $U \subset X$ abierto y $\varphi : U \rightarrow [0, 1]$ un encaje, es decir, φ es continua, inyectiva y tiene inversa continua.

- (1) $\langle U, \varphi \rangle$ es *carta interior* si $\varphi(U) = (0, 1)$.
- (2) $\langle U, \varphi \rangle$ es *carta frontera* si $\varphi(U) = [0, 1)$.

Decimos que $\langle U, \varphi \rangle$ es *carta* si es carta interior o carta frontera. Cuando $\langle U, \varphi \rangle$ es carta frontera, decimos que $\varphi^{-1}(0)$ es *punto frontera* de X .

Definición 2.1. Un espacio conexo y Hausdorff M es una *1-variedad*, si se cumple que

$$M = \bigcup \{U : \langle U, \varphi \rangle \text{ es carta de } M\}.$$

De forma intuitiva, las 1-variedades son espacios topológicos que localmente percibimos como «curvas continuas». A lo largo del texto denotamos con M a una 1-variedad. Cuando M no tiene puntos frontera, decimos que M es *1-variedad sin frontera*. En caso contrario, la llamamos *1-variedad con frontera*.

Ejemplo 2.2. Dos ejemplos clásicos de variedades son:

- (a) El círculo unitario $\mathbb{S}^1 = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : \| \langle x, y \rangle \| = 1 \}$ es 1-variedad sin frontera. Se pueden inducir cartas usando $f(t) = e^{it} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$.
- (b) El intervalo $[0, \infty)$ en \mathbb{R} es una 1-variedad con frontera, puesto que $f(t) = t/(1+t)$ es un homeomorfismo de $[0, \infty)$ en $[0, 1)$.

Proposición 2.3. Si x es punto frontera de M y $\langle V, \psi \rangle$ es una carta interior, entonces $x \notin V$.

Demostración. Sabemos que $x = \varphi^{-1}(0)$ para alguna carta frontera $\langle U, \varphi \rangle$. Supongamos que $x \in V$. Por un lado, V es homeomorfo a $(0, 1)$. Por otro lado, podemos suponer que $V \subset U$. Se sigue que $\varphi(V)$ es una vecindad abierta y conexa de 0 en $[0, 1)$. Esto implica que $\varphi(V)$ y V son homeomorfos a $[0, 1)$, lo que es una contradicción. \square

3. Conjuntos ordenados y la recta larga

Los conjuntos ordenados linealmente, como \mathbb{N} , \mathbb{Q} o \mathbb{R} , se pueden pensar intuitivamente como «líneas o curvas», ya sea continuas o punteadas, donde la posición determina un cierto orden. Cuando dichos órdenes son «continuos» obtenemos una relación entre los órdenes lineales en conjuntos y las 1-variedades.

3.1 Conjuntos ordenados

Definición 3.1. Un *orden lineal* en un conjunto L es una relación \leq que es reflexiva, antisimétrica, transitiva y tal que,

$$\text{si } a, b \in L, \text{ entonces } a \leq b \text{ o } b \leq a.$$

Por «orden» y «conjunto ordenado» nos referimos a un orden lineal y a un conjunto con un orden. En lo sucesivo L denota un conjunto con un orden \leq . Escribimos $a < b$ si $a \leq b$ y $a \neq b$. Si $a \in L$, entonces

- (1) $(-\infty, a)_L = \{ b \in L : b < a \}$ es un **segmento inicial**.
- (2) $(a, \infty)_L := \{ b \in L : a < b \}$ es un **segmento final**.

Un **segmento exterior** es un segmento que es inicial o final.

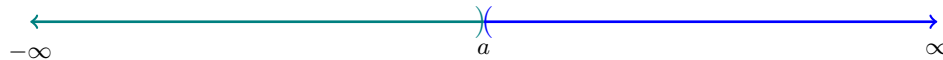


Figura 1. Segmentos exteriores de un conjunto ordenado.

Cada uno de los intervalos $(a, b)_L$, $[a, b)_L$, $[a, b]_L$, $(a, b]_L$, $[a, \infty)_L$, $(-\infty, b]_L$ y $(-\infty, \infty)_L$ se define del modo habitual. Cuando sea claro quién es L , omitiremos el subíndice. Las nociones de máximo, mínimo, supremo e ínfimo de un subconjunto de L también son las usuales.

La **topología del orden** en L es la que tiene como subbase a los segmentos exteriores. Siempre asumimos que L lleva su topología del orden. Si L no tiene puntos extremos, ni máximo ni mínimo, entonces la topología en L tiene como base a los intervalos abiertos.

Los conjuntos ordenados tienen diferentes «formas», es decir, diferentes tipos no homeomorfos entre sí. Por ejemplo, pueden ser líneas continuas como \mathbb{R} , líneas punteadas como \mathbb{Q} , sucesiones de puntos como $\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, etcétera.

Decimos que el orden \leq en el conjunto L es:

- (1) **denso** si para cada $a < b \in L$ existe $c \in L$ con $a < c < b$.
- (2) **completo** si L tiene la propiedad del supremo, es decir, si todo subconjunto de L no vacío y acotado superiormente tiene supremo.
- (3) **separable** si el espacio L tiene un subconjunto denso numerable.
- (4) **bueno** si cada $A \subset L$ no vacío, tiene elemento mínimo.

Ejemplo 3.2. El orden usual \leq en \mathbb{R} es denso, completo, separable y sin puntos extremos, pero no es bueno.

Si \leq es orden en L y \preceq es orden en P , una biyección $f : L \rightarrow P$ es **isomorfismo de orden** si $f(a) \preceq f(b)$ si y solo si $a \leq b$. Los isomorfismos de orden nos permiten determinar si dos conjuntos ordenados tienen formas iguales, en particular, un isomorfismo de orden entre dos conjuntos ordenados es un homeomorfismo. Por ejemplo, la función $t \mapsto t/(1+t)$ es un isomorfismo de orden de $[0, \infty)$ en $[0, 1)$.

Observación 3.3. Usaremos de manera implícita los siguientes hechos:

- (a) La topología del conjunto ordenado L es Hausdorff.
- (b) Las topologías inducidas en L por \leq y por su orden reverso \preceq coinciden, donde \preceq está definido como $a \preceq b$ si $b \leq a$, para $a, b \in L$.
- (c) Si \leq es denso e $I \subset L$ es un intervalo, entonces las topologías del orden restringido y de subespacio de L coinciden para I .

En 1895 Georg Cantor caracterizó a los conjuntos de números racionales \mathbb{Q} y reales \mathbb{R} como conjuntos ordenados. A continuación probaremos estos importantes resultados ya que nos permiten considerar las cartas de una 1-variedad como conjuntos ordenados.

Teorema 3.4. Si L es numerable y tiene un orden \preceq que es denso y sin puntos extremos, entonces L es isomorfo a \mathbb{Q} .

Demostración. Sea \leq el orden de \mathbb{Q} y consideremos enumeraciones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de L y \mathbb{Q} , respectivamente. Usaremos recursión para definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, un isomorfismo de orden $f : L_n \rightarrow Q_n$, donde $L_n \subset L$ y $Q_n \subset \mathbb{Q}$ son finitos.

• **Paso 0.** Sean $L_0 = \{a_0\}$, $Q_0 = \{0\}$ y $f_0 : L_0 \rightarrow Q_0$ la única biyección.

• **Paso n .** Supongamos que para $k \leq n$ se han definido isomorfismos de orden $f_k : L_k \rightarrow Q_k$, donde $L_k \subset L$ y $Q_k \subset \mathbb{Q}$ son finitos, tales que:

- (a) $f_k \upharpoonright_{L_m} = f_m$ para cada $0 < m < k$.
- (b) $\{a_0, \dots, a_k\} \subset L_n$ y $\{q_0, \dots, q_k\} \subset Q_n$.

• **Paso $n + 1$.** Tomemos $m_0 = \min\{m : a_m \notin L_n\}$. Como $Q_n \subset \mathbb{Q}$ es finito, \mathbb{Q} no tiene puntos extremos y \leq es denso, existe $q_{m_0} \in \mathbb{Q} \setminus Q_n$ tal que, para cada $q \in Q_n$, $q_{m_0} \leq q$ si y solo si $a_{m_0} \preceq f_n^{-1}(q)$. Ahora tomemos $m_1 = \min\{m : q_m \notin Q_n \cup \{q_{m_0}\}\}$. Como $L_n \subset L$ es finito, L no tiene puntos extremos y \preceq es denso, existe $a_{m_1} \in L \setminus (L_n \cup \{a_{m_0}\})$ tal que, para cada $a \in L_n \cup \{a_{m_0}\}$, $a_{m_1} \preceq a$ si y solo si $q_{m_1} \leq f(a)$. Tomemos $L_{n+1} = L_n \cup \{a_{m_0}, a_{m_1}\}$, $Q_{n+1} = Q_n \cup \{q_{m_0}, q_{m_1}\}$ y $f_{n+1} : L_{n+1} \rightarrow Q_{n+1}$ la extensión de f_n que envía a_{m_i} en q_{m_i} para $i = 0, 1$. Entonces f_{n+1} es isomorfismo de orden y (a) y (b) se cumplen para $k \leq n + 1$.

De la recursión obtenemos una sucesión de isomorfismos de orden $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que cumple (a) y (b) para cada $k \in \mathbb{N}$. Como consecuencia $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$ es isomorfismo de orden y además se cumple que $L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ y $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$. \square

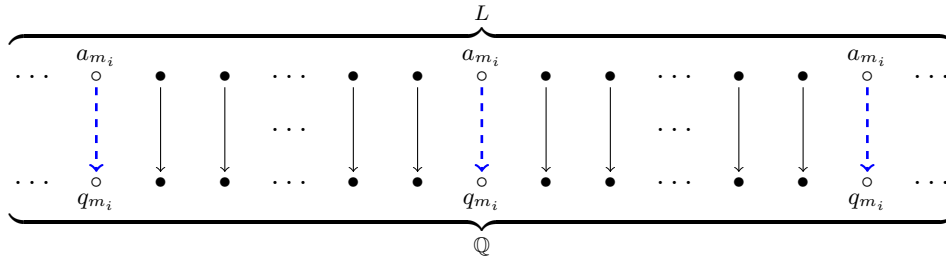


Figura 2. Construcción de la función $f_{n+1} : L_{n+1} \rightarrow Q_{n+1}$.

Teorema 3.5. Si \leq es un orden en L que es denso, separable, completo y sin puntos extremos, entonces L es isomorfo a \mathbb{R} .

Demostración. Sea $L_0 \subset L$ un subconjunto denso numerable. Como conjunto ordenado, L_0 no tiene puntos extremos. Por el teorema 3.4 existe un isomorfismo de orden $f : L_0 \rightarrow \mathbb{Q}$. Extendemos f a un isomorfismo de orden $F : L \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue: Para $a \in L$, definimos

$$F(a) = \sup\{f(b) : b \in L_0, b \leq a\}.$$

Entonces F está bien definida, preserva el orden, es inyectiva y extiende a f . Para ver que F es sobreyectiva, tomemos $t \in \mathbb{R}$ y notemos que $a = \sup\{f^{-1}(q) : q \in \mathbb{Q}, q \leq t\} \in L$ está bien definido y $t = F(a)$. \square

Como consecuencia de estos resultados podemos caracterizar los órdenes lineales «continuos» en términos de sus puntos extremos.

Corolario 3.6. Sea \leq un orden denso, separable y completo en L .

- (a) Si L no tiene ningún extremo, entonces L es isomorfo a $(0, 1)$.
 (b) Cuando L tiene un único extremo, L es isomorfo a $[0, 1)$ o $(0, 1]$.
 (c) Si L tiene ambos extremos, entonces L es isomorfo a $[0, 1]$.

3.2 Números ordinales y ω_1

Introduciremos de manera breve al primer número ordinal no numerable, el cual será necesario para definir la recta larga. Para un estudio más completo se pueden consultar [8] y [9].

Al construir los números naturales usando conjuntos, es «natural» considerar al 0 como el único conjunto sin elementos, es decir, $0 = \emptyset$; al 1 como un conjunto con un único elemento, $1 = \{0\}$; al 2 como un conjunto con dos elementos, $2 = \{0, 1\}$; y así sucesivamente. Los números naturales n así obtenidos, tienen las siguientes propiedades:

- (\in) La relación \leq en n definida como $k \leq m$ si $k \in m$ o $k = m$, es un buen orden, es decir, el orden está inducido por la pertenencia.
 (T) Si $\gamma \in \beta \in \alpha$, entonces $\gamma \in \alpha$.

Un **número ordinal** es un conjunto que satisface las propiedades (\in) y (T). Los números naturales son precisamente los números ordinales finitos. Sin embargo, existen muchísimos números ordinales que no son finitos. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales \mathbb{N} también es un número ordinal; a \mathbb{N} como número ordinal lo denotamos por ω . De manera más general, se cumplen las siguientes propiedades que permiten construir muchos más números ordinales.

- (1) Si α es un número ordinal, entonces $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ también es un número ordinal.
- (2) Si A es un conjunto de números ordinales, entonces $\bigcup A$ también es un número ordinal.

Dado un número ordinal α , la propiedad (1) permite definir el número ordinal $\alpha + n$ como: $\alpha + 0 = \alpha$ y $\alpha + (n + 1) = (\alpha + n) + 1$. La propiedad (2) permite definir el número ordinal $\alpha + \omega = \bigcup_{n < \omega} \alpha + n$. También, podemos obtener los números ordinales $n\omega$ que se definen como como $0\omega = 0$ y $(n + 1)\omega = n\omega + \omega$. Además, podemos considerar el número ordinal $\omega^2 = \omega \cdot \omega = \bigcup_{n < \omega} n\omega$ y muchos otros números ordinales más.

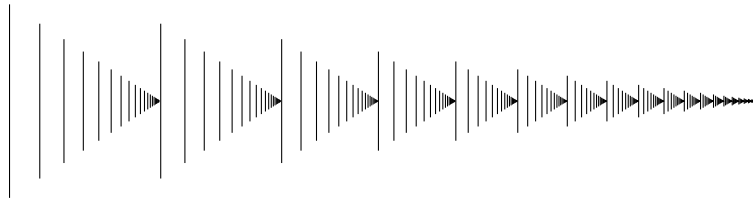


Figura 3. Representación del ordinal ω^2 . Cada línea vertical representa un ordinal de la forma $n\omega + m$, donde $n, m \in \omega$.

Las propiedades (1) y (2) permiten seguir construyendo números ordinales de manera indefinida y de tamaño arbitrario. Nosotros estamos interesados en el **primer número ordinal no numerable**, el cual podemos definir como sigue (figura 4),

$$\omega_1 := \bigcup \{ \alpha : \alpha \text{ es un número ordinal numerable} \}.$$

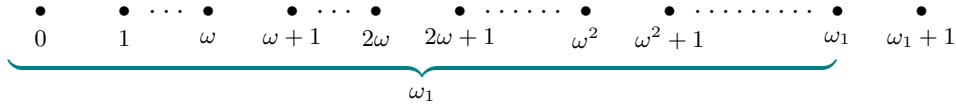


Figura 4. Representación de algunos números ordinales, incluyendo ω_1 .

Observación 3.7. Notemos que ω_1 tiene las siguientes propiedades.

- (a) $\min \omega_1 = 0$ y $\alpha + 1 \in \omega_1$ para cada $\alpha \in \omega_1$.
- (b) ω_1 no es numerable, pues de lo contrario tendríamos que $\omega_1 \in \omega_1$.
- (c) Como el orden en ω_1 es bueno y todo mínimo es ínfimo, ω_1 tiene la propiedad del ínfimo y, por ende, la propiedad del supremo.
- (d) Dado $\alpha \in \omega_1$, por (\in) , su conjunto de predecesores $\{ \beta \in \omega_1 : \beta \leq \alpha \}$ es numerable.

Al igual que en el conjunto \mathbb{N} , el buen orden \leq en ω_1 permite hacer demostraciones inductivas y construcciones recursivas de longitud ω_1 .

Teorema 3.8. *Sea A un subconjunto de ω_1 . Si*

- (a) $0 \in A$ y
 - (b) $\alpha \in A$ siempre que $\beta \in A$ para cada $\beta < \alpha$,
- entonces $A = \omega_1$.

Demostración. Supongamos que $\omega_1 \setminus A \neq \emptyset$ y sea $\mu = \min \{ \omega_1 \setminus A \}$. La condición (a) implica que $\mu > 0$. Además, por la elección de μ tenemos que $\beta \in A$ para cada $\beta < \mu$, así (b) implica que $\mu \in A$, lo que nos lleva a una contradicción. \square

3.3 La recta larga

Definiremos la recta larga y probaremos que es 1-variedad. Para ilustrar la construcción, presentamos un modo alternativo de ver a \mathbb{R} como conjunto ordenado.

Observación 3.9. Obtenemos \mathbb{R} a partir de \mathbb{N} como sigue. Sean $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ los números naturales positivos. Añadimos a \mathbb{N} los números naturales negativos $-\mathbb{N}^+ = \{\dots, -3, -2, -1\}$, obteniendo a los números enteros $\mathbb{Z} = -\mathbb{N}^+ \cup \mathbb{N}$. Tomamos

$$R := [-\mathbb{N}^+ \times (-1, 0] \cup [\{0\} \times (-1, 1) \cup [\mathbb{N}^+ \times [0, 1)],$$

con el orden lexicográfico, véase la figura 5. Notemos que la asignación $\langle n, t \rangle \mapsto n + t$ es un isomorfismo de orden de R en \mathbb{R} .

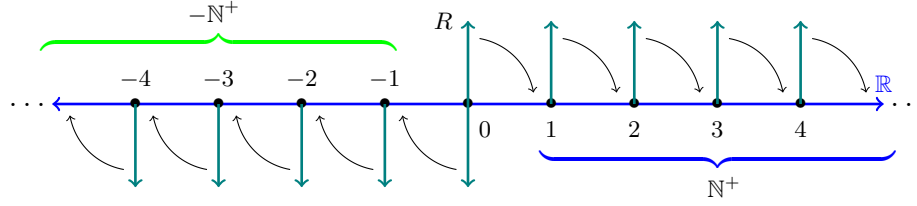


Figura 5. El isomorfismo entre R y \mathbb{R} .

Construiremos la recta larga mediante un proceso semejante al de la Observación 3.9. Denotamos $\mathbb{N}_{\omega_1} = \omega_1$ y lo llamamos los *naturales largos*. Sea $\mathbb{N}_{\omega_1}^+ = \mathbb{N}_{\omega_1} \setminus \{0\}$ y tomemos un conjunto $-\mathbb{N}_{\omega_1}^+$ ajeno con \mathbb{N}_{ω_1} tal que exista una biyección $- : \mathbb{N}_{\omega_1}^+ \rightarrow -\mathbb{N}_{\omega_1}^+$. Denotaremos a $-(\alpha)$ como $-\alpha$. Consideremos en $-\mathbb{N}_{\omega_1}^+$ el orden reverso al inducido por la función $-$, es decir,

$$-\alpha \leq -\beta \quad \text{si y solo si} \quad \beta \leq \alpha.$$

Definimos los *enteros largos* como $\mathbb{Z}_{\omega_1} := -\mathbb{N}_{\omega_1}^+ \oplus \mathbb{N}_{\omega_1}$, donde \oplus denota la suma de conjuntos ordenados, es decir, en \mathbb{Z}_{ω_1} los órdenes en $-\mathbb{N}_{\omega_1}^+$ y \mathbb{N}_{ω_1} se conservan y cada elemento de $-\mathbb{N}_{\omega_1}^+$ es menor o igual a cada elemento de \mathbb{N}_{ω_1} . El orden del conjunto \mathbb{Z}_{ω_1} seguirá siendo denotado por \leq . Extendemos la biyección $-$ a \mathbb{Z}_{ω_1} tomando $-(0) = 0$ y $-(-\alpha) = \alpha$. Continuaremos escribiendo $-\alpha$ en lugar de $-(\alpha)$.

Observación 3.10. Los enteros largos \mathbb{Z}_{ω_1} satisfacen lo siguiente.

- Cualquier subconjunto numerable de \mathbb{Z}_{ω_1} es acotado.
- Todo intervalo $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{Z}_{\omega_1}$ es numerable.
- El orden en \mathbb{Z}_{ω_1} es completo, pues es la unión de dos subconjuntos ordenados completos, ver Observación 3.7(c).
- La función $- : \mathbb{Z}_{\omega_1} \rightarrow \mathbb{Z}_{\omega_1}$ es isomorfismo de orden de \mathbb{Z}_{ω_1} entre \mathbb{Z}_{ω_1} con su orden reverso.

Definición 3.11. La *recta larga* es el conjunto

$$\mathbb{R}_{\omega_1} := [-\mathbb{N}_{\omega_1}^+ \times (-1, 0]_{\mathbb{R}} \cup [\{0\} \times (-1, 1)_{\mathbb{R}}] \cup [\mathbb{N}_{\omega_1}^+ \times [0, 1)_{\mathbb{R}}]$$

con el orden lexicográfico, que denotaremos como \leq .

Intuitivamente, la recta larga se obtiene agregando a ω_1 los números ordinales «negativos» y llenando cada «hueco» entre dos números ordinales consecutivos con un intervalo, véase la figura 6.

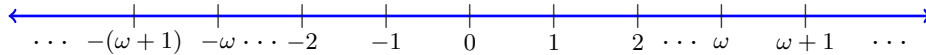


Figura 6. Representación geométrica de la recta larga \mathbb{R}_{ω_1} .

La notación \leq para el orden en \mathbb{R}_{ω_1} no debería causar confusión, ya que extiende al orden de \mathbb{Z}_{ω_1} y al orden de $(-1, 1)_{\mathbb{R}}$. Denotamos con

$\alpha + t$ al par ordenado $\langle \alpha, t \rangle \in \mathbb{R}_{\omega_1}$ e identificamos a $\alpha + 0$ con α . Con esta notación, el orden \leq en \mathbb{R}_{ω_1} se ve como sigue:

$$\alpha + t \leq \beta + s, \text{ si } \alpha < \beta \text{ o si } \alpha = \beta \text{ y } t \leq s.$$

Observación 3.12. El conjunto ordenado \mathbb{R}_{ω_1} cumple lo siguiente:

- (a) \mathbb{R}_{ω_1} no tiene puntos extremos.
- (b) Todo subconjunto numerable de \mathbb{R}_{ω_1} es acotado.
- (c) El orden en \mathbb{R}_{ω_1} es denso.
- (d) Un subconjunto denso de \mathbb{R}_{ω_1} es:

$$\mathbb{Q}_{\omega_1} = \{\alpha + t \in \mathbb{R}_{\omega_1} : \alpha \in \mathbb{Z}_{\omega_1} \text{ y } t \in \mathbb{Q} \cap (-1, 1)_{\mathbb{R}}\}.$$

- (e) La función $- : \mathbb{R}_{\omega_1} \rightarrow \mathbb{R}_{\omega_1}$ dada por $-(\alpha + t) := -\alpha + (-t)$ es isomorfismo de orden entre \mathbb{R}_{ω_1} y \mathbb{R}_{ω_1} con su orden reverso.

Al espacio \mathbb{Q}_{ω_1} del inciso (d) lo llamamos los *racionales largos* y, los incisos (a), (b) y (c) implican que \mathbb{Q}_{ω_1} no es numerable. Procedemos a caracterizar los intervalos abiertos en la recta larga.

Proposición 3.13. Si $a, b \in \mathbb{R}_{\omega_1}$ y $a < b$, entonces el intervalo $(a, b)_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$ es isomorfo al intervalo $(0, 1)_{\mathbb{R}}$.

Demostración. Por simpleza denotamos $(a, b) = (a, b)_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$ y para $\alpha + t \in \mathbb{R}_{\omega_1}$, $[\alpha + t] = \alpha$. Por el Teorema 3.5, basta probar que el orden en (a, b) es denso, separable, completo y sin puntos extremos.

- (a) Como el orden de \mathbb{R}_{ω_1} es denso, el orden de (a, b) también es denso y además (a, b) no tiene puntos extremos.
- (b) Como \mathbb{Q}_{ω_1} es denso en \mathbb{R}_{ω_1} , $\mathbb{Q}_{\omega_1} \cap (a, b)$ es denso en (a, b) . Además, (a, b) es separable, ya que

$$\mathbb{Q}_{\omega_1} \cap (a, b) \subset \{\alpha + t \in (a, b) : \alpha \in [[a], [b]]_{\mathbb{Z}_{\omega_1}} \text{ y } t \in (-1, 1)_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Q}\},$$

y este conjunto es numerable pues $[[a], [b]]_{\mathbb{Z}_{\omega_1}}$ y $(-1, 1)_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Q}$ lo son.

- (c) Para verificar que (a, b) tiene la propiedad del supremo, tomemos $A \subset (a, b)$ y d una cota superior del conjunto A en (a, b) . Si

$$\sigma = \sup\{[d] : d \in A\} \text{ y } A_{\sigma} = \{t \in (-1, 1)_{\mathbb{R}} : \sigma + t \in A\},$$

entonces $\sup(A) = \sigma$ si $A_{\sigma} = \emptyset$ y $\sup(A) = \sigma + \sup A_{\sigma}$ si $A_{\sigma} \neq \emptyset$. \square

La observación 3.12(e) y la proposición 3.13 nos permiten clasificar los intervalos en la recta larga.

Corolario 3.14. Si $a, b \in \mathbb{R}_{\omega_1}$ con $a < b$, entonces

- (a) $[a, b)_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$ es isomorfo a $[0, 1)_{\mathbb{R}}$.
- (b) $(a, b]_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$ es isomorfo a $(0, 1]_{\mathbb{R}}$.
- (c) $[a, b]_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$ es isomorfo a $[0, 1]_{\mathbb{R}}$.
- (d) $(a, \infty)_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$ es isomorfo a $(0, \infty)_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$.
- (e) $[a, \infty)_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$ es isomorfo a $[0, \infty)_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$.

Además, $(a, b]_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$, $(-\infty, a]_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$ y $(-\infty, a)_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$ son isomorfos, respectivamente, a $[0, 1]_{\mathbb{R}}$, $[0, \infty)_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$ y $(0, \infty)_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$ con sus órdenes reversos.

Por fin estamos listos para mostrar que \mathbb{R}_{ω_1} es 1-variedad.

Ejemplo 3.15. La recta larga es una 1-variedad sin frontera que no es segundo numerable.

Demostración. Para cada $\alpha < \omega_1$ tomemos $U_\alpha = (-\alpha, \alpha)$ y fijemos un homeomorfismo $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow (0, 1)$. Como los pares $\langle U_\alpha, \varphi_\alpha \rangle$ son cartas interiores, $\mathbb{R}_{\omega_1} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} U_\alpha$ es conexo ya que es unión creciente de conjuntos conexos, así \mathbb{R}_{ω_1} es 1-variedad. Como todo subconjunto numerable de \mathbb{R}_{ω_1} es acotado, \mathbb{R}_{ω_1} no tiene subconjuntos densos numerables y por lo tanto \mathbb{R}_{ω_1} no tiene bases numerables. \square

Ejemplo 3.16. Como en el ejemplo anterior, se puede verificar que el intervalo $[0, \infty)_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$ es 1-variedad con frontera y no segundo numerable.

El siguiente resultado es crucial para clasificar las 1-variedades ya que caracteriza a los conjuntos ordenados que son isomorfos a intervalos en la recta larga. Comparar con el Corolario 3.6.

Teorema 3.17. Si L tiene un orden denso, completo, en el que sus intervalos acotados son separables y tal que su topología es primero numerable, entonces L es isomorfo a un intervalo en \mathbb{R}_{ω_1} .

Demostración. (1) Supongamos primero que L tiene mínimo m , pero no tiene máximo. Para construir el isomorfismo de orden deseado, para cada $\alpha < \omega_1$ definiremos un isomorfismo de orden $f_\alpha : [m, a_\alpha) \rightarrow [0, \xi_\alpha)$, donde $a_\alpha \in L \cup \{\infty\}$ y $\xi_\alpha \in \omega_1$, como sigue:

- **Paso 0.** Tomemos $a_0 \in L$ tal que $m < a_0$. Por el corolario 3.6 existe un isomorfismo de orden $f_0 : [m, a_0) \rightarrow [0, 1)$.

- **Paso $< \alpha$.** Supongamos que $0 < \alpha \in \omega_1$ y para cada $\beta < \alpha$ se han construido isomorfismos de orden $f_\beta : [m, a_\beta) \rightarrow [0, \xi_\beta)$ tales que:

(a) $\{a_\beta\}_{\beta < \alpha} \subset L$ y $\{\xi_\beta\}_{\beta < \alpha} \subset \mathbb{R}_{\omega_1}$ son crecientes.

(b) $f_\beta \upharpoonright_{[0, a_\delta)} = f_\delta$ para cada $\delta < \beta < \alpha$.

- **Paso α .** Notemos que $\bigcup_{\beta < \alpha} [m, a_\beta) = [m, b_\alpha)$, donde $b_\alpha = \infty$ o $b_\alpha = \sup\{a_\beta\}_{\beta < \alpha}$, y que $g_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} f_\beta : [m, b_\alpha) \rightarrow [0, \zeta_\alpha)$ es isomorfismo de orden, donde $\zeta_\alpha = \sup\{\xi_\beta\}_{\beta < \alpha}$. Si $b_\alpha = \infty$, tomemos $a_\alpha = b_\alpha$, $\xi_\alpha = \zeta_\alpha$ y $f_\alpha = g_\alpha$. Si $b_\alpha = \sup\{a_\beta\}_{\beta < \alpha}$, tomemos $a_\alpha \in (b_\alpha, \infty)$. Por el Corolario 3.6 existe un isomorfismo de orden $h_\alpha : [b_\alpha, a_\alpha) \rightarrow [\zeta_\alpha, \zeta_\alpha + 1)$. En este caso tomamos $\xi_\alpha = \zeta_\alpha + 1$ y definimos el isomorfismo de orden $f_\alpha : [m, a_\alpha) \rightarrow [0, \xi_\alpha)$ como:

$$f_\alpha(a) = \begin{cases} g_\alpha(a) & \text{si } a \in [m, \zeta_\alpha), \\ h_\alpha(a) & \text{si } x \in [\zeta_\alpha, \xi_{\alpha+1}). \end{cases}$$

Notemos que (a) y (b) se cumplen reemplazando α con $\alpha + 1$.

Terminada la construcción, notemos que (a) y (b) se cumplen para $\alpha = \omega_1$. Entonces $\bigcup_{\alpha < \omega_1} [m, a_\alpha) = [m, \infty) = L$, pues en caso contrario $\sup\{a_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ es estrictamente creciente y L no es primero numerable en $a = \sup\{a_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$, lo que contradice las hipótesis. Además, tenemos que $f = \bigcup_{\alpha < \omega_1} f_\alpha : L \rightarrow [0, \xi)$ es isomorfismo de orden, donde $\xi = \infty$ o $\xi = \sup\{\xi_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$. Por lo tanto, el resultado es cierto en el caso (1).

(2) Cuando L tiene máximo pero no mínimo, el resultado se sigue del caso (1) tomando el orden inverso.

(3) Si L no tiene máximo ni mínimo, entonces el resultado se sigue de los casos (1) y (2).

(4) Cuando L tiene máximo y mínimo, el resultado es consecuencia del corolario 3.6. \square

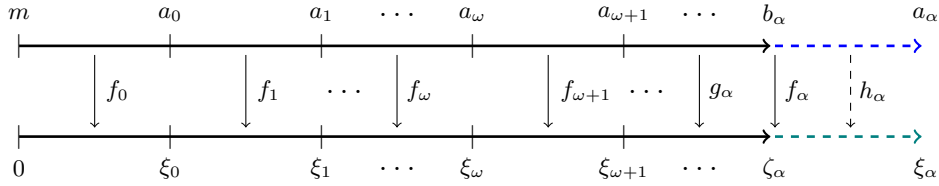


Figura 7. Construcción del isomorfismo $f_\alpha : [m, a_\alpha) \rightarrow [0, \xi_\alpha)$.

Observación 3.18. Si $C \subset \mathbb{R}_{\omega_1}$ es conexo y no vacío, entonces C es alguno de los intervalos (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$ o $[a, b]$ donde $a = -\infty$ o $a = \inf C$ y $b = \infty$ o $b = \sup C$. Podemos aplicar el Corolario 3.14 para ver que C es homeomorfo a alguno de los intervalos $(0, 1)$, $[0, 1]$, $(0, 1]$, $(0, \infty)$, $[0, \infty)$ o $(-\infty, \infty)$ en \mathbb{R}_{ω_1} .

4. Clasificación de las 1-variedades

Para clasificar las 1-variedades, considerando las cartas de la 1-variedad M como conjuntos ordenados, veremos que el orden se puede extender sobre las uniones finitas de cartas hasta ordenar toda la 1-variedad. Después, utilizamos los resultados previamente demostrados para determinar todas las posibles 1-variedades que existen. Para esto necesitamos comprender cómo pueden ser las intersecciones entre cartas de una 1-variedad.

En lo sucesivo $\langle U, \varphi \rangle$ y $\langle V, \psi \rangle$ denotan cartas en M . Decimos que U y V se *traslapan* si $U \cap V$, $U \setminus V$ y $V \setminus U$ son no vacíos.

Observación 4.1. Si $L = (0, 1)$ o $L = [0, 1]$, entonces un intervalo abierto propio en L es un segmento exterior de L homeomorfo a $(0, 1)$, si y solo si contiene una sucesión sin puntos límite en L .

Observación 4.2. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V \cap U$ y $x \in V \setminus U$ tal que $x_n \rightarrow x$. Como M es Hausdorff, $\{\varphi(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene puntos límite en $\varphi(U)$.

El siguiente resultado muestra la idea intuitiva de que las cartas que se traslapan se intersectan en sus orillas.

Lema 4.3. Si U y V se traslapan y W es componente conexa de $U \cap V$, entonces $\varphi(W) \subset \varphi(U)$ y $\psi(W) \subset \psi(V)$ son segmentos exteriores.

Demostración. Como $\psi(W)$ es abierto y conexo en el intervalo $\psi(V) \subset \mathbb{R}$, $\psi(W)$ es un intervalo abierto propio de $\psi(V)$. De forma similar, $\varphi(W)$ es un intervalo abierto propio en $\varphi(U)$. Tomemos $\{\psi(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \psi(W)$ y $\psi(x) \in \psi(V) \setminus \psi(W)$ tales que $\psi(x_n) \rightarrow \psi(x)$. Luego, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W$, $x \in V \setminus W$ y $x_n \rightarrow x$. Si $x \in U$, entonces $W \cup \{x\} \subset U \cap V$ es conexo, lo cual no es posible debido a la maximalidad de W ; por lo tanto $x \notin U$. La observación 4.2 implica que $\{\varphi(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \varphi(W)$ no tiene puntos límite en $\varphi(U)$. Por último, la observación 4.1 implica que $\varphi(W)$ es un segmento exterior de $\varphi(U)$ homeomorfo a $(0, 1)$. \square

Corolario 4.4. Supongamos que U y V se traslapan. Si $\langle U, \varphi \rangle$ y $\langle V, \psi \rangle$ son cartas interiores, entonces $U \cap V$ tiene a lo más dos componentes. Si $\langle U, \varphi \rangle$ o $\langle V, \psi \rangle$ es carta frontera, entonces $U \cap V$ es conexo.

4.1 Caracterización del círculo

La única 1-variedad a la que no es posible otorgarle un orden es el círculo \mathbb{S}^1 . Es por ello que dedicamos esta sección a dar una caracterización del círculo en términos de sus cartas.

Teorema 4.5. Si M admite cartas $\langle U, \varphi \rangle$ y $\langle V, \psi \rangle$ tales que $U \cap V$ es desconexo, entonces $M = U \cup V$ y es homeomorfa al círculo \mathbb{S}^1 .

Demostración. Notemos que U y V se traslapan. Por el corolario 4.4, $\langle U, \varphi \rangle$ y $\langle V, \psi \rangle$ son cartas interiores y $U \cap V$ tiene dos componentes conexas Z y W . Podemos suponer que $\varphi(W), \psi(Z) \subset (0, 1)$ son segmentos inferiores y $\varphi(Z), \psi(W) \subset (0, 1)$ son segmentos superiores. Sean

$$a = \sup \varphi(W), a' = \inf \varphi(Z), b = \sup \psi(Z) \text{ y } b' = \inf \psi(W).$$

Tomemos $l = 1 + (b' - b)$ y sean

$$u(t) = 2t/l \quad \text{y} \quad v(t) = u(1 + t - b) : [b, b'] \rightarrow [2/l, 2].$$

Consideremos los encajes

$$f(t) = e^{i\pi u(t)} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{S}^1 \quad \text{y} \quad g(t) = e^{i\pi v(t)} : [b, b'] \rightarrow \mathbb{S}^1.$$

Definamos $\gamma : U \cup V \rightarrow \mathbb{S}^1$ como:

$$\gamma(x) = \begin{cases} f \circ \varphi(x) & \text{si } x \in U, \\ g \circ \psi(x) & \text{si } x \in V \setminus U. \end{cases}$$

Sean $h(t) = e^{i\pi u(t)} : (a', a'+2) \rightarrow \mathbb{S}^1$ y \preceq el orden en $N = h((a', a'+2)) = \mathbb{S}^1 \setminus f(a')$ inducido por h . Notemos que

$$\gamma(V) = (f(a'), g(b))_N \cup [g(b), g(b')]_N \cup (g(b'), f(a))_N = (f(a'), f(a))_N.$$

Usando la observación 4.2 podemos ver que $h^{-1} \circ \gamma \circ \psi^{-1}$ y $\gamma \circ \psi^{-1}$ son isomorfismos de orden. Así, $\gamma \circ \psi^{-1}$ y $\gamma \upharpoonright_U$ son encajes. Como $\gamma \upharpoonright_U$ también es encaje, el Lema del pegado implica que $\gamma : U \cup V \rightarrow \mathbb{S}^1$ es homeomorfismo. Luego, $U \cup V$ es compacto y por conexidad, $M = U \cup V$. \square

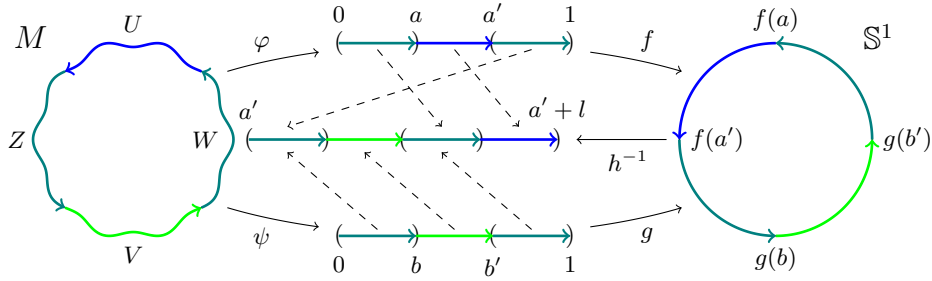


Figura 8. La 1-variedad M es homeomorfa a \mathbb{S}^1 .

4.2 Clasificación de las 1-variedades

Para clasificar las 1-variedades, dadas dos cartas $\langle U, \varphi \rangle$ y $\langle V, \psi \rangle$ en M , necesitamos saber cómo extender un orden en U que genera su topología a un orden en $U \cup V$ que también genere su topología.

Observación 4.6. Si $\langle U, \varphi \rangle$ es carta en M y \leq es un orden en U que induce su topología, entonces \leq es denso, separable y completo. Además, el corolario 3.6 y el teorema del valor intermedio implican que $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ preserva o invierte el orden en U .

Lema 4.7. Sean $\langle U, \varphi \rangle$ y $\langle V, \psi \rangle$ cartas en M con $U \cap V$ conexo y no vacío. Si \leq es orden en U e induce su topología, entonces \leq se extiende a un orden denso, separable y completo en $U \cup V$ que genera su topología.

Demostración. Supongamos primero que U y V se traslapan. Sea $W = U \cap V$ y supongamos que φ y ψ son tales que $\varphi(W) \subset \varphi(U)$ y $\psi(W) \subset \psi(V)$ son intervalos superiores. Tomemos $a = \inf \varphi(W)$ y $b = \inf \psi(W)$. Definamos $\gamma : U \cup V \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in U; \\ 1 + b - \psi(x) & \text{si } x \in V \setminus U. \end{cases}$$

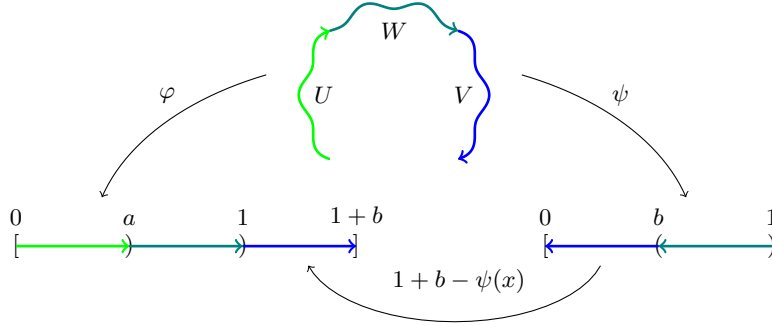


Figura 9. Extension del orden de U a $U \cup V$.

Por un lado, $\gamma|_U$ es un encaje. Por otro lado, $\gamma(V) \subset (a, 1+b]$ es un intervalo denso. Podemos usar la observación 4.2 para ver que $\gamma \circ \psi^{-1}$ es un isomorfismo de orden entre $\psi(V)$ y su imagen con su orden reverso. Se sigue que $\gamma \circ \psi^{-1}$ y $\gamma|_V$ son encajes. El lema del pegado implica que γ también es un encaje. Luego, tanto el orden \preceq inducido por γ en $U \cup V$ como su orden reverso generan la topología de $U \cup V$. Por la observación 4.6, φ preserva o invierte el orden. Por lo tanto, o bien \preceq o su orden reverso es una extensión del orden \leq .

Si U y V no se traslapan, entonces la prueba se sigue directamente de la observación 4.6. \square

Del resultado anterior y el corolario 3.6 deducimos lo siguiente.

Corolario 4.8. Si $\langle U, \varphi \rangle, \langle V, \psi \rangle$ son cartas en M , $U \cap V$ es conexo y no vacío y $Z = U \cup V$, entonces:

- (a) $M = Z$ y M es homeomorfo a $[0, 1]$ cuando Z es compacto.
- (b) Existe $\phi : Z \rightarrow [0, 1]$ tal que $\langle Z, \phi \rangle$ es carta si Z no es compacto.

Teorema 4.9. Toda 1-variedad M es homeomorfa a \mathbb{S}^1 o a un intervalo en la recta larga.

Demostración. Consideremos la siguiente cubierta de M :

$$\mathcal{U} = \{U \subset M : \langle U, \varphi \rangle \text{ es carta en } M\}.$$

Cuando existen $U, V \in \mathcal{U}$ tales que $U \cap V$ no es conexo, el teorema 4.5 implica que $U \cup V$ es homeomorfa a \mathbb{S}^1 . Cuando existen $U, V \in \mathcal{U}$ tales que $U \cap V$ es conexo y $U \cup V$ es compacto, el corolario 4.8(a) implica que M es homeomorfa a $[0, 1]$.

Supongamos que M no es homeomorfa ni a \mathbb{S}^1 ni a $[0, 1]$. Se sigue que $U \cap V$ es conexo y $U \cup V$ no es compacto para cada $U, V \in \mathcal{U}$ con $U \cap V \neq \emptyset$.

\emptyset . Por el teorema 3.17 basta construir un orden \preceq en M que es denso, completo, en el que sus intervalos acotados son separables, y que induce su topología. Fijemos $U_0 \in \mathcal{U}$. Decimos que $\mathcal{C} = \{U_0, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ es cadena si $U_{i-1} \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \leq n$ y tomamos $U_{\mathcal{C}} = \bigcup_{i=0}^n U_i \in \mathcal{U}$. Notemos que dos cadenas se pueden unir para formar otra cadena. Fijemos un orden \preceq_0 en U_0 que induzca su topología. Por el corolario 4.8(b) y el lema 4.7, para cada cadena $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$ podemos extender \preceq_0 a un orden $\preceq_{\mathcal{C}}$ en $U_{\mathcal{C}}$ que induce su topología. Definamos \preceq en M como:

$$x \preceq y \text{ si } x \preceq_{\mathcal{C}} y \text{ para alguna cadena } \mathcal{C} \subset \mathcal{U} \text{ tal que } x, y \in U_{\mathcal{C}}.$$

Probaremos que \preceq está bien definido. Por un lado, supongamos que $x \preceq_{\mathcal{C}} y$ para dos cadenas $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathcal{U}$. Como $W = U_{\mathcal{C}} \cap U_{\mathcal{D}}$ es conexo, la función identidad $id : (W, \preceq_{\mathcal{C}}) \rightarrow (W, \preceq_{\mathcal{D}})$ preserva o invierte el orden. Pero $U_0 \subset W$ y los órdenes $\preceq_{\mathcal{C}}$ y $\preceq_{\mathcal{D}}$ coinciden con \preceq_0 sobre U_0 , por lo que id preserva el orden. Por lo tanto, $x \preceq_{\mathcal{C}} y$ si y solo si $x \preceq_{\mathcal{D}} y$. Por otro lado, tanto $U = \bigcup \{U_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} = \{U_0, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U} \text{ es cadena}\}$ como $M \setminus U$ son abiertos. La conexidad de M implica que $U = M$. De esto deducimos que \preceq está definido en todo M .

No es complicado convencernos de que \preceq es un orden en M que induce su topología. La conexidad de M implica que \preceq es denso. Notemos que si $x, y \in U_{\mathcal{C}}$ para alguna cadena $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$, entonces la conexidad de M implica que $(x, y)_{U_{\mathcal{C}}} = (x, y)_M$ y $[x, y]_{U_{\mathcal{C}}} = [x, y]_M$. Esto implica que cada intervalo acotado en M es separable. Para ver que \preceq es completo, sea $A \subset M$ no vacío y acotado. Tomando $x \in A$, una cota superior y de A y una cadena $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$ tal que $x, y \in U_{\mathcal{C}}$. Como $[x, y]_{U_{\mathcal{C}}} = [x, y]_M$ y el $\preceq_{\mathcal{C}}$ es completo, se cumple que $\sup A = \sup(A \cap U_{\mathcal{C}})$. \square

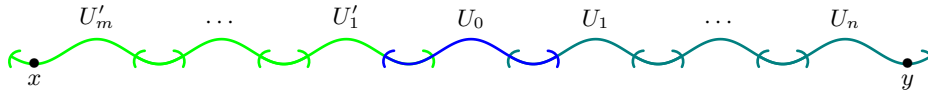


Figura 10. Extendiendo el orden de U_0 a M .

4.3 Conclusiones

Del teorema 4.9 y la observación 3.18 obtenemos el cuadro 1 con la clasificación de las 1-variedades. Las propiedades en dicho cuadro indican porqué las 1-variedades en celdas diferentes no son homeomorfas. Los espacios \mathbb{R}_{ω_1} y $(0, \infty)_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$ no son homeomorfos ya que en el primero toda sucesión tiene una subsucesión convergente, mientras que el segundo no tiene esta propiedad.

No existen más 1-variedades de las mencionadas en el cuadro 1. Por ejemplo, si intentamos extender la construcción de la recta larga hasta $\omega_1 + 1$, el espacio que se obtiene no es primero numerable en ω_1 y por lo tanto no es una 1-variedad, véase el teorema 3.17.

1-variedades	con frontera	sin frontera
Compactas	$[0, 1]$	\mathbb{S}^1
Segundo numerables no compactas	$[0, 1)$	$(0, 1)$
No segundo numerables	$[0, \infty)_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$	\mathbb{R}_{ω_1} y $(0, \infty)_{\mathbb{R}_{\omega_1}}$

Cuadro 1. Clasificación de las 1-variedades.

Bibliografía

- [1] D. Fernández-Bretón y N. G. Vlamis, «Ends of non-metrizable manifolds: A generalized bagpipe theorem», *Topology and its Applications*, vol. 310, 2022, 108017.
- [2] Z. Frolík, «On the classification of 1-dimensional manifolds», *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica*, vol. 3, núm. 1, 1962, 1–4.
- [3] D. Fuks y V.A.Rokhlin, *Beginner's course in topology*, Springer-Verlag, 1984.
- [4] D. Gale, «The classification of 1-manifolds: A take-home exam», *The American Mathematical Monthly*, vol. 94, núm. 2, 1987, 170–175.
- [5] D. B. Gauld, *Non-metrisable manifolds*, Springer, Singapore, 2014.
- [6] V. Guillemin y A. Pollack, *Differential topology*, Prentice-Hall, 1974.
- [7] W. Hermann, *Die idee der riemannschen fläche*, Reinhold Remmert, 1997.
- [8] R. Hernández Gutiérrez, «El primer infinito no numerable y su topología», *Miscelánea Matemática*, vol. 77, 2023, 35–58.
- [9] F. Hernández Hernández, *Teoría de conjuntos. una introducción*, 2.^a ed., Instituto de Matemáticas, UNAM, 2019.
- [10] B. Kerékjártó, *Vorlesungen über topologie*, 1.^a ed., Springer Berlin, Heidelberg, 1923.
- [11] J. M. Lee, *Introduction to topological manifolds*, 2.^a ed., Springer, 2011.
- [12] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, University of Virginia Press, 1965.
- [13] P. Nyikos, «The theory of nonmetrizable manifolds», en *Handbook of Set-Theoretic Topology*, eds. Kenneth Kunen y Jerry E. Vaughan, North Holland, Amsterdam, 1984, 633–684.