

DOI: <https://doi.org/10.47234/mm.8304>

Polinomios para no perder el control

Alejandro Arceo

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Universidad de Colima
gramirez47@ucol.mx,

Luis E. Garza

Facultad de Ciencias
Universidad de Colima
luis.garza1@ucol.mx,

Jesús A. Larios Trejo

Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Colima
jesus.larios@ucol.mx

y

Emma Luz Velasco Zamora

Bachillerato 2
Universidad de Colima
elvelasco@ucol.mx

1. Introducción

Imagina que estás manejando un coche en una carretera con curvas. Sabes cómo se comporta tu coche en condiciones normales, pero ¿qué pasa si, de repente, empieza a llover, la carretera se vuelve resbaladiza, o el coche tiene algún desperfecto por las altas o bajas temperaturas? Estos factores impredecibles son ejemplos de incertidumbre, los cuales se ilustran en la figura 1.

La teoría de control robusto es una rama de la ingeniería de control que se centra en diseñar sistemas capaces de mantener un desempeño adecuado a pesar de las incertidumbres y variaciones en su entorno. Este enfoque es crucial en sistemas donde la precisión y estabilidad son esenciales, especialmente cuando se enfrentan a condiciones impredecibles. En el campo del control automático, el problema de la incertidumbre



Figura 1. De izquierda a derecha, un día soleado, lluvioso o con temperaturas extremas, respectivamente, son ejemplos de condiciones inciertas que el clima puede presentar durante un viaje cotidiano en coche.

se refiere a las situaciones en las que no se conocen con precisión todos los factores que podrían influir en el comportamiento de un sistema. Los sistemas de control están diseñados para regular y hacer funcionar cosas como robots, aviones, plantas industriales o coches. Pero en la práctica, nunca se tiene la información completa: el entorno puede cambiar, las condiciones pueden ser variables y, por lo tanto, el sistema debe lidiar con lo inesperado. En la industria automotriz, por ejemplo, la teoría de control robusto se aplica en el diseño de sistemas de control para vehículos modernos. Los sistemas de control de estabilidad, el control de tracción y los sistemas de asistencia al conductor son ejemplos de aplicaciones donde el control robusto es esencial. Estos sistemas deben funcionar correctamente en una amplia gama de condiciones de carretera y clima.

En particular, en un sistema de control de estabilidad, el objetivo es evitar que el vehículo derrape o pierda el control en situaciones adversas. Utilizando técnicas de control robusto, se puede diseñar un sistema que ajuste automáticamente la potencia del motor y la distribución del frenado para mantener la estabilidad del vehículo, incluso cuando las condiciones cambian repentinamente.

La propiedad esencial de un sistema de control es la estabilidad. Esta propiedad se refiere a su capacidad para mantener un comportamiento predecible y controlado en respuesta a perturbaciones o cambios en las condiciones iniciales. En términos sencillos, un sistema es estable si, después de una perturbación, sus respuestas no se desvían indefinidamente, sino que eventualmente se estabilizan en un estado deseado o vuelven a un equilibrio.

Muchos fenómenos físicos, químicos y biológicos pueden describirse mediante ecuaciones diferenciales. En este trabajo buscamos mostrar por qué los polinomios Hurwitz son una herramienta clave para analizar la estabilidad de las soluciones de estas ecuaciones, un concepto esencial en el diseño y comprensión de sistemas de control.

Para este propósito, realizamos la exposición del artículo del siguiente modo: En la siguiente sección, definiremos la ecuación diferencial lineal

que consideraremos en este trabajo y enunciamos algunos conceptos matemáticos básicos relacionados con la teoría de control, el rol que juegan los polinomios Hurwitz en la estabilidad del sistema, y el papel de la transformada de Laplace en el análisis de las soluciones del mismo. La sección 3 contiene definiciones y propiedades básicas de polinomios ortogonales y aborda su conexión con los polinomios Hurwitz. También presentamos algunos ejemplos para clarificar propiedades y conceptos de dichos polinomios. La sección 4 introduce el problema de la incertidumbre en los sistemas de control y muestra brevemente un método de sintonización de controladores PID, que utiliza polinomios ortogonales, que ha sido desarrollado recientemente. Finalmente, se presentan algunas conclusiones en la sección 5.

2. Sistemas lineales

Pensemos en el movimiento de un dron que despegar y se desplaza en el aire. En cuanto se fijan su posición inicial y la forma en que se impulsa, su trayectoria queda completamente determinada por las leyes de la física. Sin embargo, existen infinitas maneras de ponerlo en movimiento: diferentes velocidades iniciales, direcciones y fuerzas de empuje dan lugar a trayectorias distintas. En términos matemáticos, esto significa que hay una infinidad de soluciones posibles dentro del sistema físico real.

¿Cómo se modela este movimiento mediante una ecuación diferencial ordinaria? Una ecuación diferencial ordinaria tiene, en general, la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}),$$

donde \mathbf{x} representa el estado del sistema (por ejemplo, la posición y la velocidad del dron) y $f(\mathbf{x})$ describe cómo evoluciona ese estado con el tiempo. La forma precisa de f depende del campo de estudio correspondiente —en este caso, la mecánica clásica—, que determina las leyes que rigen el movimiento.

En el área de los sistemas de control, es especialmente útil considerar un tipo particular de ecuaciones diferenciales llamadas ecuaciones lineales homogéneas autónomas (o, de manera más breve, ecuaciones lineales). Estas son de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

donde \mathbf{A} es una matriz con coeficientes reales constantes. Este tipo de ecuaciones se utiliza ampliamente en modelación y análisis, ya que

permiten comprender con precisión cómo evolucionan las soluciones y bajo qué condiciones el sistema resulta estable o inestable.

En este caso, los fenómenos pueden ser representados (o aproximados¹) mediante un sistema lineal, es decir, un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t), \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t), \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}x_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t),\end{aligned}$$

donde cada x_i , $1 \leq i \leq n$, es una función diferenciable en la variable t (generalmente t denota tiempo), y los a_{ij} son coeficientes reales constantes para $1 \leq i, j \leq n$. Más precisamente, se tiene

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^t \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (1)$$

No es difícil ver que la solución del sistema anterior tiene la forma²

$$\mathbf{x}(t) = \sum_i \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}, \quad (2)$$

donde los números complejos λ_i , $1 \leq i \leq n$, son los valores propios de la matriz \mathbf{A} (es decir, las raíces del polinomio característico $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$) y los vectores \mathbf{v}_i son los vectores propios de \mathbf{A} y no dependen de t .

2.1 Estabilidad de un sistema lineal y la transformada de Laplace

Un sistema como (1) es asintóticamente estable si, después de una perturbación, las respuestas del sistema tienden a cero a medida que el tiempo tiende al infinito. Es decir, el sistema vuelve a su estado de equilibrio (o a un punto deseado) con el tiempo. Formalmente, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1. Un sistema es asintóticamente estable si

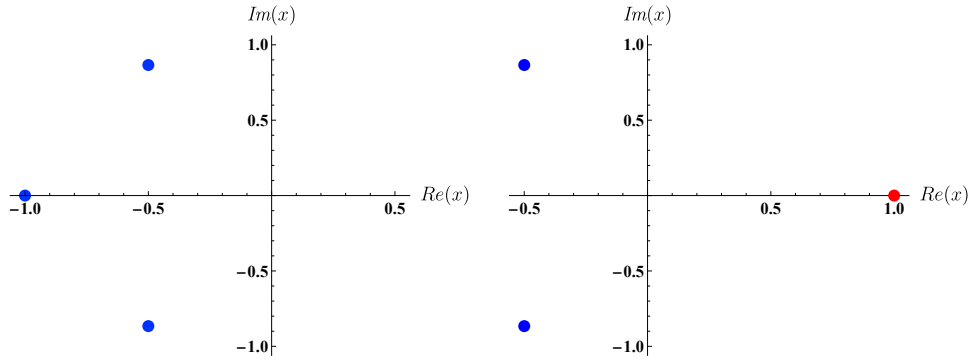
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

Tomando en cuenta (2), es fácil ver que la estabilidad asintótica de un sistema está determinada por los valores propios de la matriz \mathbf{A} . Dado que los vectores propios son distintos de cero, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ implica

¹Mediante la correspondiente matriz Jacobiana, que constituye una transformación lineal.

²Si algún λ_i tiene multiplicidad $k > 1$, su término exponencial correspondiente en la solución aparece k veces, multiplicado respectivamente por las potencias $1, t, \dots, t^{k-1}$.

que todos los términos $e^{\lambda_i t}$ tienden a cero, lo cual a su vez implica que todos los autovalores λ_i tienen parte real negativa. Por otro lado, es claro que si cada λ_i tiene parte real negativa, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$. En otras palabras, el sistema es asintóticamente estable si, y solo si, todas las raíces del polinomio característico de \mathbf{A} tienen parte real negativa. Los polinomios que satisfacen esta propiedad son llamados polinomios Hurwitz (véase la figura 2). Como consecuencia, tenemos el siguiente resultado.



(a) Todas las raíces del polinomio $A(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, en color azul, tienen parte real negativa. Por tanto, $A(x)$ es Hurwitz. (b) El polinomio $B(x) = x^3 - 1$ tiene una raíz con parte real positiva (en rojo). Por tanto, no es Hurwitz.

Figura 2. Ejemplos de polinomios Hurwitz y no Hurwitz.

Teorema 2.2. *El sistema lineal (1) es asintóticamente estable si, y solo si, $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ es un polinomio Hurwitz en la variable λ .*

Por otro lado, dada una función f definida para $t \in [0, \infty)$, su transformada de Laplace $\mathcal{L}[f] := F$ se define mediante

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Nótese que \mathcal{L} es una transformación lineal, y transforma una función real en una función compleja. Además,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'](s) &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st} dt \\ &= e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = sF(s) - f(0), \end{aligned}$$

donde hemos usado el cambio de variable $u = e^{-st}$. Esto significa que \mathcal{L} transforma ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas. Por otro lado, es fácil mostrar que, para $k \geq 0$,

$$\mathcal{L}[t^k e^{\lambda t}](s) = \frac{1}{(s - \lambda)^{k+1}}, \tag{3}$$

por lo que, denotando la transformada de Laplace de un vector como el vector de las transformadas de Laplace de sus componentes y suponiendo que los valores propios son todos distintos, se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}\right](s) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \mathcal{L}[e^{\lambda_i t}](s) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - \lambda_i} \mathbf{v}_i, \\ &= \frac{1}{(s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_n)} \begin{pmatrix} h_1(s) \\ \vdots \\ h_n(s) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

donde, para $1 \leq i \leq n$, $h_i(s)$ es un polinomio cuyos coeficientes dependen de las componentes de los vectores propios. Si existen valores propios repetidos, se llega a una expresión similar utilizando (3). En otras palabras, la transformada de Laplace de (2) es

$$\mathcal{L}[\mathbf{x}](s) = \frac{1}{\det(\mathbf{A} - s\mathbf{I})} \begin{pmatrix} h_1(s) \\ \vdots \\ h_n(s) \end{pmatrix} := \mathbf{H}(s). \quad (4)$$

Esto significa que la transformada de Laplace de (2) es una función racional cuyo denominador es precisamente el polinomio característico de la matriz \mathbf{A} en (1).

En general, la transformada de Laplace es una herramienta fundamental en ingeniería y física, ya que permite convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas más simples, facilitando así el análisis de sistemas dinámicos. Su utilidad es especialmente destacada en el diseño de sistemas de control, el estudio de circuitos eléctricos y la resolución de problemas de vibración, calor o movimiento. Al trabajar en el dominio de la frecuencia, permite comprender mejor el comportamiento de los sistemas y aplicar técnicas analíticas más eficientes, integrando de forma natural las condiciones iniciales del problema (véase la figura 3).

En (4), \mathbf{H} es llamado el vector de funciones de transferencias del sistema y cada una de sus entradas es fundamental en la teoría de control y en el análisis de sistemas lineales y se utiliza para entender y diseñar sistemas de control. En términos formales, la función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo (que su salida no depende de en qué momento se aplique la entrada) se define como la transformada de Laplace de la respuesta del sistema a una entrada de impulso unitario (también conocida como la función delta de Dirac). Matemáticamente, si Y es la transformada de Laplace de la salida del sistema y X es la transformada de Laplace de la entrada del sistema, entonces la

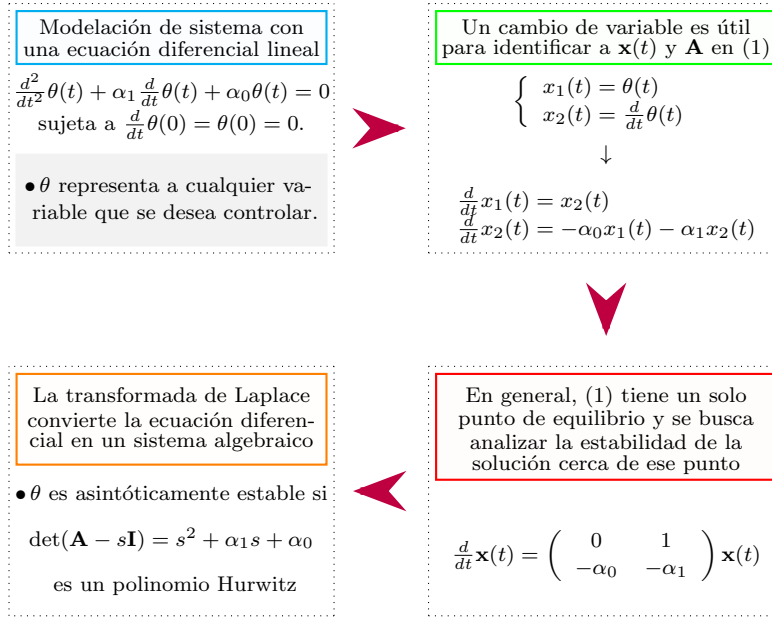


Figura 3. Representación esquemática del proceso de modelado y análisis de estabilidad de un sistema dinámico lineal.

función de transferencia H se define mediante:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Generalmente, esta relación se representa mediante el diagrama a bloques a lazo abierto de la figura 4 (véase [5]).

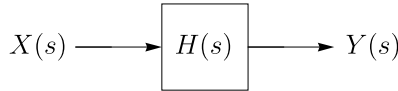


Figura 4. Diagrama de bloques a lazo abierto.

La función de transferencia proporciona una descripción directa de cómo la salida del sistema responde a una entrada dada, en términos de una relación algebraica en el dominio de Laplace, y se puede expresar en términos de sus polos y ceros. Los polos son los valores de s que hacen que la función de transferencia sea infinita (es decir, las raíces del polinomio en el denominador), y los ceros son los valores de s que hacen que la función de transferencia sea cero (es decir, las raíces del polinomio en el numerador). Estos polos y ceros proporcionan información sobre la estabilidad y la dinámica del sistema. En términos generales, los polos determinan la estabilidad y el comportamiento del sistema a largo plazo, mientras que los ceros afectan la forma de la respuesta del sistema (véase [5, cap. 9, §9.1]).

Si el sistema no es estable, es necesario el uso de un controlador. Un controlador se utiliza en un sistema dinámico cuando se desea regular o modificar el comportamiento de ese sistema para que cumpla con ciertos objetivos o especificaciones deseadas, como mantener la estabilidad, seguir una trayectoria, compensar perturbaciones, o mejorar el rendimiento ante condiciones cambiantes. Los controladores se aplican a muchos tipos de sistemas dinámicos, como robots, plantas industriales, vehículos, y sistemas eléctricos, entre otros. Existen numerosas técnicas de control que pueden implementarse en un sistema, y el método de asignación de polos es uno de los más utilizados. Consiste en diseñar controladores con el objetivo de que el sistema tenga un comportamiento dinámico deseado. Este método se basa en modificar las posiciones de los polos del sistema de control a lazo cerrado (es decir, el sistema con el controlador en funcionamiento con una retroalimentación) para garantizar que su respuesta cumpla con ciertos requisitos, como alcanzar la estabilidad, mejorar la rapidez de respuesta o reducir oscilaciones. Su diagrama a bloques está representado en la figura 5, donde C es la función de transferencia del controlador. En este caso,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)H(s)}. \quad (5)$$

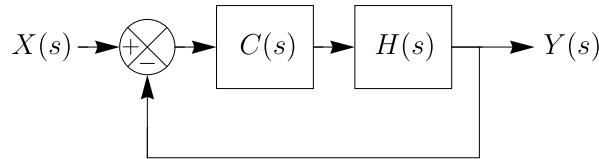


Figura 5. Diagrama de bloques a lazo cerrado con controlador C .

3. Polinomios ortogonales y polinomios Hurwitz

Como hemos mostrado anteriormente, los polinomios Hurwitz juegan un papel central en el estudio de la estabilidad de las soluciones de un sistema. Dichos polinomios están estrechamente relacionados con otra clase de polinomios que han sido ampliamente estudiados durante más de dos siglos: los polinomios ortogonales.

Los polinomios ortogonales son un tipo de funciones especiales que tienen aplicaciones en física, ingeniería, estadística, y muchas otras ciencias. Dado un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$, donde \mathbb{P} es el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales, decimos que $p, q \in \mathbb{P}$ son ortogonales si

$$\langle p, q \rangle = 0.$$

Generalmente, un producto interno definido en este espacio tiene la forma

$$\langle p, q \rangle_\omega = \int_E p(x)q(x)\omega(x)dx, \tag{6}$$

donde ω es una función integrable positiva en el intervalo $E \subset \mathbb{R}$. Aplicando el conocido procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base $\{1, x, x^2, \dots\}$ de \mathbb{P} , obtenemos una sucesión $\{P_n\}_{n \geq 0}$ de polinomios con la propiedad $\deg P_n = n$ para todo $n \geq 0$ y

$$\langle P_n, P_m \rangle_\omega = \int_E P_n(x)P_m(x)\omega(x)dx = \begin{cases} \|P_n\|^2 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Notemos que la sucesión ortogonal no es única pero la ortogonalidad se preserva bajo reescalamientos, por lo que podemos asumir que cada P_n es mónico.

Los polinomios ortogonales más estudiados en la literatura son los polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite, conocidos como polinomios ortogonales clásicos. Estas familias son ortogonales con respecto a las funciones integrables y positivas ω mostradas en el cuadro 1, y son importantes en diversas áreas como la teoría de la aproximación, el análisis numérico y la física matemática. Notar que los polinomios de Jacobi asociados al caso $\alpha = \beta = 0$ son los llamados polinomios de Legendre, mientras que los casos $\alpha = \pm 1/2, \beta \pm 1/2$ corresponden a los cuatro tipos de polinomios de Chebyshev.

Cuadro 1. Ejemplos de polinomios ortogonales y su respectivo peso de ortogonalidad.

	Jacobi	Laguerre	Hermite
Parámetros	$\alpha, \beta > -1$	$\alpha > -1$	\ominus
ω	$(1-x)^\alpha(x+1)^\beta$	$x^\alpha e^{-x}$	e^{-x^2}
E	$(-1, 1)$	$(0, \infty)$	\mathbb{R}

Una propiedad esencial de las sucesiones de polinomios ortogonales es que cualquiera tres polinomios de grados consecutivos están relacionados entre sí. Esta es llamada la relación de recurrencia a tres términos y se muestra a continuación (véase [6, cap. 1, teo. 4.1]).

Teorema 3.1. *Si $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ortogonalizando la sucesión de los monomios, entonces para todo $n \geq 1$ existen constantes $b_n \in \mathbb{R}$ y $a_n > 0$ tales que*

$$P_n(x) = (x - b_n)P_{n-1}(x) - a_nP_{n-2}(x),$$

donde $P_{-1} = 0$.

Para probar el teorema 3.1, debemos recordar que el proceso de Gram-Schmidt preserva los espacios generados en cada paso. Por tanto, xP_n puede ser reescrito como

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_{n,k} P_k(x),$$

con $\lambda_{n,k} \in \mathbb{R}$. Así que, para $k = 0, 1, \dots, n+1$, obtenemos

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_{n,k} \langle P_k, P_j \rangle = \lambda_{n,j} \langle P_j, P_j \rangle,$$

es decir,

$$\lambda_{n,j} = \langle xP_n, P_j \rangle / \langle P_j, P_j \rangle.$$

Sin embargo, para $0 \leq j \leq n-2$, $\lambda_{n,j} = 0$ debido a que

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \langle P_n, xP_j \rangle = 0,$$

ya que xP_j es un polinomio de grado menor a n . Así tenemos que, para $n \geq 1$,

$$xP_n(x) = \lambda_{n,n+1} P_{n+1}(x) + \lambda_{n,n} P_n(x) + \lambda_{n,n-1} P_{n-1}(x).$$

Dado que xP_n y P_{n+1} son mónicos, $\lambda_{n,n+1} = 1$. Reemplazando n por $n-1$, la fórmula anterior es equivalente a

$$xP_{n-1}(x) = P_n(x) + b_n P_{n-1}(x) + a_n P_{n-2}(x)$$

y válida para $n \geq 2$, donde hemos definido $b_n = \lambda_{n-1,n-1}$ y $a_n = \lambda_{n-1,n-2}$. Nota que $a_n \neq 0$ debido a que

$$\langle P_{n-1}, xP_{n-2} \rangle = \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle \neq 0.$$

Para el caso $n = 1$, se define $P_{-1} = 0$ y se elige $b_1 = -P_1(0)$ para completar la demostración (nota que a_1 puede ser arbitrario).

Por otro lado, dada una sucesión ortogonal mónica $\{P_n\}_{n \geq 0}$, podemos definir los polinomios

$$Q_n(x) = \int_E \frac{P_n(z) - P_n(x)}{z - x} \omega(z) dz.$$

Debido a que el cociente en la integral anterior es un polinomio de grado $n-1$ en x , y la integración es en la variable z , se sigue que Q_n es un polinomio de grado a lo más $n-1$ en la variable x . De hecho, no es difícil ver que $\deg Q_n = n-1$ para todo $n \geq 1$, mientras que $Q_0 = 0$. $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ es llamada la sucesión de polinomios de segunda especie asociada a $\{P_n\}_{n \geq 0}$. Una propiedad importante es que todas las raíces de P_n y Q_n son reales y simples, y además satisfacen una propiedad de

entrelazamiento: entre cualesquiera dos raíces consecutivas de P_n existe exactamente una raíz de Q_n (véanse [6] y la figura 6).

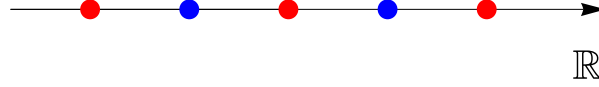


Figura 6. Propiedad de entrelazamiento que satisfacen los ceros de P_3 (en rojo) y Q_3 (en azul).

Es interesante destacar que la propiedad de entrelazamiento, así como el carácter real de las raíces, juega un papel central en el teorema de Hermite–Biehler (véase [9]). Este resultado establece condiciones necesarias y suficientes para que un polinomio con coeficientes reales tenga todas sus raíces en el semiplano izquierdo. En particular, si se considera un polinomio de grado $2n$ con coeficientes reales de la forma

$$f(x) = a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \dots + a_{2n-1}x + a_{2n},$$

y se reescribe como

$$f(x) = h(x^2) + xg(x^2),$$

con

$$h(x) = a_0x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_{2n}, \quad g(x) = a_1x^{n-1} + \dots + a_{2n-1},$$

entonces, el teorema de Hermite–Biehler afirma que f es un polinomio Hurwitz si y solo si las raíces de los polinomios h y g son reales, negativas y además están entrelazadas.

Por lo tanto, no es extraño que existan relaciones bien conocidas en la literatura entre polinomios Hurwitz y polinomios ortogonales (véase [8, 11]), y una de ellas se expone a continuación (véase [11]).

Teorema 3.2. *Sea $f(x) = h(x^2) + xg(x^2)$ un polinomio Hurwitz de grado $2n$, y definimos*

$$P_n(x) := (-1)^n h(-x), \quad Q_n(x) := (-1)^{n-1} g(-x).$$

Entonces, P_n pertenece a una sucesión $\{P_n\}_{n \geq 0}$ que es ortogonal con respecto a algún producto interno de la forma (6), y Q_n es el polinomio de segunda especie asociado a P_n .

Existe también siguiente resultado converso.

Teorema 3.3. [11] *Si $\{P_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión ortogonal con respecto a (6), donde ω es una función positiva en $E \subset \mathbb{R}_+$, y $\{Q_n\}_{n \geq 1}$ es la sucesión de polinomios de segunda especie, entonces*

$$f(x) = (-1)^n P_n(-x^2) + (-1)^{n-1} x Q_n(-x^2), \quad n \geq 1,$$

es un polinomio Hurwitz de grado $2n$.

Aunque los dos teoremas anteriores consideran polinomios Hurwitz de grado par, pueden enunciarse resultados similares para polinomios Hurwitz de grado impar [11]. El teorema 3.3 es especialmente útil en aplicaciones prácticas. Eligiendo correctamente una familia de polinomios ortogonales, es posible construir una familia de polinomios Hurwitz que posea propiedades deseadas, es decir, con raíces localizadas adecuadamente para el correcto comportamiento de un sistema.

4. El desafío de la incertidumbre

Debido a que un sistema de control puede volverse inestable si no se toma en cuenta su posible incertidumbre, se han desarrollado varias formas de manejar la incertidumbre en sistemas de control. Una de ellas es el control robusto. Este enfoque trata de diseñar un controlador que funcione bien incluso cuando no se conocen todas las condiciones exactas del sistema. Es como si hicieras que el coche que conduces esté preparado para funcionar bien tanto en un día soleado como en uno lluvioso. En este caso, la temperatura o el clima son parámetros inciertos en cualquier día común que afectan al desempeño del coche y, por lo tanto, deben ser considerados si se desea incrementar la seguridad o el confort durante un viaje. Afortunadamente, la incertidumbre puede modelarse matemáticamente a partir de la matriz del sistema (o de su función de transferencia), introduciendo uno o más parámetros de incertidumbre en los coeficientes del polinomio característico del sistema (véase [4]). A esto se le llama incertidumbre paramétrica. En general, se considera que la matriz \mathbf{A} en el sistema lineal depende de un vector \mathbf{q} con d parámetros y, por lo tanto, (1) es equivalente a

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{x}(t),$$

donde $\mathbf{q} \in D \subset \mathbb{R}^d$. De esta forma, el polinomio característico $p(\lambda, \mathbf{q}) = \det(\mathbf{A}(\mathbf{q}) - \lambda I)$ también depende del vector de parámetros \mathbf{q} . Decimos que el sistema es *robustamente estable* si $p(\lambda, \mathbf{q})$ es un polinomio Hurwitz para todo $\mathbf{q} \in D$. Aquí, \mathbf{q} es llamado un vector de parámetros de incertidumbre, y se consideran varios tipos. El ejemplo más sencillo es la llamada incertidumbre de tipo intervalo, que consiste en suponer que cada uno de los coeficientes de un polinomio puede tomar valores en un cierto intervalo, es decir,

$$p(x, \mathbf{q}) = q_0 + q_1x + \dots + q_{n-1}x^{n-1} + q_nx^n,$$

donde los coeficientes satisfacen

$$q_0 \in [x_0, y_0], q_1 \in [x_1, y_1], \dots, q_n \in [x_n, y_n].$$

En este caso, $\mathbf{q} = (q_0, \dots, q_n)^t \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $\mathbf{q} \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, donde D es un hiperrectángulo. En otras palabras, cada coeficiente del polinomio se considera como un parámetro de incertidumbre. El siguiente teorema proporciona condiciones para la estabilidad robusta en este caso (véase [10]).

Teorema 4.1. (*Kharitonov*) *Todo polinomio en la familia $\{f(x, \mathbf{q}) = \sum_{k=0}^n q_k x^k : q_0 \in [x_0, y_0], \dots, q_n \in [x_n, y_n]\}$ es Hurwitz si, y solo si, para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$,*

$$K_i(x) = \sum_{j=0}^n \kappa_{i,j} x^j$$

es Hurwitz, donde, para $0 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned} \kappa_{1,j} &= \begin{cases} x_j & \text{si } j \equiv 0, 1 \pmod{4}, \\ y_j & \text{si } j \equiv 2, 3 \pmod{4}, \end{cases} \\ \kappa_{2,j} &= \begin{cases} x_j & \text{si } j \equiv 1, 2 \pmod{4}, \\ y_j & \text{si } j \equiv 0, 3 \pmod{4}, \end{cases} \\ \kappa_{3,j} &= \begin{cases} x_j & \text{si } j \equiv 2, 3 \pmod{4}, \\ y_j & \text{si } j \equiv 0, 1 \pmod{4}, \end{cases} \\ \kappa_{4,j} &= \begin{cases} x_j & \text{si } j \equiv 0, 3 \pmod{4}, \\ y_j & \text{si } j \equiv 1, 2 \pmod{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Un reto actual es el diseño de técnicas de control de asignación de polos que incorporen incertidumbre. Es decir, que los polos propuestos puedan depender de uno o varios parámetros de incertidumbre, y que se garantice la estabilidad para todo un rango de variación de los parámetros. Una situación real donde aparece este reto es el control de un vehículo eléctrico sometido a variaciones de carga y condiciones del terreno. El sistema de tracción del vehículo debe mantener un comportamiento estable y deseado (por ejemplo, en términos de velocidad o aceleración) aunque el peso del vehículo cambie (pasajeros, carga) o la pendiente del camino varíe. Estas condiciones pueden representarse mediante parámetros de incertidumbre que afectan la dinámica del sistema. Por lo tanto, la relación existente entre polinomios Hurwitz y polinomios ortogonales descrita anteriormente, así como con el uso de propiedades básicas de polinomios ortogonales pueden aportar soluciones a este reto. Una de ellas es lo que se conoce como el teorema de Favard ([6]): dadas dos sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n \geq 1}$ y $\{b_n\}_{n \geq 1}$ que satisfacen $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ para todo n , y definiendo $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x - b_0$, es posible generar toda una familia de polinomios

mediante la relación de recurrencia

$$P_{n+1}(x) = (x - b_n)P_n(x) - a_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \quad (7)$$

La sucesión $\{P_n\}_{n \geq 1}$ construida de esta forma será, con algunas condiciones adicionales en $\{a_n\}_{n \geq 1}$ y $\{b_n\}_{n \geq 1}$, ortogonal con respecto a alguna función $\omega(x) > 0$ definida en $E \subset \mathbb{R}_+$.

La idea central es hacer que las sucesiones $\{a_n\}_{n \geq 1}$ y $\{b_n\}_{n \geq 1}$ dependan de uno o más parámetros, de tal forma que los polinomios construidos mediante (7), así como sus raíces, también van a depender de dichos parámetros. Entonces, si se determina para qué valores de los parámetros se mantiene la ortogonalidad, es posible utilizar estos polinomios ortogonales para construir polinomios que serán Hurwitz para todo valor de los parámetros. En otras palabras, es posible construir familias de polinomios Hurwitz robustamente estables, que dependan de uno o más parámetros, y que pueden ser utilizados para proponer métodos de asignación de polos que tomen en cuenta la incertidumbre de un sistema. Esta idea fue explorada en [1].

Ejemplo 4.2. El polinomio $p(x, t) = x^4 + x^3 + 4tx^2 + 2tx + 3t^2$ fue construido con polinomios ortogonales utilizando el teorema 3.3 y puede verificarse que es un polinomio Hurwitz para todo $t > 0$. Para ilustrar este hecho, las figuras 7 y 8 muestran la gráfica y las raíces de $p(x, t)$, respectivamente, para varios valores positivos del parámetro incierto t .

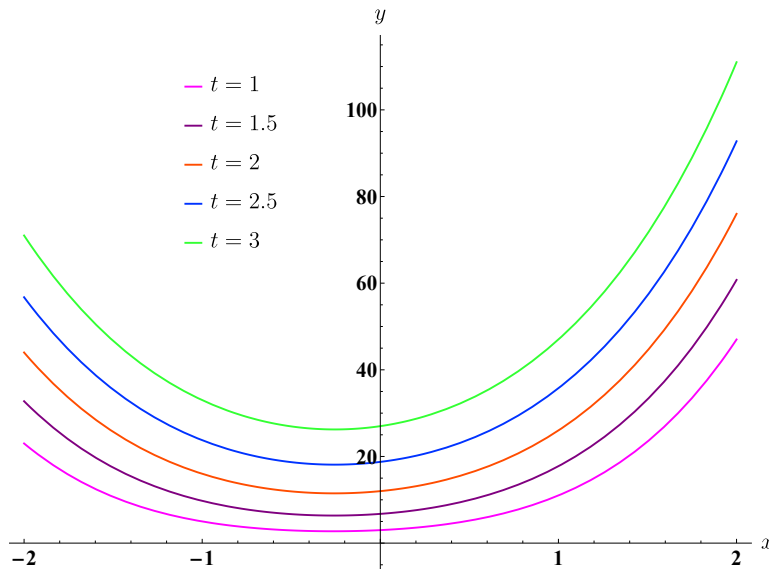


Figura 7. Gráfica de $y = p(x, t)$ para $x \in [-2, 2]$ y $t = 1, 1.5, 2, 2.5, 3$.

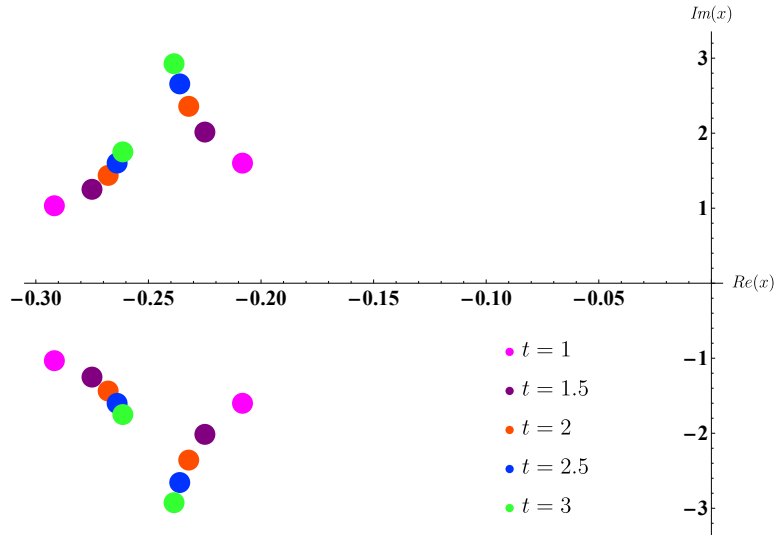


Figura 8. Localización de las raíces de $p(x, t)$ para algunos valores de t . Notar que todas las raíces tienen parte real negativa.

Finalmente, el siguiente ejemplo considera el control de un reactor continuo de tanque agitado que opera en una reacción exotérmica específica. El objetivo es modelar la dinámica térmica del siguiente sistema considerado en [3], en el cual se ha identificado el punto de equilibrio de interés. Para ello se utiliza un controlador PID, que es un dispositivo de control muy utilizado en la industria que ajusta una señal de entrada usando tres componentes: proporcional (P), integral (I) y derivativo (D), que son llamadas las ganancias del controlador [7].

Ejemplo 4.3. Consideramos la función de transferencia

$$H(s) = \frac{1.03291s^2 + 0.371434s + 0.0101825}{s^4 + 0.29s^3 - 0.017s^2 - 0.0018s - 0.0000332}$$

asociada a una reacción exotérmica $T(t)$ expresada en grados Kelvin (K) y medida en minutos, con condición inicial $T(0) = 340^\circ\text{K}$ (ver [3]). El polinomio denominador no es Hurwitz, y por tanto el sistema no es estable. En [2] se propone un sistema de control a lazo cerrado con la configuración de la figura 5, usando un controlador PID cuya función de transferencia está dada por

$$C(s) = \frac{\kappa_I + \kappa_P s + \kappa_D s^2}{s}.$$

La idea del método es proponer un polinomio robustamente estable $f(s, \mathbf{q})$ construido de manera similar al ejemplo 4.2 e igualarlo con el denominador de (5), es decir

$$f(s, \mathbf{q}) = 1 + C(s)H(s).$$

Dado que $H(s)$ está fijo, el objetivo es determinar los coeficientes de $C(s)$ a través de un sistema de ecuaciones lineales. Notar que los coeficientes de $f(s, \mathbf{q})$ dependen de un vector de parámetros inciertos \mathbf{q} , y entonces los coeficientes $\kappa_I, \kappa_P, \kappa_D$ dependerán también de \mathbf{q} . Proponemos

$$f(s, \mathbf{q}) = s^5 + |\mu|s^4 + (0.144 - \beta)s^3 + (0.144|\mu| + \delta)s^2 + (0.000864 - 0.012\beta)s + 0.000864|\mu| + 0.012\delta$$

como el polinomio característico del sistema controlado. El vector de parámetros de incertidumbre es $\mathbf{q} = (\beta, \mu, \delta)^t$ y puede mostrarse que si $\mu < 0$, $\beta < 0.072$ y $0.072\mu < \delta < \mu\beta$, entonces $f(s, \mathbf{q})$ es un polinomio robustamente estable (véase [1]). En este caso, se obtiene

$$\begin{aligned}\kappa_P(\beta, \mu, \delta) &= -0.73\beta - (3.24\mu + 0.19\delta) + 7.89, \\ \kappa_I(\beta, \mu, \delta) &= -3.27\beta - (5.55\mu - 1.54\delta) + 8.05, \\ \kappa_D(\beta, \mu, \delta) &= -0.07\beta - (1.05\mu - 0.06\delta) + 4.65.\end{aligned}$$

Es decir, las ganancias del controlador quedan determinadas por parámetros que toman valores en intervalos de \mathbb{R} , los cuales pueden ajustarse para modificar la acción de control.

La figura 9 ilustra la respuesta de la temperatura

$$T(t) = 340 + \int_0^t \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](\tau) d\tau,$$

del sistema ya controlado, para algunos valores de los parámetros en \mathbf{q} , donde $X(s)$ denota la transformada de Laplace de la función escalón unitario u de magnitud 3, es decir, $X(s) = \mathcal{L}[u](s) = \frac{3}{s}$ con

$$u(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Esta última es también conocida como la función de Heaviside.

5. Conclusiones

Uno de los principales desafíos en el diseño de sistemas de control es que, en la mayoría de los casos, los modelos matemáticos utilizados para describir el comportamiento de un sistema no capturan todas las características del mundo real ya que no se tiene la información completa, además de que pueden existir variaciones impredecibles. Es decir, los modelos suelen ser aproximaciones que dependen de ciertos supuestos y parámetros que pueden cambiar con el tiempo. Esto significa que cualquier sistema de control basado únicamente en el modelo corre el

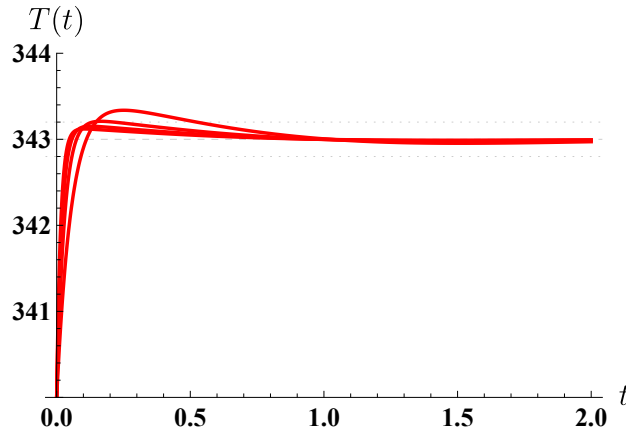


Figura 9. La respuesta al escalón unitario de magnitud 3 del sistema con controlador, correspondiente a los valores $\beta = -1.5$, $\delta = 0.8$ y $-60 \leq \mu \leq -15$ con un incremento de 15.

riesgo de ser ineficaz cuando se enfrenta a condiciones distintas a las esperadas. Aquí es donde entra en juego la teoría de control robusto, la cual permite diseñar controladores capaces de lidiar con la incertidumbre inherente a los sistemas. En lugar de depender de un modelo único y preciso, el control robusto se centra en garantizar que el sistema funcione adecuadamente dentro de un rango de posibles variaciones del modelo. Esta capacidad de manejar la incertidumbre y garantizar un rendimiento estable hace que el control robusto sea indispensable en aplicaciones críticas donde el fallo del sistema no es una opción.

Uno de los puntos clave para el control robusto es contar con herramientas para determinar cuándo una familia de polinomios es robustamente estable. Por otro lado, en aplicaciones de diseño, también es deseable contar con métodos para generar familias de polinomios que por construcción son robustamente estables. Esto se puede lograr utilizando propiedades básicas de la teoría de polinomios ortogonales, y la relación que existe entre dicha teoría y la teoría de polinomios Hurwitz. Es importante mencionar que estos resultados se han utilizado recientemente para desarrollar una técnica novedosa para sintonizar un tipo de controlador muy utilizado en la industria debido a su simplicidad estructural y su eficacia en el control de sistemas lineales y no lineales [2]. El control térmico en hornos, regulación de nivel en tanques, control de velocidad en motores, control de presión en sistemas hidráulicos y climatización en vehículos son ejemplos donde se utilizan controladores.

Bibliografía

- [1] A. Arceo, H. F. Flores, L. G. Garza, L. E. Garza y G. Romero, «On robust stability for Hurwitz polynomials via recurrence relations and linear combinations of orthogonal polynomials», *Complexity*, vol. 2022, núm. 1, 2022, 9404316, <https://doi.org/10.1155/2022/9404316>.
- [2] A. Arceo, L. E. Garza, G. Romero y J. L. Valdéz, «New tools for tuning pid controllers using orthogonal polynomials», *IEEE Access*, vol. 13, 2025, 31992–32003, <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2025.3542358>.
- [3] M. Bakošová, D. Puna, P. Dostál y J. Závacká, «Robust stabilization of a chemical reactor», *Chem. Papers*, vol. 63, núm. 5, 2009, 527–536, <https://doi.org/10.2478/s11696-009-0046-2>.
- [4] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat y L. H. Keel, *Robust control: the parametric approach*, Upper Saddle River, 1995.
- [5] C.-T. Chen, *Linear systems: theory and design*, 3.^a ed., Oxford University Press Inc., 1996.
- [6] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, 1978.
- [7] I. D. Díaz-Rodríguez, S. Han y S. P. Bhattacharyya, *Analytical design of pid controllers*, Cham, Switzerland : Springer, 2019.
- [8] Y. V. Genin, «Euclid algorithm, orthogonal polynomials, and generalized Routh-Hurwitz algorithm», *Linear Algebra and its Applications*, vol. 246, 1996, 131–158, [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(94\)00342-4](https://doi.org/10.1016/0024-3795(94)00342-4).
- [9] O. Holtz, «Hermite-Biehler, Routh-Hurwitz, and total positivity», *Linear Algebra and its Applications*, vol. 372, 2003, 105–110, [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(03\)00501-9](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(03)00501-9).
- [10] V. L. Kharitonov, «Asymptotic stability of an equilibrium point position of a family of systems of linear differential equations», *Plenum Publ. Corp.*, 1979, 1483–1485.
- [11] N. Martínez, L. E. Garza y B. Aguirre-Hernández, «On sequences of Hurwitz polynomials related to orthogonal polynomials», *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 67, núm. 11, 2019, 2191–2208, <https://doi.org/10.1080/03081087.2018.1486369>.